Моделирование эпидемий

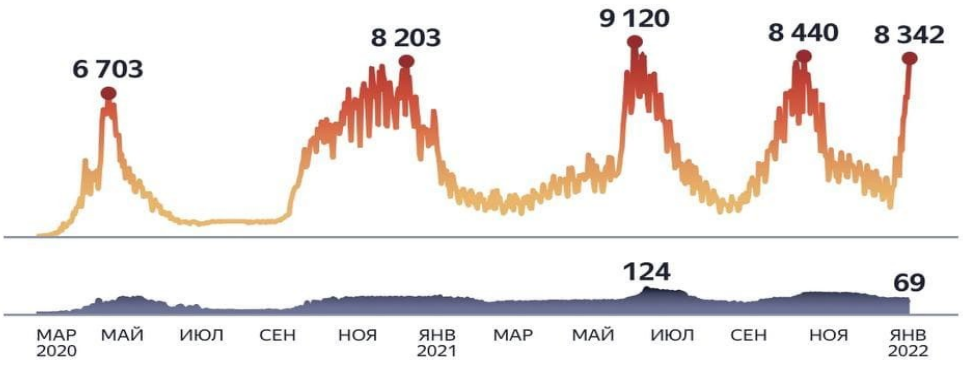
Алексей Шабунин

Кафедра радиофизики и нелинейной динамики
Саратовский государственный университет
им. Н.Г. Чернышевского

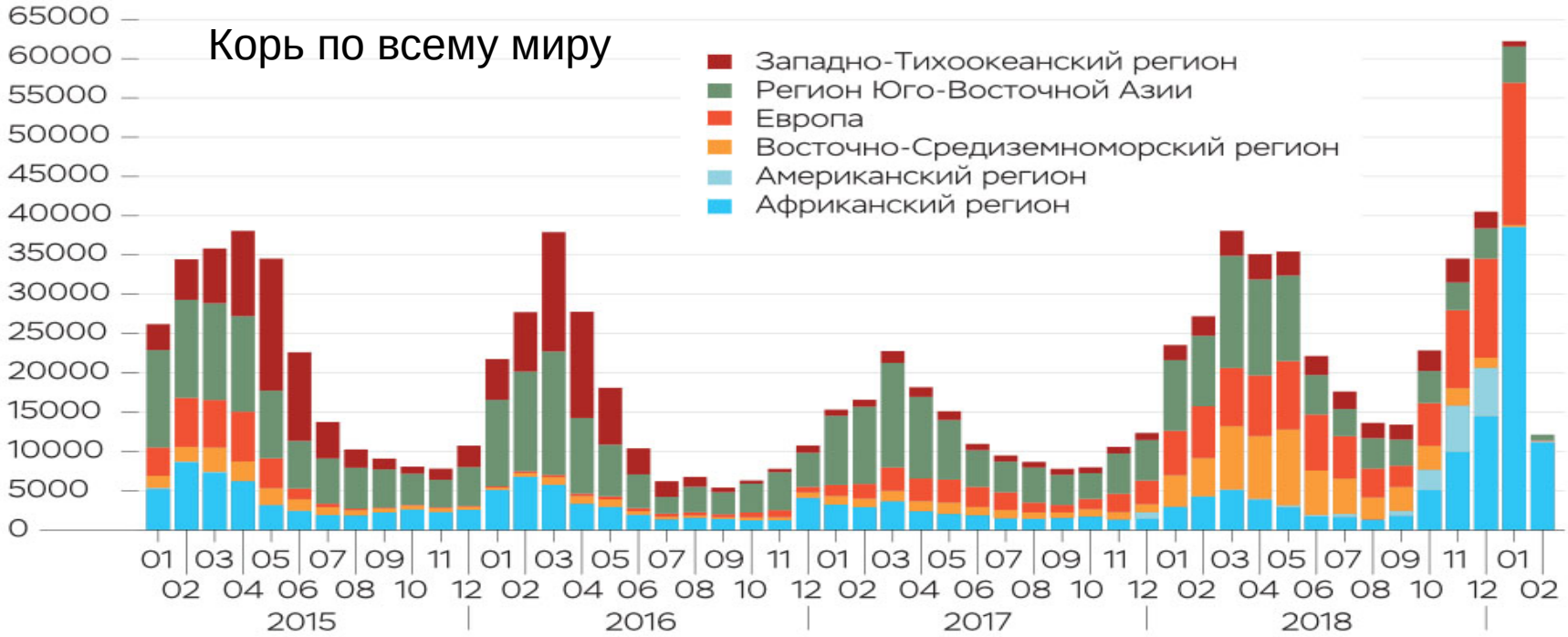
ND-2023

Динамика заражений в ходе инфекционных заболеваний

Ковид-19 в Москве



Грипп в Москве



Принципы моделирования

Цели: объяснять, предсказывать, управлять

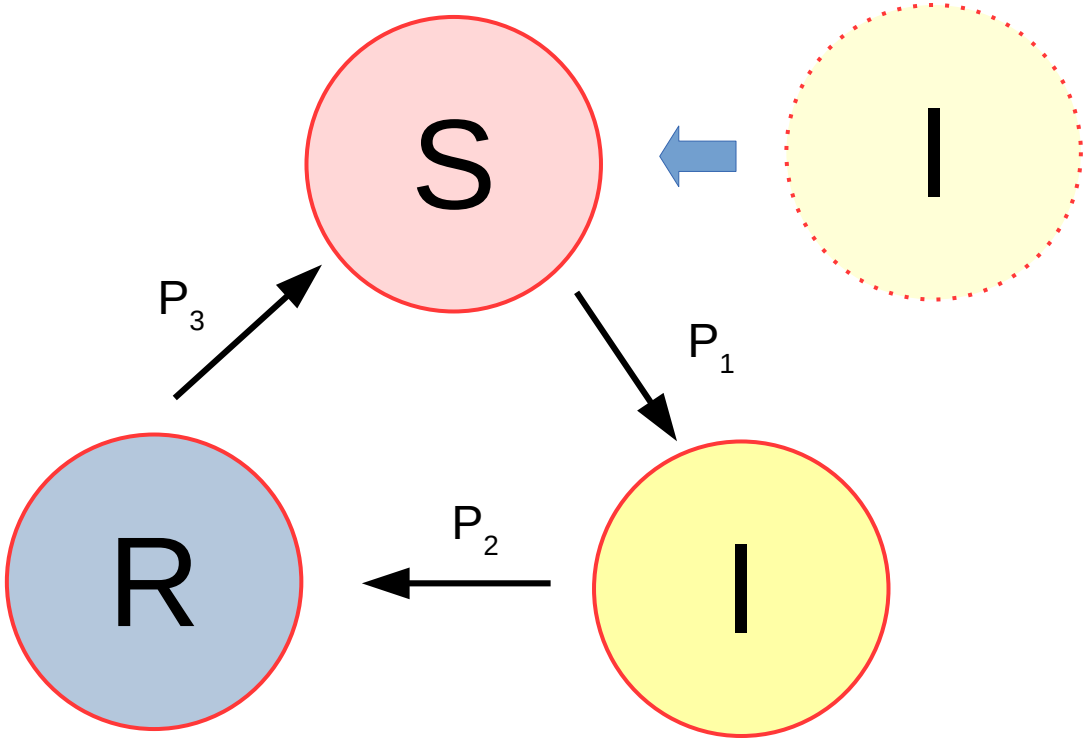
Качественные модели – максимально простые, с малым числом переменных и параметров, с простыми уравнениями. Позволяют выявить механизмы явления и определить ключевые параметры для управления

Усложнение модели

Имитационные модели – максимально точно описывающие реальность, с большим числом переменных и параметров, со сложными уравнениями. Позволяют предсказывать будущую динамику

SIRS

В SIRS модели популяцию разбивают на группы здоровых и восприимчивых (S — **S**usceptible), больных (I — **I**nfectious) и выздоровевших (R — **R**ecovered) особей и определяют закон изменения относительного числа особей в каждой из групп



набор состояний:
S, I, R

Трансформации состояний:

$$S + I \xrightarrow{P_1} 2I$$
$$I \xrightarrow{P_2} R$$
$$R \xrightarrow{P_3} S$$

ODE для SIRS

$$
\begin{aligned}
S + I &\xrightarrow{P_1} 2I \\
I &\xrightarrow{P_2} R \\
R &\xrightarrow{P_3} S
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{s} &= -P_1 si + P_3 r \\
\dot{i} &= P_1 si - P_2 i \\
\dot{r} &= P_2 i - P_3 r
\end{aligned}
$$

$$\boxed{s + i + r = C}$$

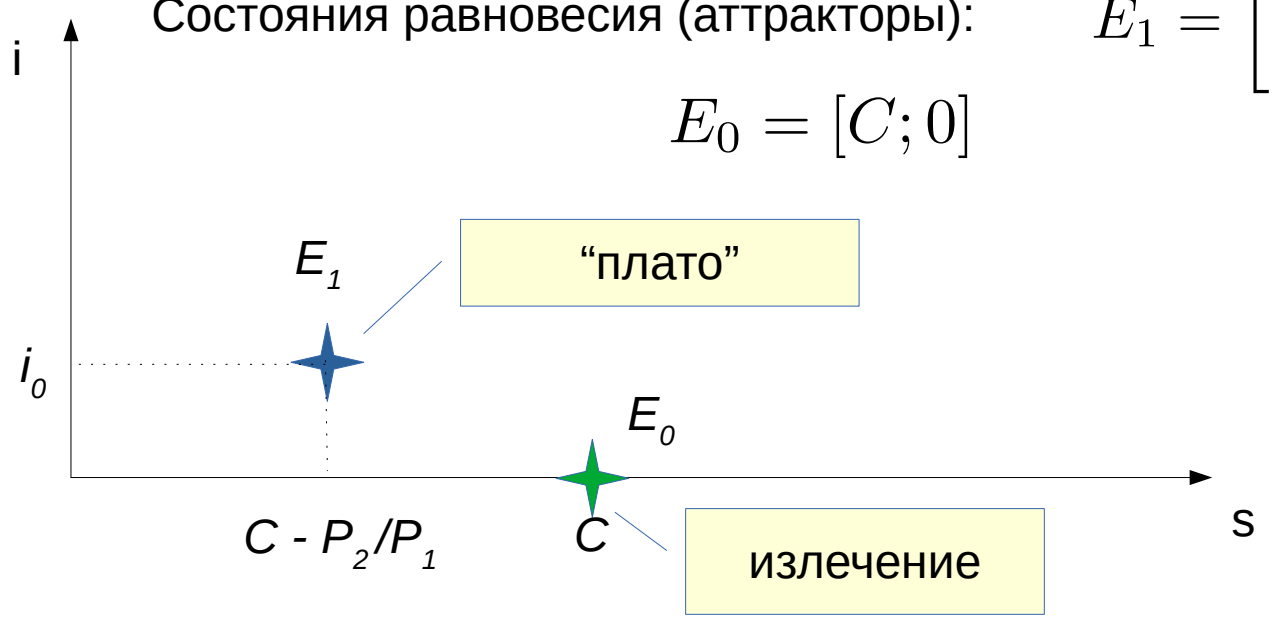
Плотность населения

$$
\boxed{\begin{cases}
\dot{s} = -P_1 si + P_3 (C - s - i) \\
\dot{i} = P_1 si - P_2 i
\end{cases}}
$$

Состояния равновесия (аттракторы):

$$E_0 = [C; 0]$$

$$E_1 = \left[\frac{P_2}{P_1}; \frac{P_3}{P_2 + P_3}\left(C - \frac{P_2}{P_1}\right)\right]$$



Условие устойчивости E_0:

$$C < \frac{P_2}{P_1}$$

Условие устойчивости E_1:

$$C > \frac{P_2}{P_1}$$

Базовый индекс репродукции

Условие устойчивости E_1 – условие развития эпидемии в популяции:

$$C > \frac{P_2}{P_1}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{CP_1}{P_2} > 1$$

Базовый индекс репродукции

$$\boxed{R_0 = \frac{CP_1}{P_2}}$$

– среднее число заражений, производимое одной больной особью

$$\boxed{R_0 > 1}$$

Установившийся уровень заболевания

$$E_1 \simeq \left[\frac{P_2}{P_1}; \frac{P_3}{P_2}\left(C - \frac{P_2}{P_1}\right)\right] \Rightarrow i_s = \lim_{t\to\infty} i(t) = \frac{P_3}{P_2}\left(C - \frac{P_2}{P_1}\right)$$

$$\bar{i}_s = \frac{i_s}{C} = \frac{P_3}{P_2}\left(1 - \frac{1}{R_0}\right)$$

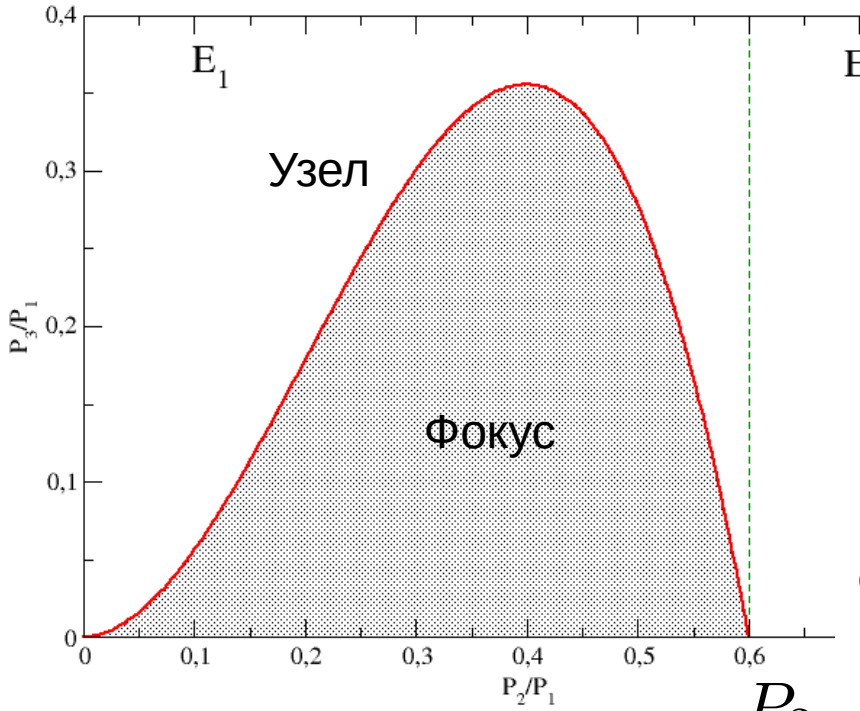
Период инфицирования

$$\boxed{\bar{i}_s = \frac{\tau_2}{\tau_3}\left(1 - \frac{1}{R_0}\right)}$$

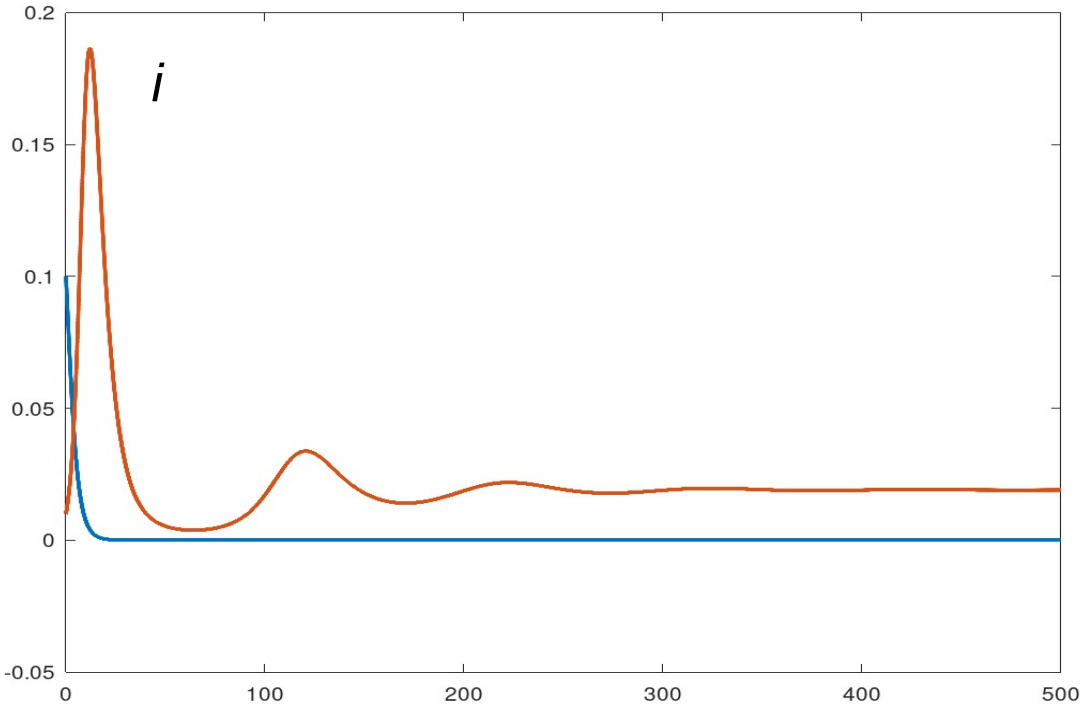
Время действия иммунитета

Динамика ODE

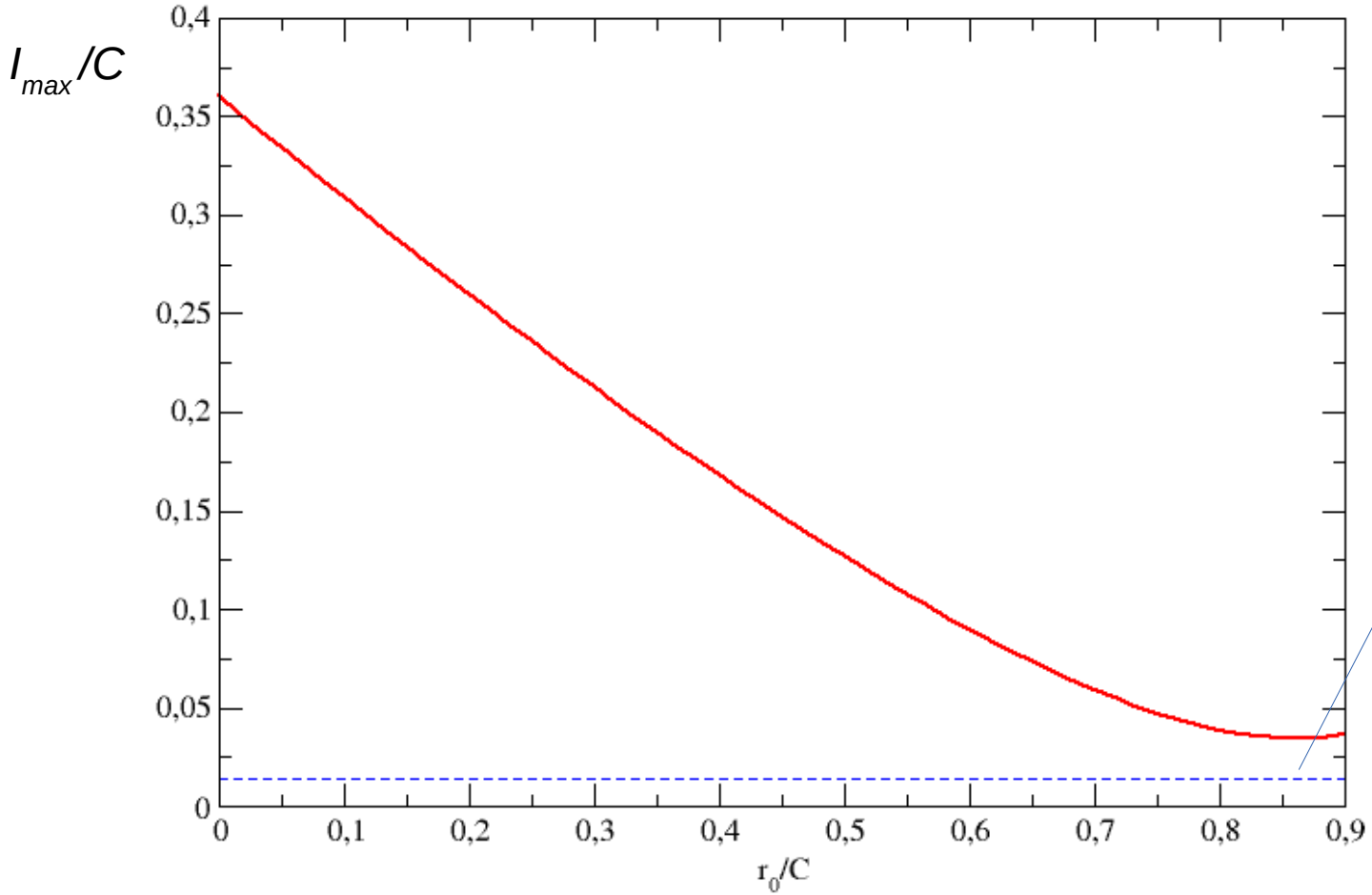
Бифуркационные линии для C = 0.6



$$C = \frac{P_2}{P_1}$$



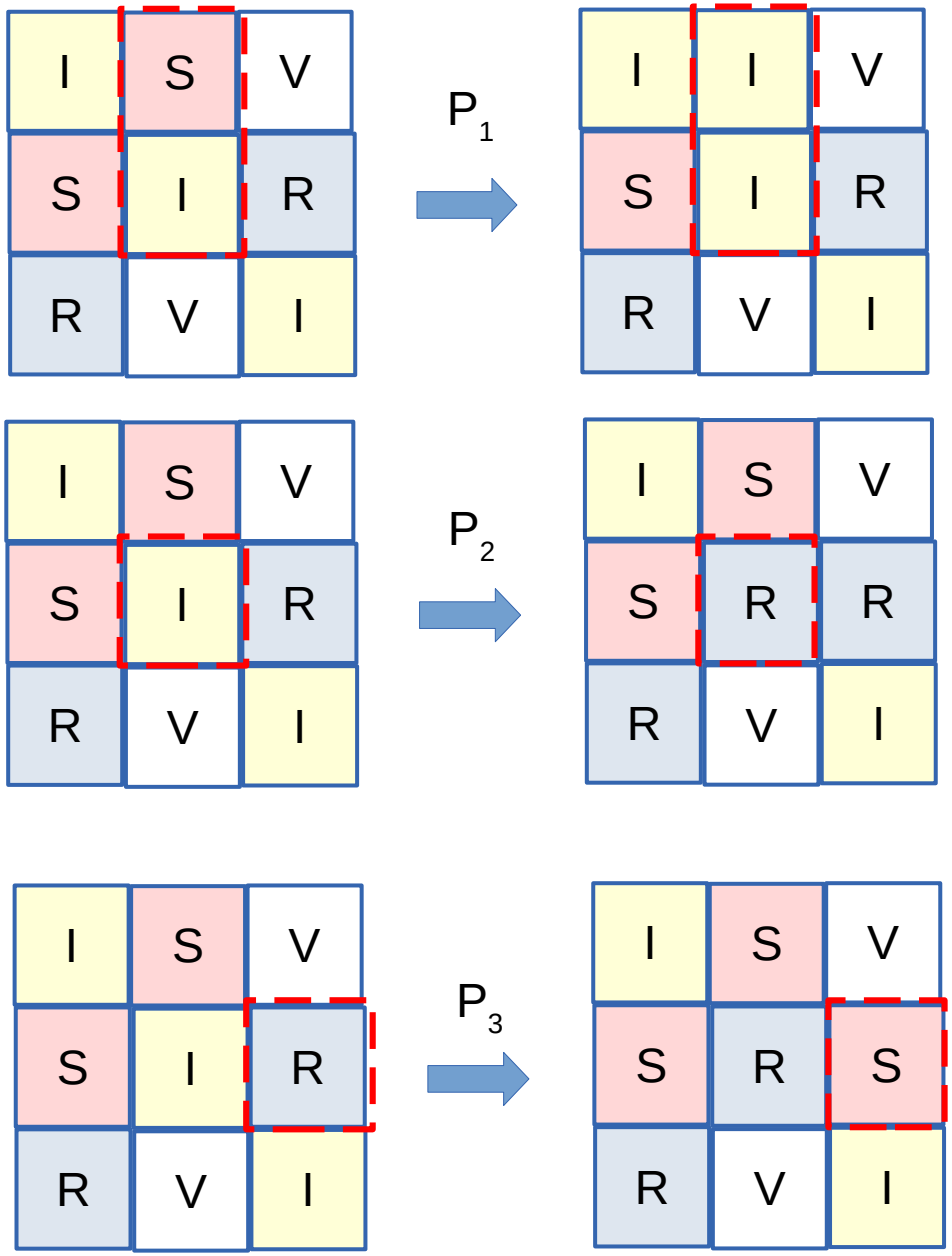
Влияние сформированного иммунитета на первую волну заражений



Итоговый уровень при $t \to \infty$

Моделирование вероятностными клеточными автоматами

Решетка ВКА для SIRS



Трансформации состояний:

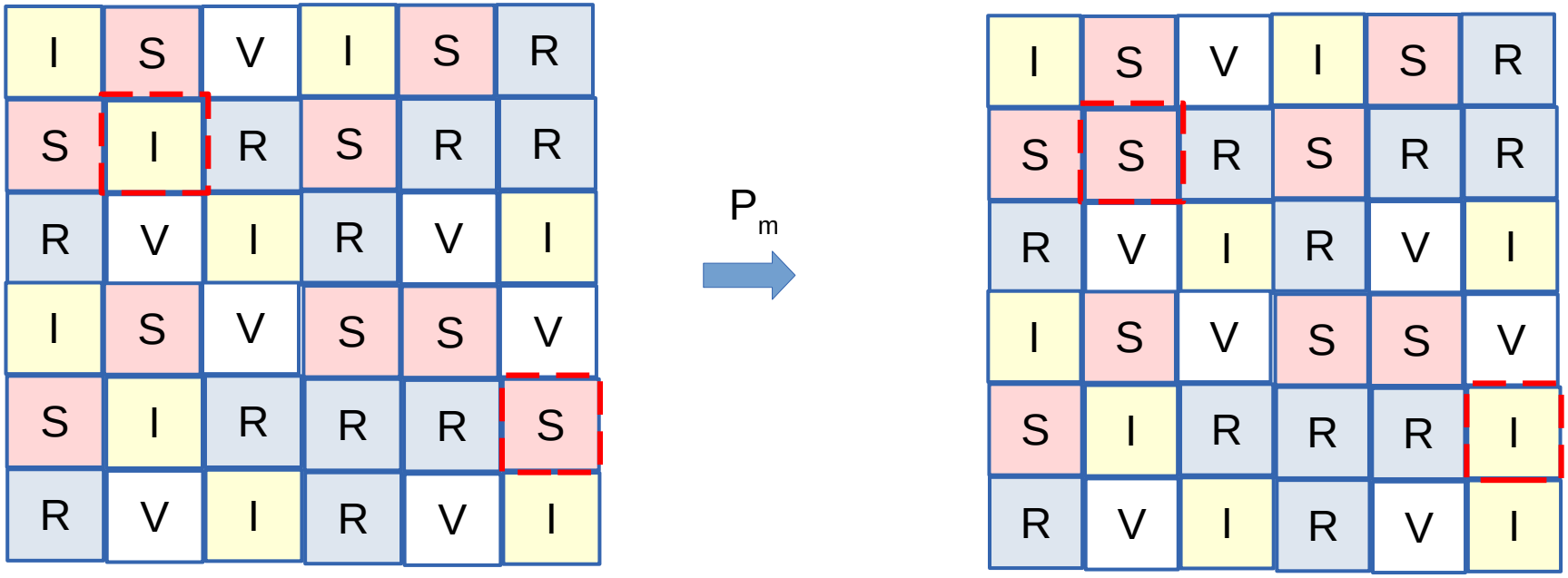
$$S + I \xrightarrow{P_1} 2I$$

$$I \xrightarrow{P_2} R$$

$$R \xrightarrow{P_3} S$$

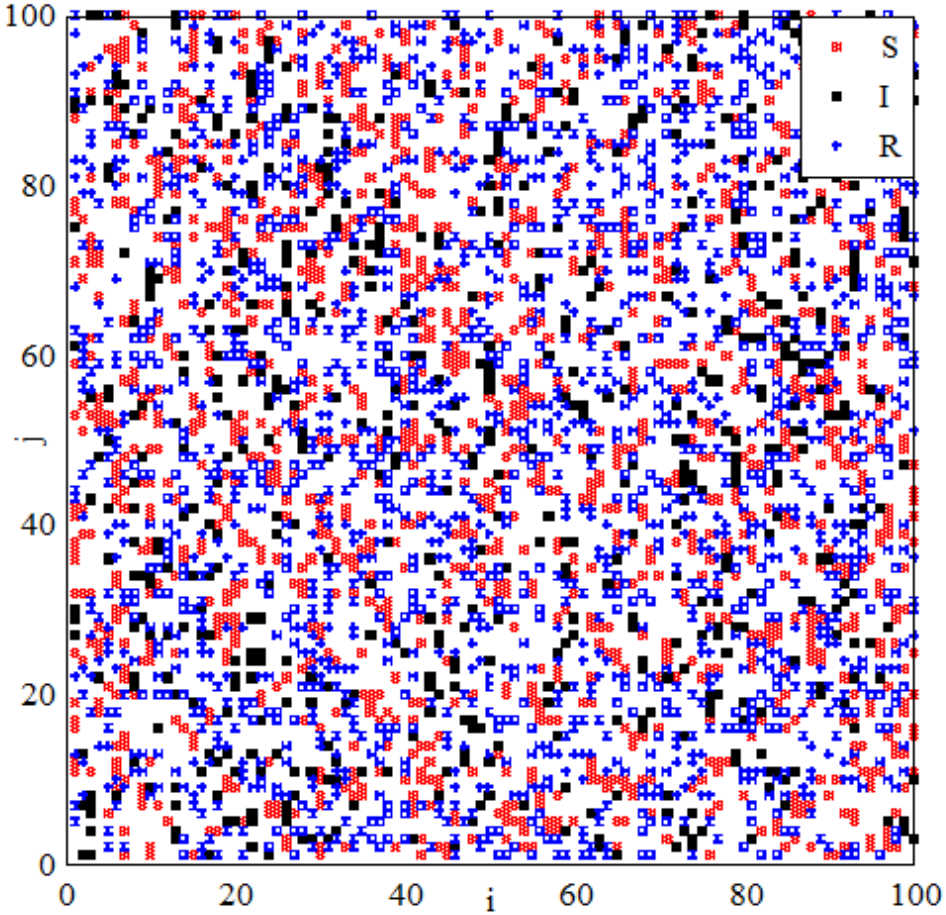
Глобальная миграция

$$X + Y \xrightarrow{P_m} Y + X$$

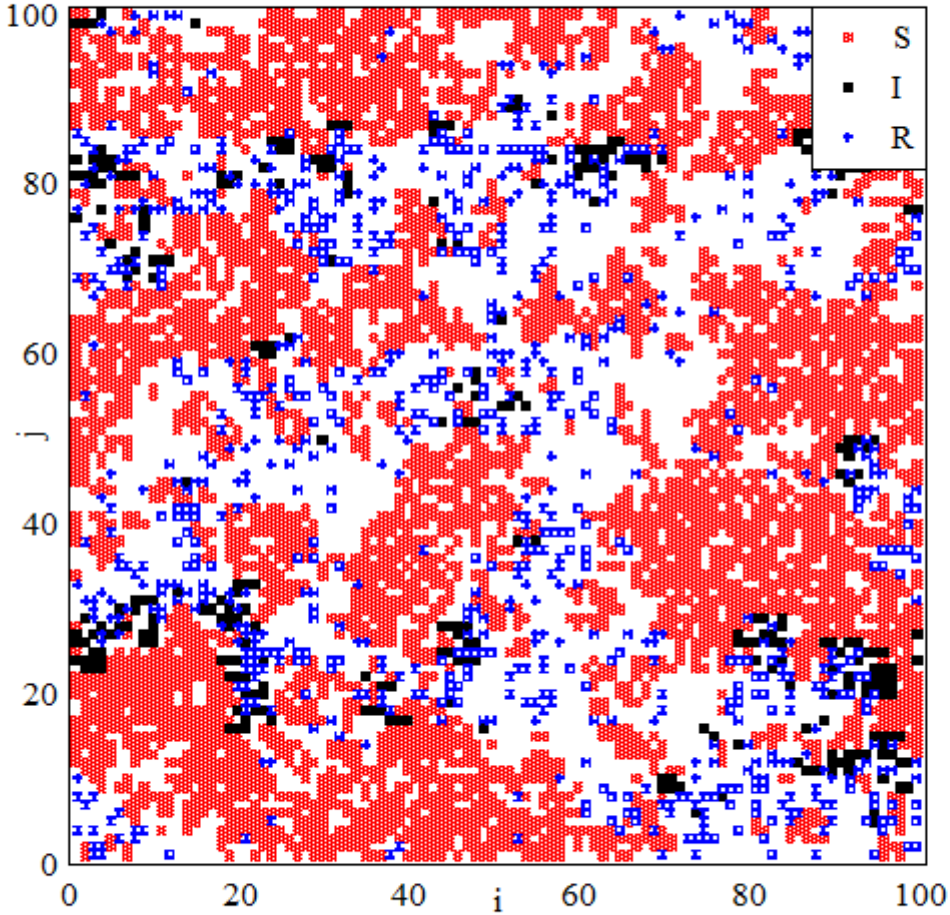


Динамика решетки клеточных автоматов для SIRS

Сильная миграция



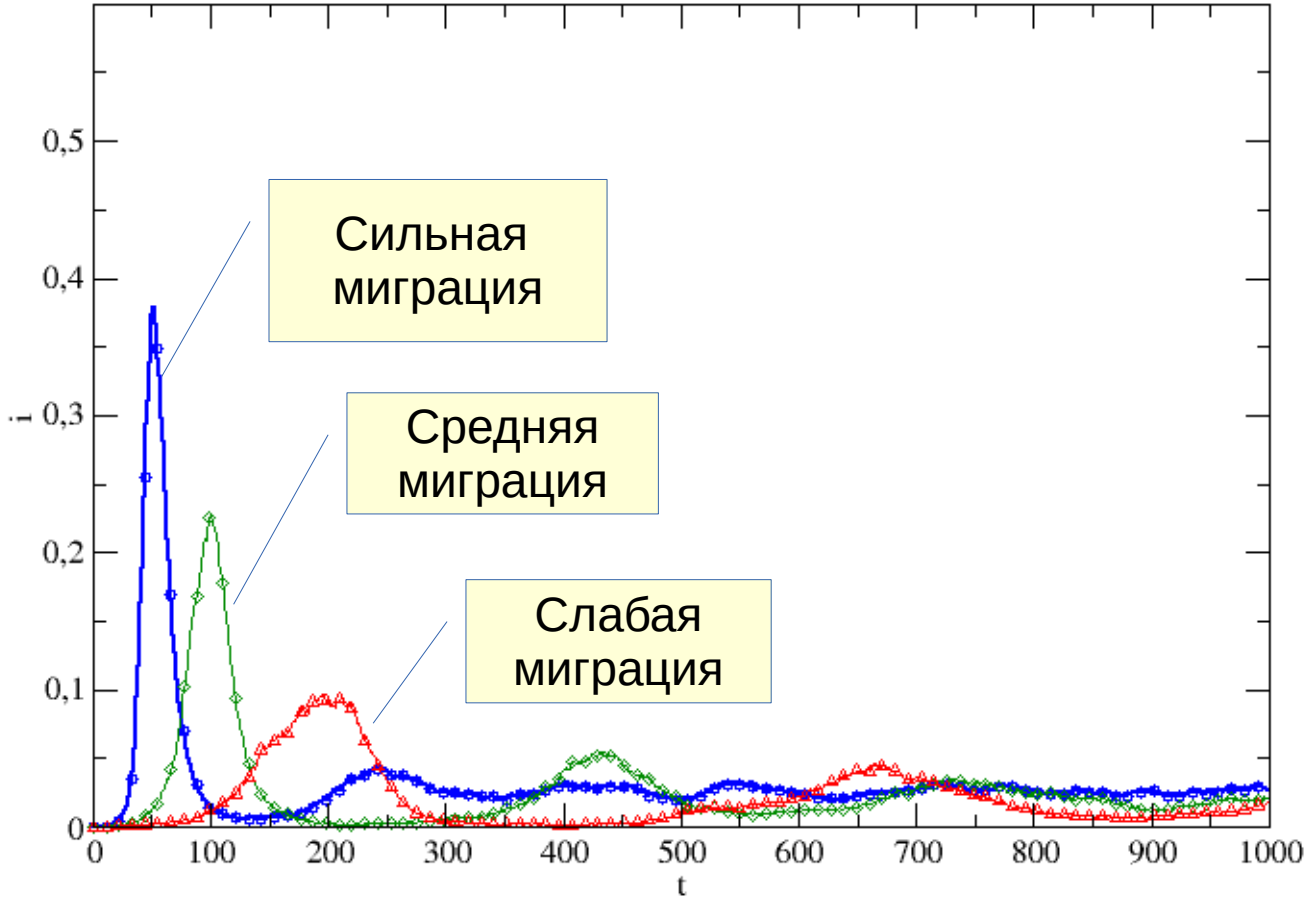
Слабая миграция



Временная динамика средних плотностей (концентраций)

$$s = \frac{N_S}{N}, \quad i = \frac{N_I}{N}, \quad r = \frac{N_R}{N}$$

Общее число клеток



1) Динамика РКА качественно совпадает с динамикой ОДУ.

2) При сильной миграции обе модели дают одинаковые количественные результаты

3) При слабой миграции модель РКА показывает существенно меньший уровень заболевания, чем ОДУ

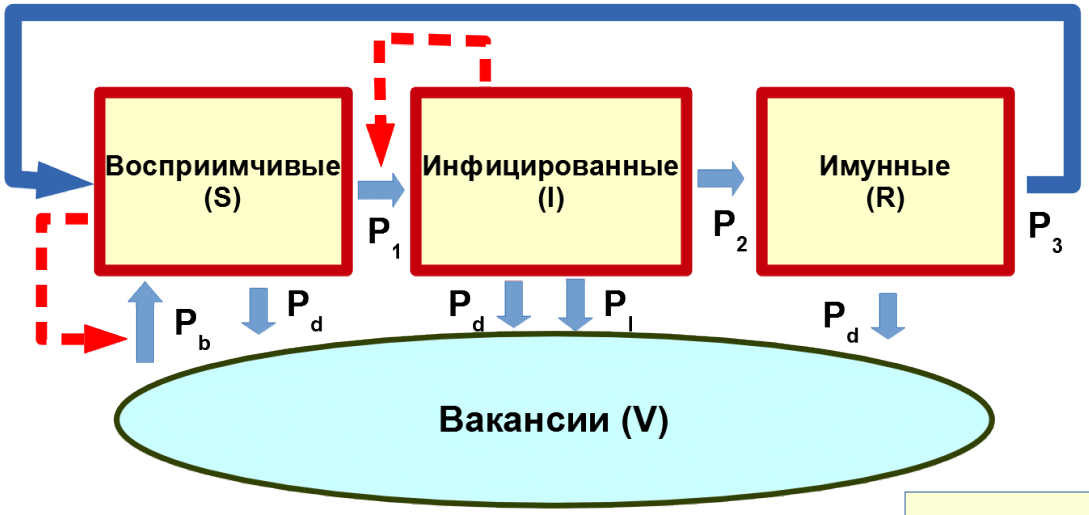
Классическая SIRS-модель позволяет:

- определить безопасную границу ($R_0 < 1$);
- определить установившийся уровень заражения;
- определить максимальный уровень заражения;
- выявить влияние вакцинации и миграции на максимальный уровень заражения

Усложненные SIRS модели

SIRS + процессы воспроизводства

набор состояний:
S, I, R, V



Трансформации состояний:

$$S + I \xrightarrow{P_1} 2I$$

$$I \xrightarrow{P_2} R$$

$$R \xrightarrow{P_3} S$$

Рождаемость

$$S + V \xrightarrow{P_b} 2S$$

Естественная смертность

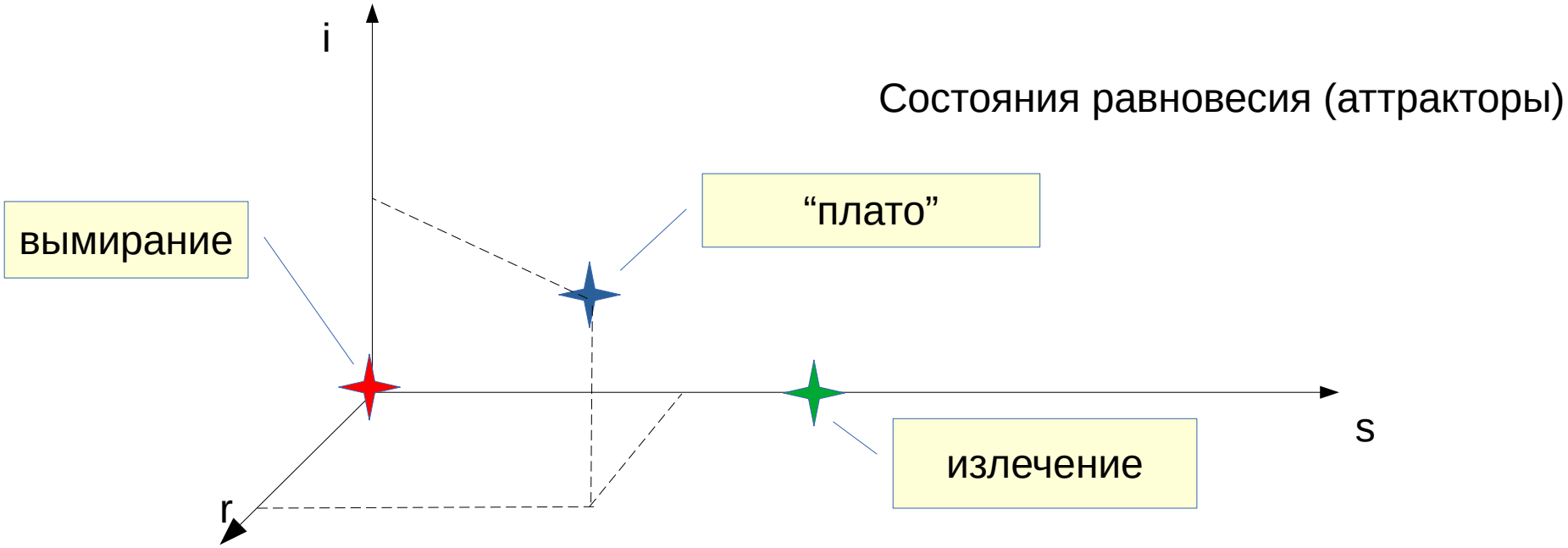
$$S, R, I \xrightarrow{P_d} V$$

Летальность заболевания

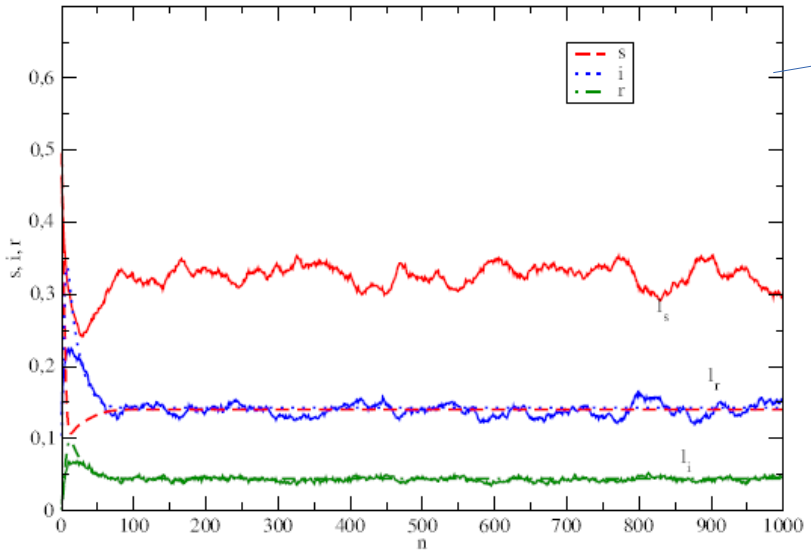
$$I \xrightarrow{P_l} V$$

ODE для модифицироанной SIRS

$$
\begin{aligned}
\dot{s} &= -p_1 s i + p_3 r + p_b s\left(1 - s - i - r\right) - p_d s \\
\dot{i} &= p_1 s i - \left(p_2 + p_d + p_l\right) i \\
\dot{r} &= p_2 i - \left(p_3 + p_d\right) r
\end{aligned}
$$

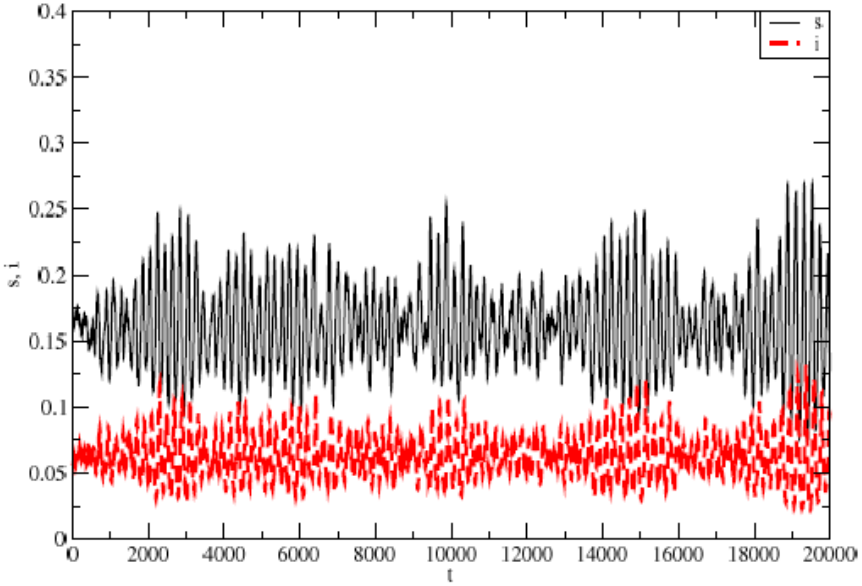


Временная динамика РКА

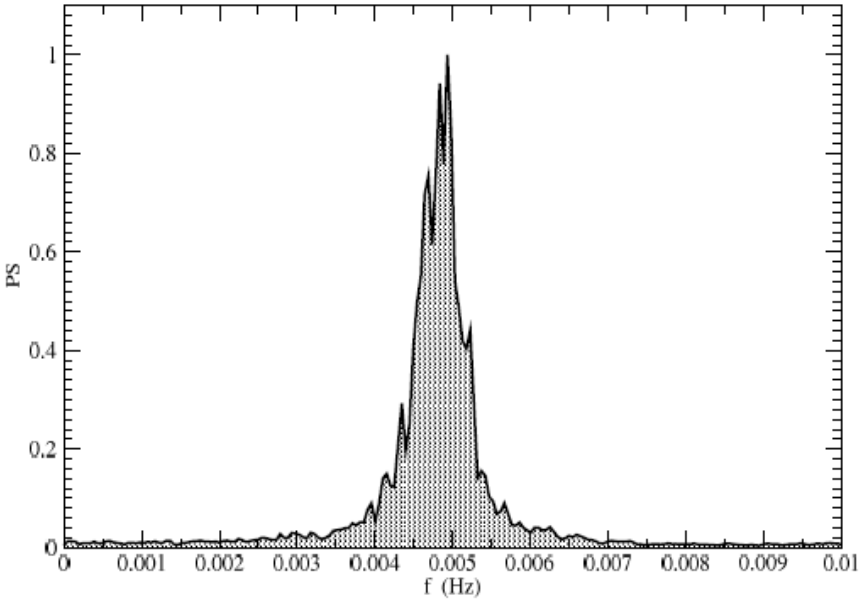


Стационарный режим

Колебательный режим



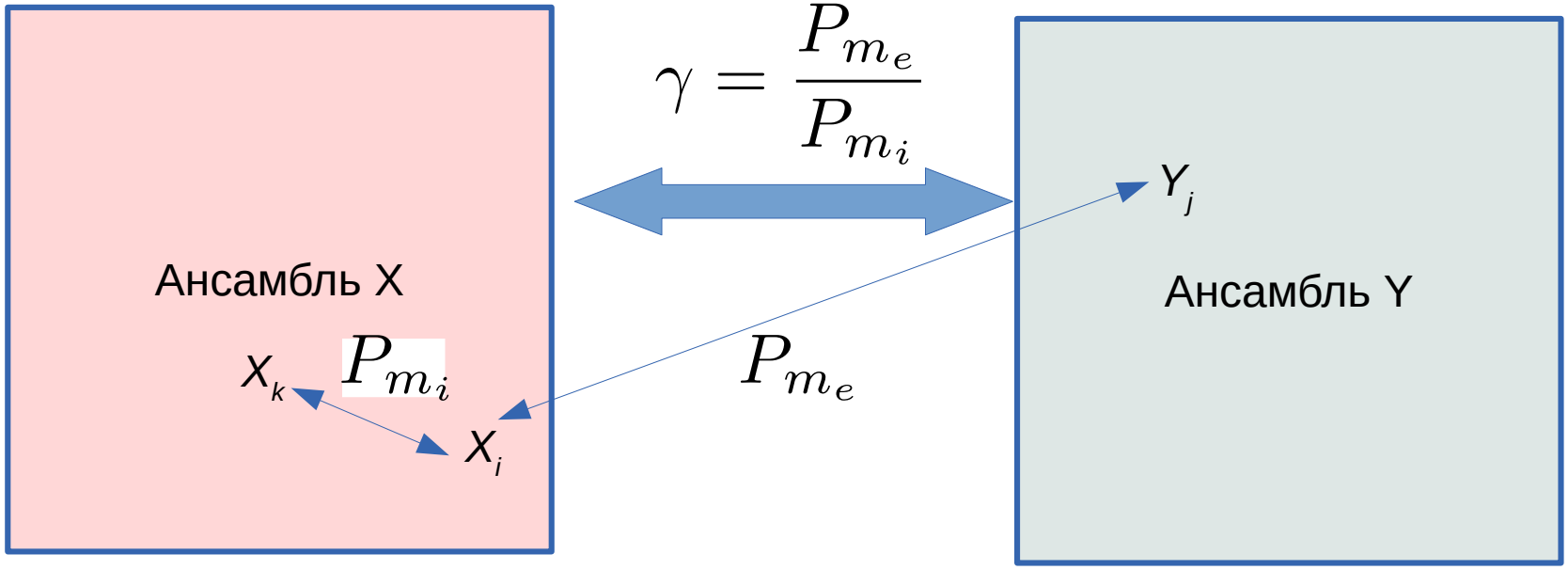
(a)



(b)

Взаимодействие между эпидемическими процессами в популяциях

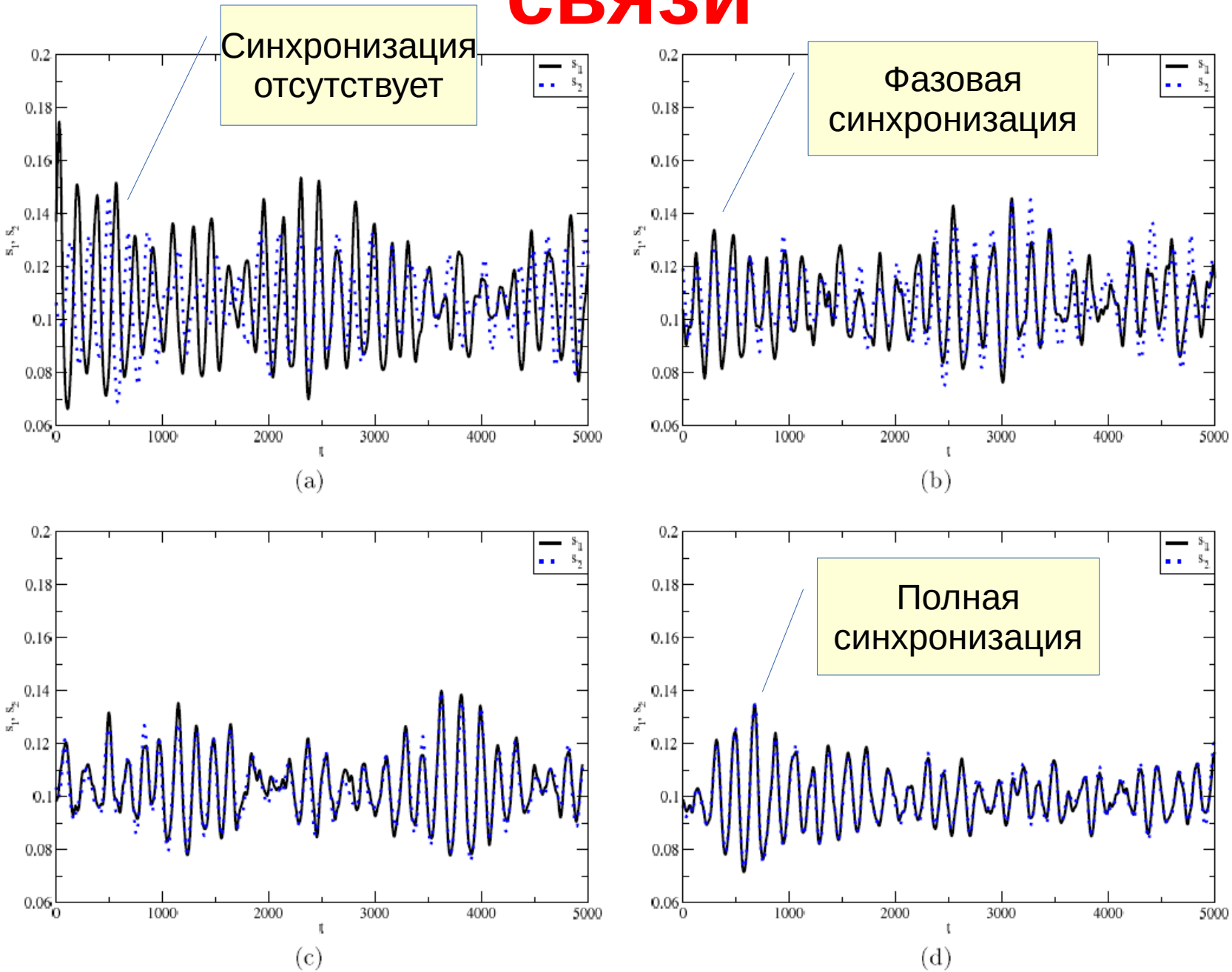
Взаимодействие через миграцию



P_{m_i} – вероятность внутренней миграции

P_{m_e} – вероятность внешней миграции

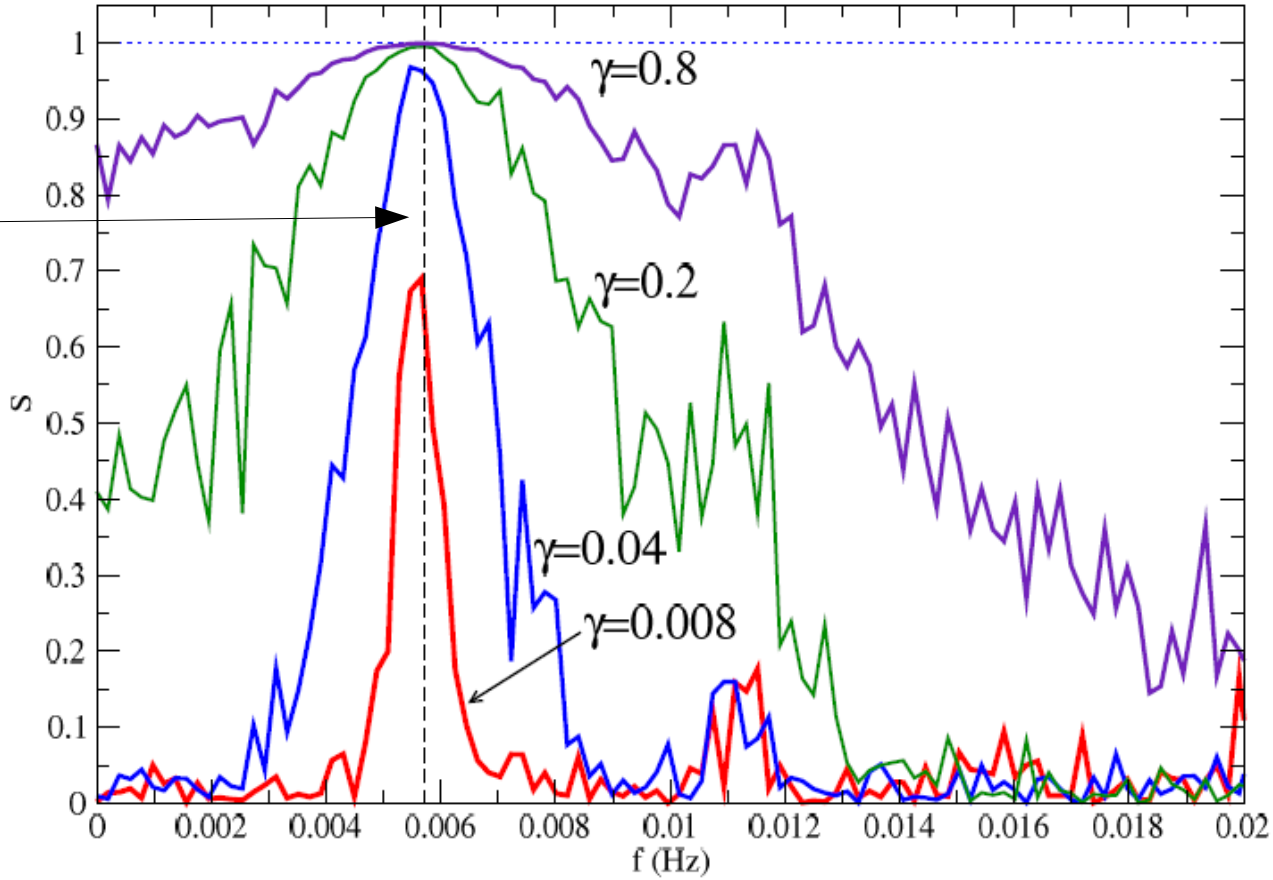
Подстройка колебаний с ростом связи



Изменение взаимной когерентности колебаний

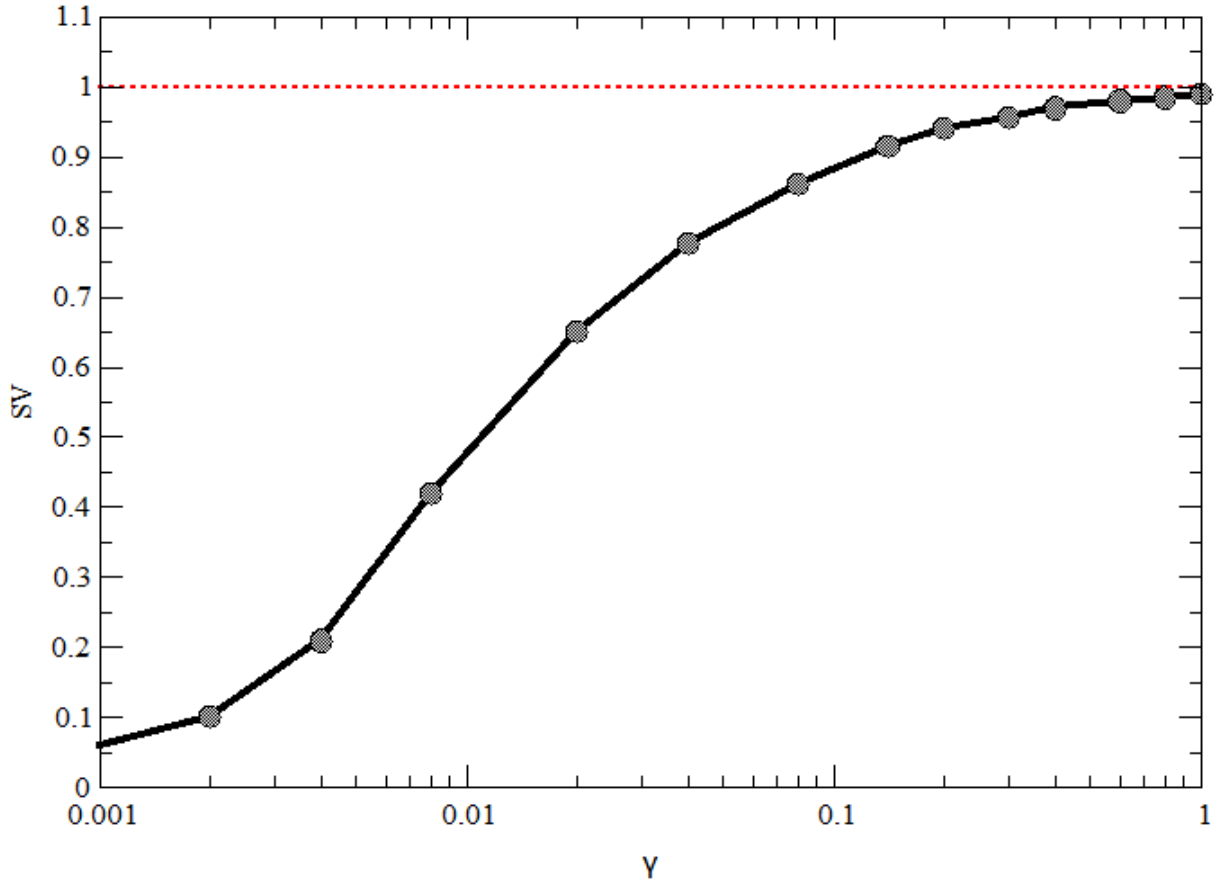
$$S(f) = \frac{|\langle F_1(f) F_2^*(f) \rangle|}{\langle |F_1(f)| \rangle \langle |F_2(f)| \rangle}$$

Базовая частота спектра



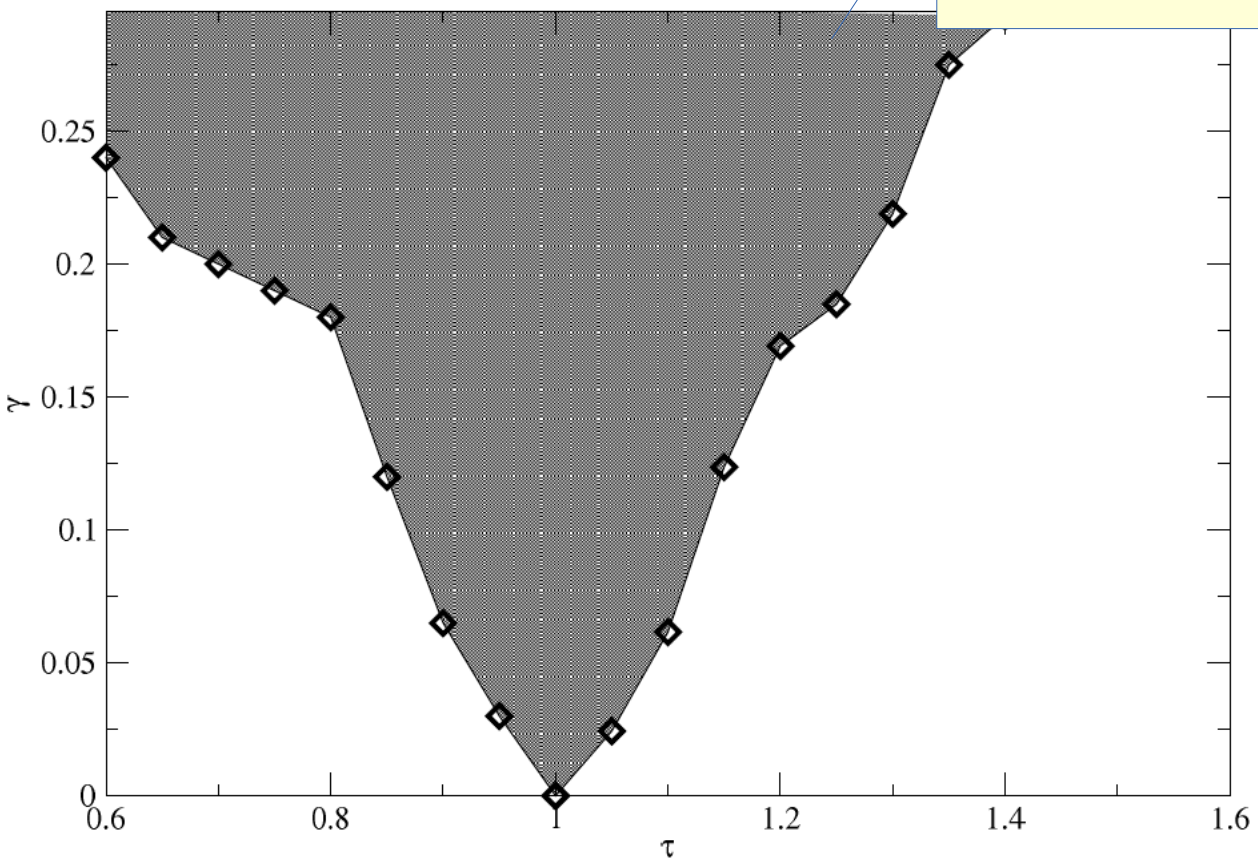
Рост синхронизации с увеличением связи

$$SV = \frac{\int_0^\infty S(f)\left(PS_1(f) + PS_2(f)\right) df}{\int_0^\infty \left(PS_1(f) + PS_2(f)\right) df}$$



“Язык” синхронизации

Область, где “периоды” колебаний совпадают



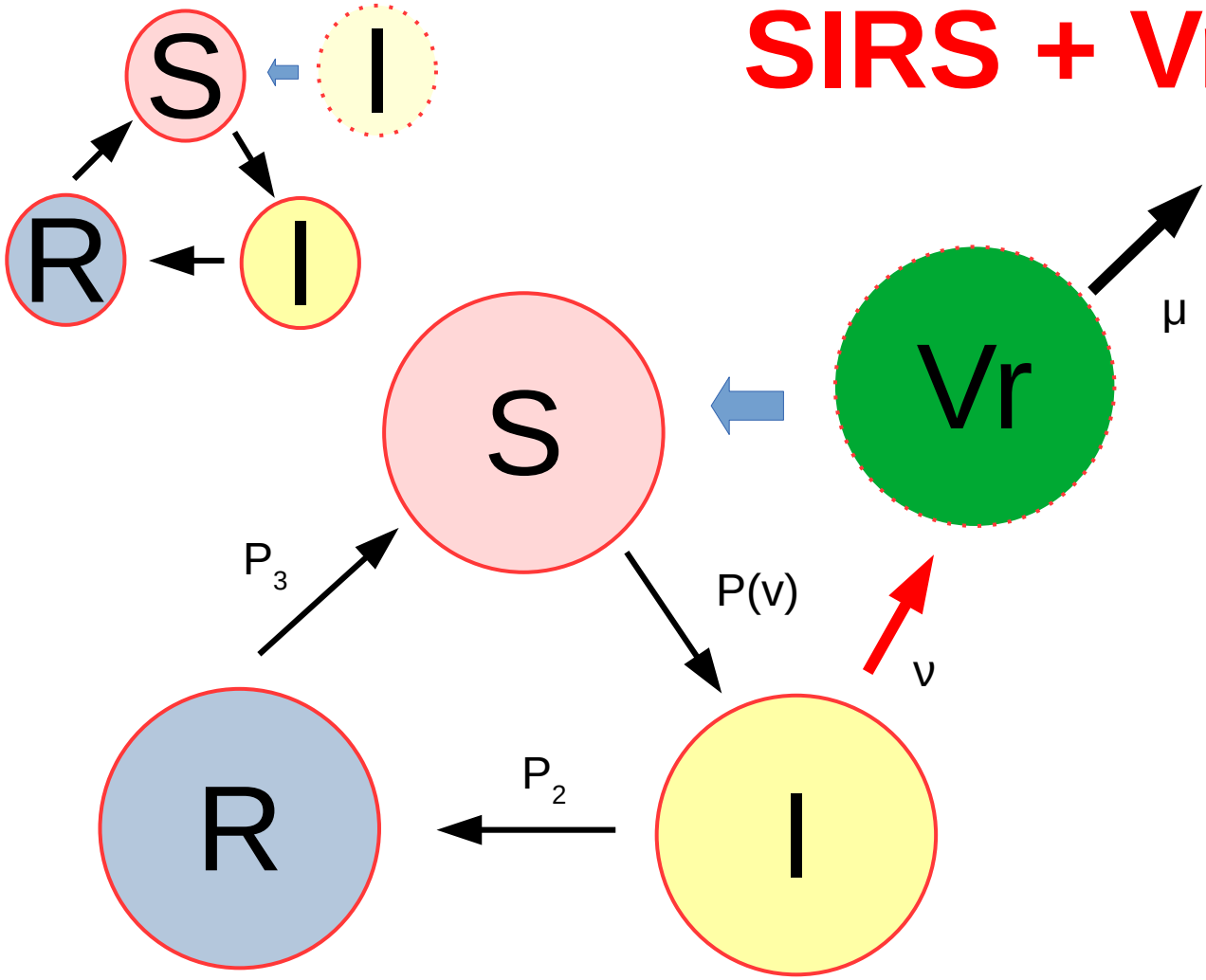
Расстройка
по
масштабу времени

Модифицированная SIRS-модель:

- демонстрирует режим незатухающих колебаний;
- демонстрирует явление синхронизации сложных колебаний во взаимодействующих популяциях;
- синхронизация при слабой связи проявляется в эффекте захвата фазы на базовой частоте спектра – (фазовая синхронизация);
- с ростом связи наблюдается плавный переход к режиму полной синхронизации;
- при расстройке по параметрам наблюдается эффект подстройки базовых частот в спектрах колебаний. С ростом связи наблюдается сближение средних периодов колебаний, завершающееся их выравниванием.

Гибридная SIRS+Vr модель

SIRS + Vr



Трансформации состояний:

$$
\begin{aligned}
I &\rightarrow I + \nu V_r \\
S + V &\xrightarrow{P(v)} I + V_r \\
I &\xrightarrow{P_2} R \\
R &\xrightarrow{P_3} S \\
V_r &\rightarrow (1-\mu)\, V_r
\end{aligned}
$$

Вероятность заразиться при концентрации вирусов v:

$$P(v) = \left(1 - (1 - P_1)^v\right) = 1 - \exp\left(-\alpha v\right)$$

где:

$$\alpha = -\ln\left(1 - P_1\right)$$

ODE для SIRS+Vr

$$\begin{aligned}\dot{i} &= (C - i - r)\left(1 - \exp\left(-z\right)\right) - P_2 i \\ \dot{r} &= P_2 i - P_3 r \\ \dot{z} &= \sigma i - \mu z\end{aligned}$$

$$\boxed{z = \frac{v}{\alpha}} \quad \boxed{\sigma = \frac{\eta}{\alpha}}$$

Состояния равновесия (аттракторы)

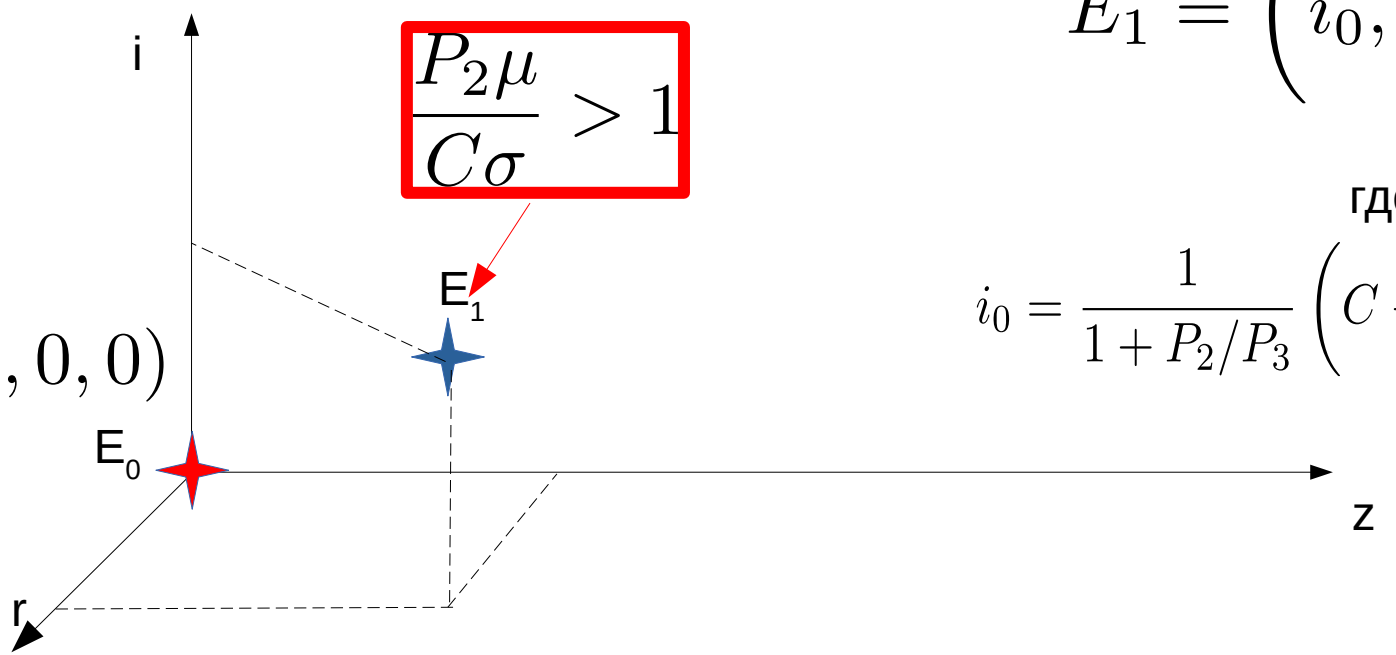
$$E_1 = \left(i_0, \frac{P_2}{P_3} i_0, \frac{\sigma}{\mu} i_0\right)$$

$$\boxed{\frac{P_2 \mu}{C \sigma} > 1}$$

где:

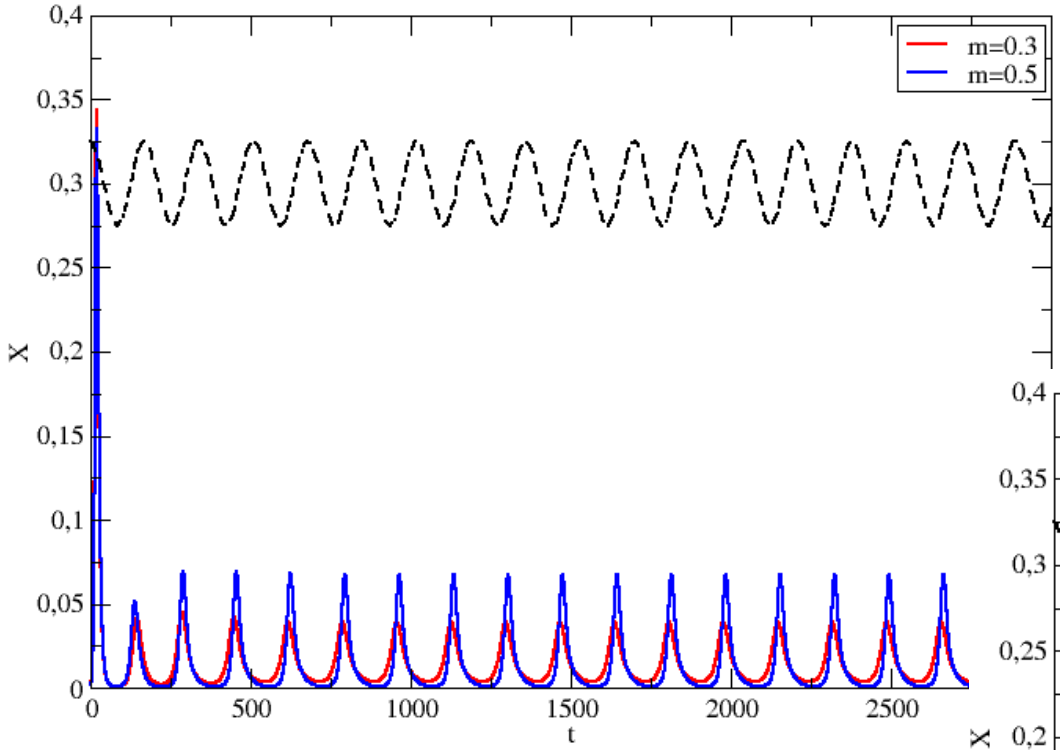
$$i_0 = \frac{1}{1 + P_2/P_3}\left(C - \frac{P_2 i_0}{1 - \exp\left(-\sigma i_0/\mu\right)}\right)$$

$$E_0 = (0, 0, 0)$$

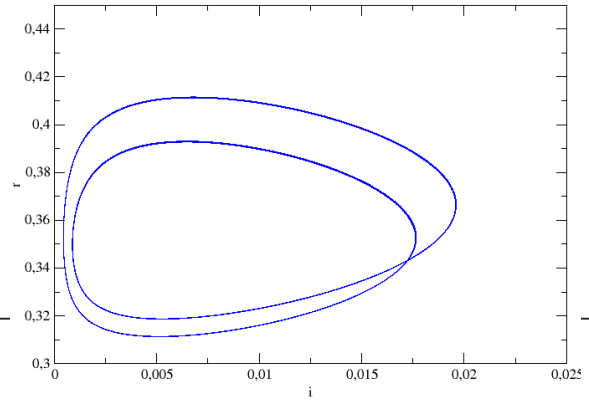


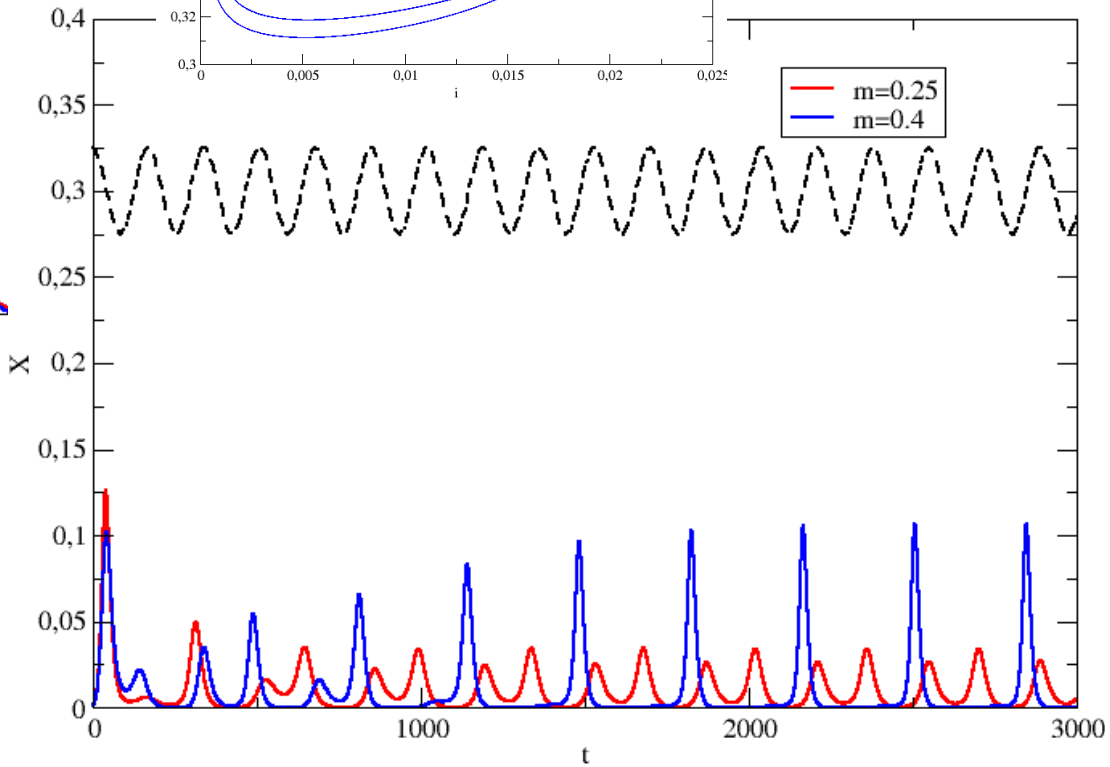
Учет сезонности

$$\mu(t) = \mu_0 \left(1 + m \cos\left(2\pi f t\right)\right)$$



Удвоение периода:

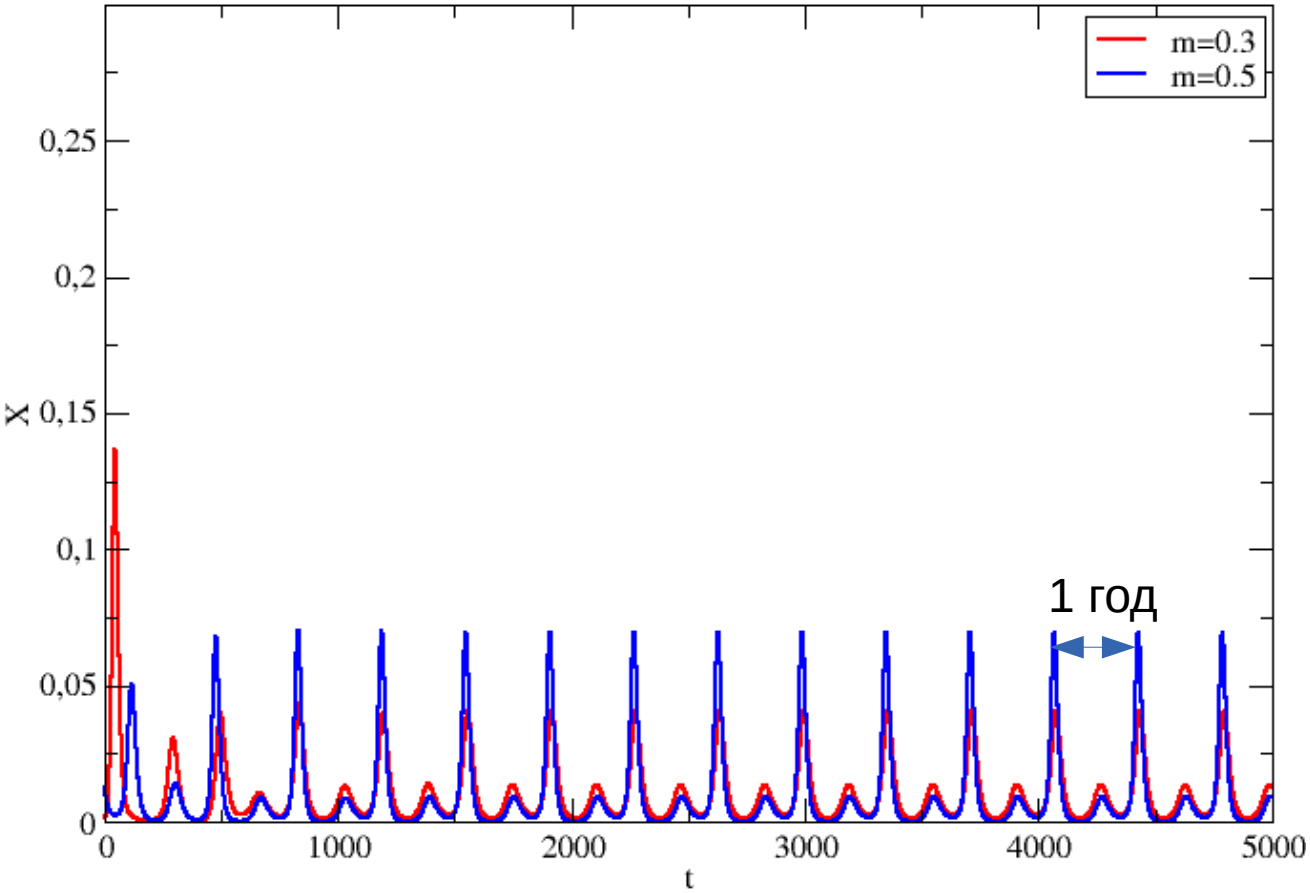




Нелинейная функция модуляции

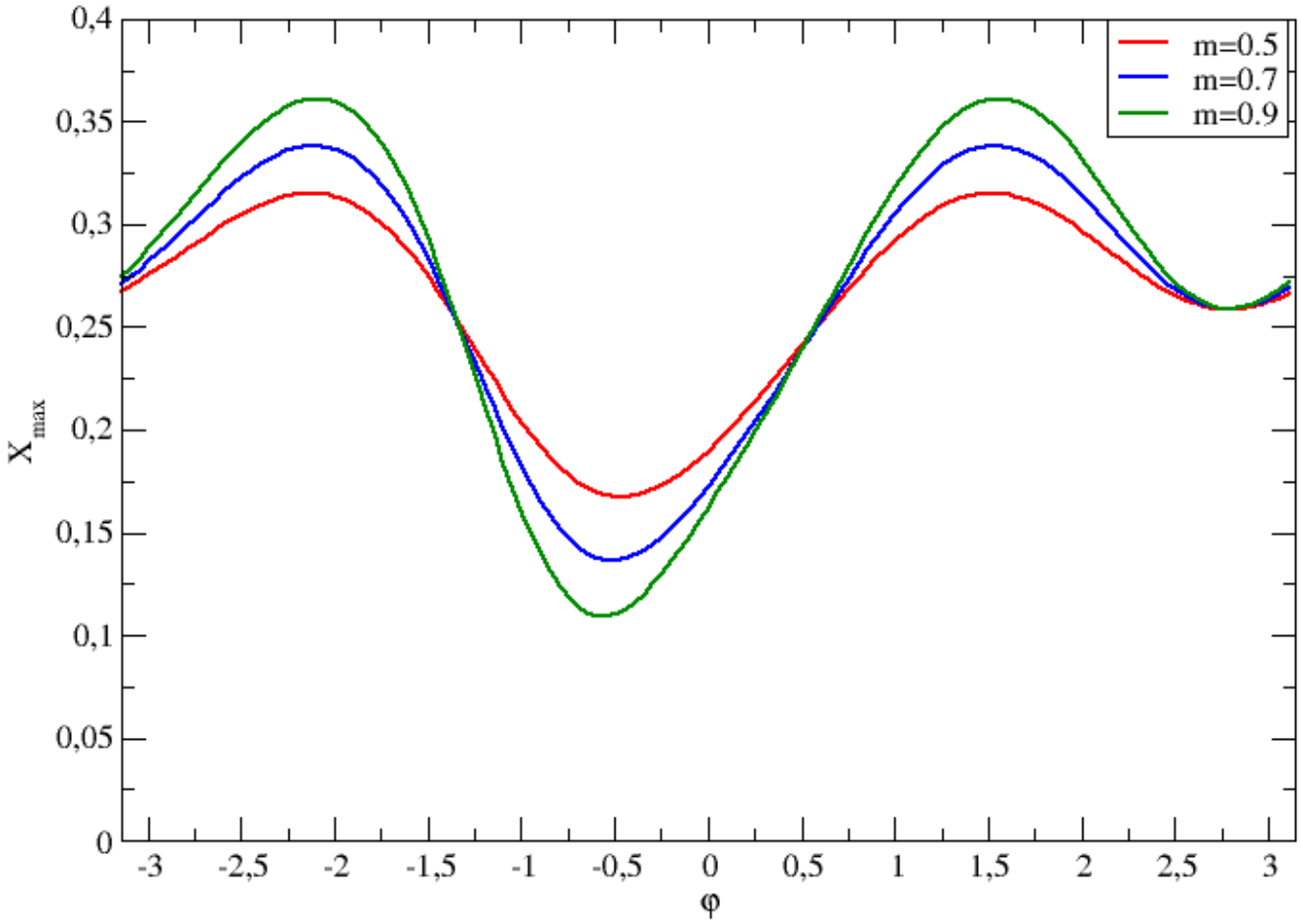
$$\mu(t) = \mu_0 \left(1 + mF\left(\cos\left(2\pi f t\right)\right)\right)$$

$$F(x) = ax^2 + bx + c$$



Влияние сезонного фактора на начало заражения

$$\mu(t) = \mu_0 \left(1 + m \cos\left(2\pi f t + \varphi\right)\right)$$



SIRS+Vr модель

- демонстрирует динамику, характерную для развития эпидемических процессов, наблюдаемых в природных популяциях.

- Учет климатических факторов ведет к периодически повторяющимся вспышкам заболевания, которые могут происходить как ежегодно, так и с удвоенной частотой (сезонные вспышки респираторных инфекций), а также – с половинной частотой (двухгодичные вспышки заболевания некоторых инфекций) воздействия