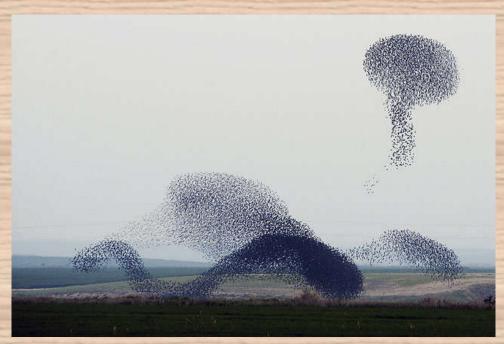
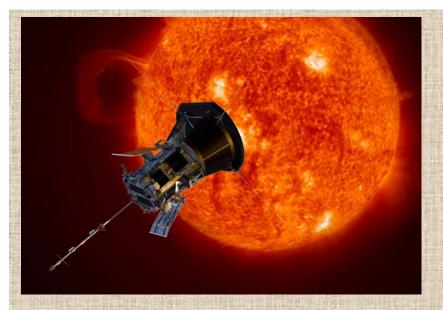


Н.Г. МАКАРЕНКО ГАО РАН, Санкт-Петербург

ТОПОЛОГИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ДАННЫХ



Нелинейные дни в Саратове для молодых – 2023»



NASA: Parker Solar Probe 12.08.18

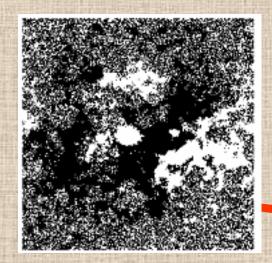
Когда бы смертным столь высоко Возможно было возлететь, Чтоб к Солнцу бренно наше око Могло, приближившись, воззреть, Тогда б со всех открылся стран Горящий вечно Океан.



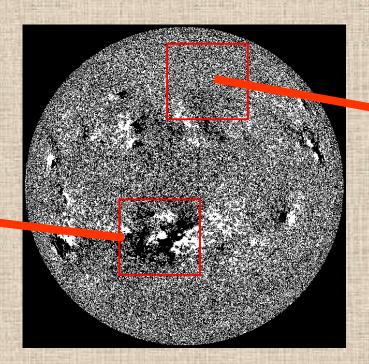


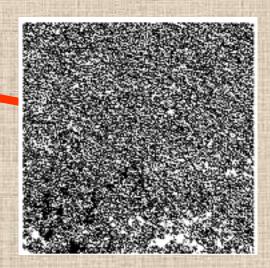
Михаил Ломоносов 1711 - 1765

ПЯТНА И АКТИВНЫЕ ОБЛАСТИ СОЛНЦА



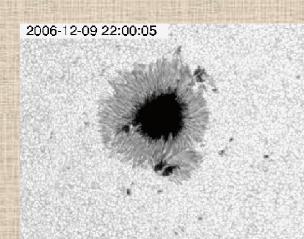
Активная область

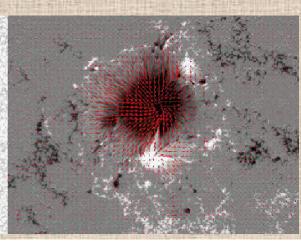




Фоновое поле

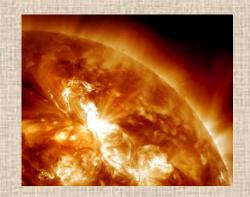






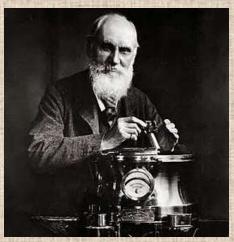
СОЛНЕЧНЫЕ ВСПЫШКИ







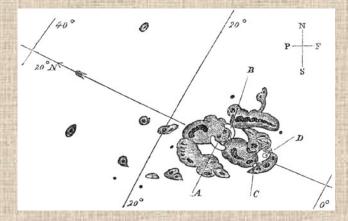
Одна мощная вспышка - 160 млрд мегатонн в тротиловом эквиваленте.



Solar Superstorm

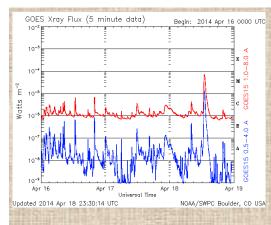
Dst

-1760нТл -900нТл



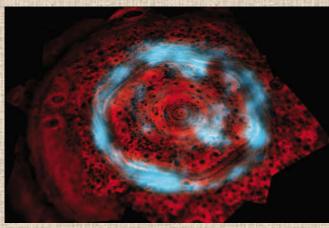
Ричард Кристофер Кэррингтон (1826-1875) г.

Рисунок Кэррингтона 1.09.1859



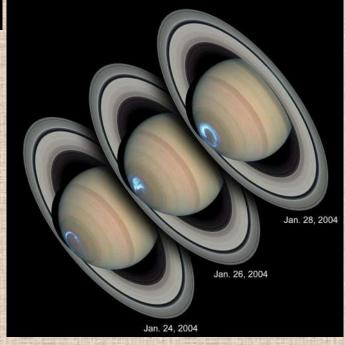
ЭХО СОЛНЕЧНЫХ БУРЬ В СОЛНЕЧНОЙ СИСТЕМЕ











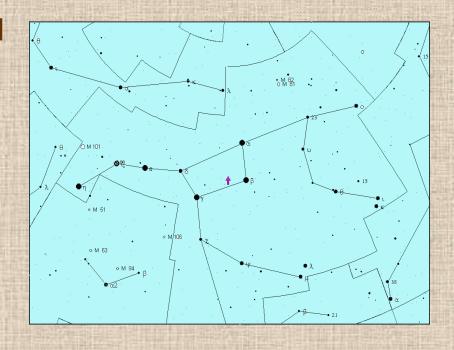
ГРАФЫ И ФОРМЫ НА ЗВЕЗДНОМ НЕБЕ





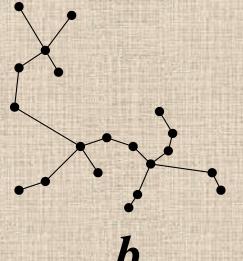
Минимальное Остовное Дерево (МОД) и

Созвездия



$$\sum_{i} l_{i} = \min, \ \forall i, k \ P_{i} \neq P_{k}$$





a

Каналы Марса



Джованни Скиапарелли (1835-1910)





МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ КАНАЛОВ МАРСА И ϵ - ЦЕПЬ КАНТОРА

IFS:
$$w_1 = (1/3)x$$
, $w_2 = (1/3)x + (2/3)$.

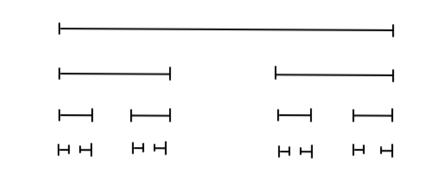
$$\mathbf{w} = w_1 \cup w_2$$
. $\mathbf{w}^{\circ n} = \mathbf{w} \circ \mathbf{w}^{\circ n-1}$.

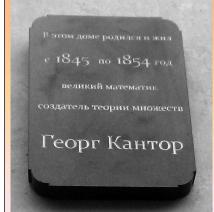
Aттрактор IFS:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{w}^{\circ n}(B) = K, \mathbf{w}(K) = K$$



Георг Кантор (1845-1918)





пространство $X=U\cup V$, ϵ - несвязно, если

$$d(U,V) = \inf_{x \in U, y \in V} d(x,y) \ge \varepsilon$$

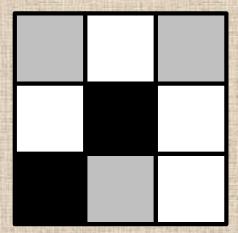
Мера для цифрового изображения

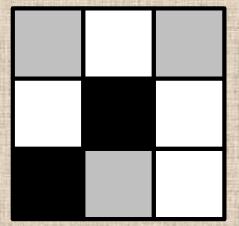


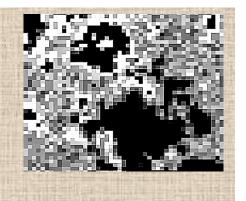
Gustave Choquet (1.03.1915-14.11.2006)

Емкости Шоке:

$$A \subseteq B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$$







$$|p(i)-p(j)| \le \delta \Rightarrow p(i) \sim p(j)$$

$$\mu_{iso} = \#\{j | p(j) \sim p(i_{center})\}$$

$$\mu_{\text{max}} = 255,$$

$$\mu_{\text{min}} = 25,$$

$$\mu_{iso} = 2 \left(\delta = 2 \right)$$

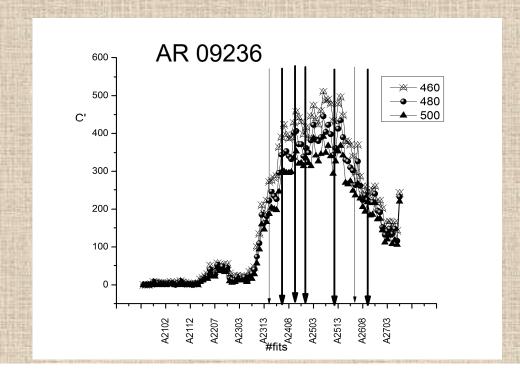
ε — СВЯЗНОСТЬ ДЛЯ ЕМКОСТИ ШОКЕ

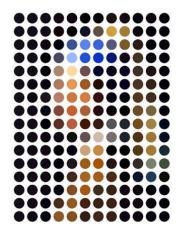
(Князева И.С., Макаренко Н.Г., Лифшиц М.А., Астрон. журн. 88, 503 (2011).)



$$\mu_{iso}(\varepsilon) = \# \{ j | p(j) \sim p(i_{center}) \}$$

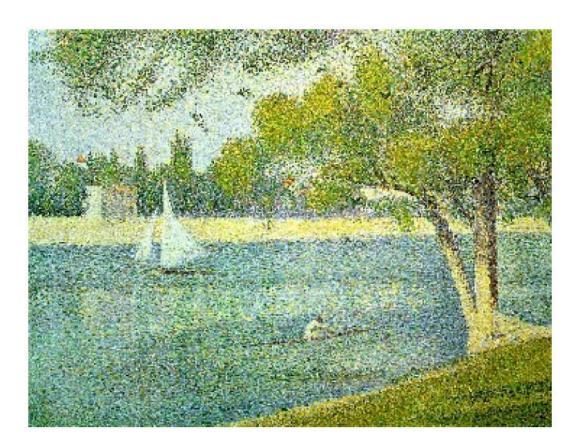
$$C = \frac{\log \mu_{iso}(\varepsilon)}{\log(\varepsilon)}$$





ПУАНТИЛИЗМ или как интерпретировать облако точек



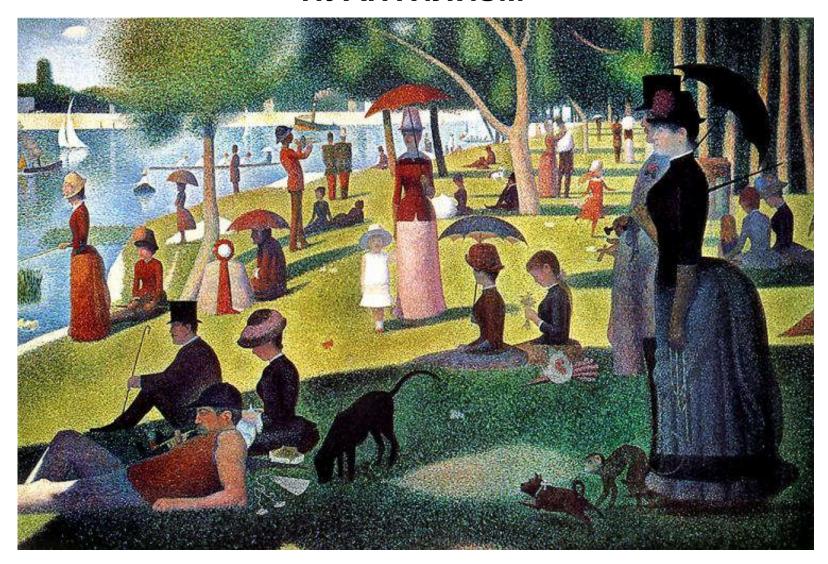




Жорж-Пьер Сёра(1859-1891), Сена у острова Гранд Жатт весной (1887)



ПУАНТИЛИЗМ



Жорж-Пьер Сёра(1859-1891), Воскресный день на острове Гранд-Жатт, 1884-1886

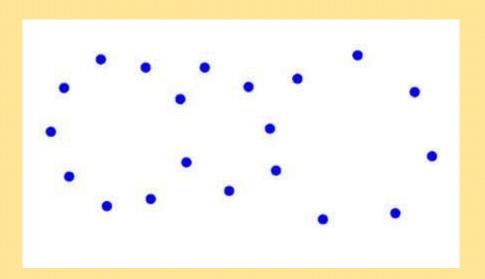


— Знаешь, что, Вася? Поедем! Накажи меня Господь, поедем!

Ведь Париж, заграница... Европа!

- Чего я там не видел? Ну его!
- Цивилизация! продолжал восторгаться Лампадкин.
- Господи, какая цивилизация! Виды эти, разные Везувии... окрестности! Что ни шаг, то и окрестности! Ейбогу, поедем!

(А.Чехов, в Париж!)



ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ



Якоб Штейнер (1796-1863)г.

ФОРМУЛА ШТЕЙНЕРА В R^2 $S(K_{\varepsilon}) = a^2 + 4a\varepsilon + \pi\varepsilon^2 =$

$$S(K_{\varepsilon}) = a^{2} + 4a\varepsilon + \pi\varepsilon^{2} =$$

$$= W_{0} + W_{1}\varepsilon + W_{2}\varepsilon^{2}$$

W_i – Функционалы Минковского

$$W_0(K) = a^2 - n$$
лощадь K

$$W_1(K) = 4a - nepumemp K$$

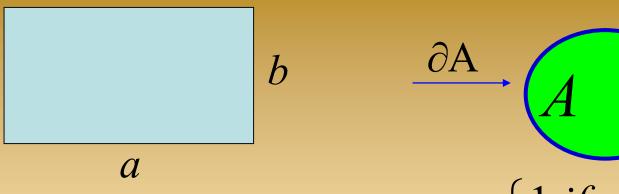
$$W_2(K) = \pi \chi, \chi - x ap a к m e p u c m u к a Э й л e p a$$

$$\chi$$
 =1 χ \times =0

$$\chi\left(\bullet\bullet\right) = \chi\left(\bullet\right) + \chi\left(\bullet\right) - \chi\left(\bullet\right) = 1 + 1 - 1 = 1$$



ЧТО МОЖНО ИЗМЕРИТЬ В КОЛЬЦЕ ВЫПУКЛОСТИ?



$$a+b=1/2P$$
$$ab=S$$

$$\mathfrak{I}_{A}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \text{if } \mathbf{x} \in A \\ 0, & \text{if } \mathbf{x} \notin A \end{cases}$$



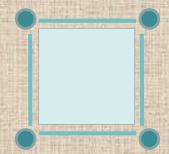
$$\int_{A} \mathfrak{I}(\mathbf{x}) dx dy = area \text{ (A)}$$

$$\int_{A} |\nabla \Im(\mathbf{x})| dx dy = \text{length } (\partial A)$$

Леонард Эйлер (1707-1783)

ХАРАКТЕРИСТИКА ЭЙЛЕРА

χ = #(вершины) - #(ребра) + #(грани)

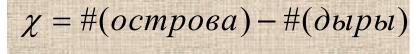


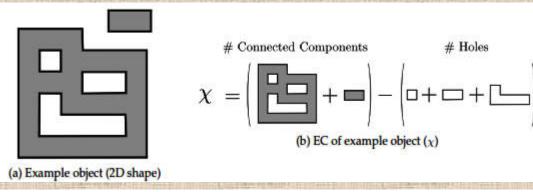
$$\chi(A) = 4(B) - 4(P) + 1(\Gamma) = 1$$



$$\chi = 0$$

χ – гомотопический инвариант







ГРАФЫ: G = (V, E)



Леонард Эйлер 1707–1783

.....базовый объект — граф — может быть объяснён и понят за пять минут.... Совершенно не обязательно читать много литературы перед тем, как приступить к решению конкретной задачи — важно знать некоторые базовые техники, но интересные проблемы остаются нерешёнными как раз потому, что эти техники к ним применить не удаётся.





Уильям Тимоти Гауэрс

Морфологические валюации

$$\phi: \phi(B) \to R, B \in B$$

$$\phi(B_1) + \phi(B_2) = \phi(B_1 \cup B_2) + \phi(B_1 \cap B_2)$$



Хьюго Хадвигер 1908-1981г.

• G-Инвариантность

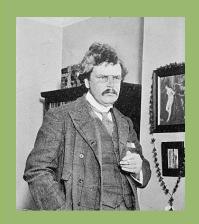
$$\phi(gK) = \phi(K)$$
 $g \in G$

•С-непрерывность

$$\lim_{l\to\infty} B_l = B \Longrightarrow \lim_{l\to\infty} \phi(B_l) = \phi(K)$$







Гилберт Кийт Честертон (1874-1936)

Универсальная палка

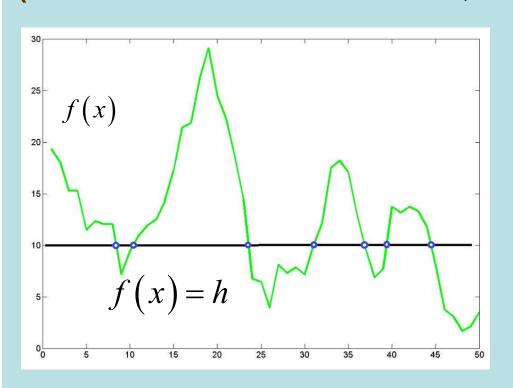
С помощью палки человек может передвигаться, а может, наоборот, сбить с ног своего ближнего. Палкой пользуются как указкой, она помогает держать равновесие, выступает в роли той безделушки, которую приятно вертеть в руке, принимает вид смертоносного оружия. Палка — это дубинка и костыль, удлиненная рука и запасная нога.

и фильтрация



Индикатриса Банаха и формула коплощади

(Banach S., Fundam, mathem, 1925, t.7, 225)





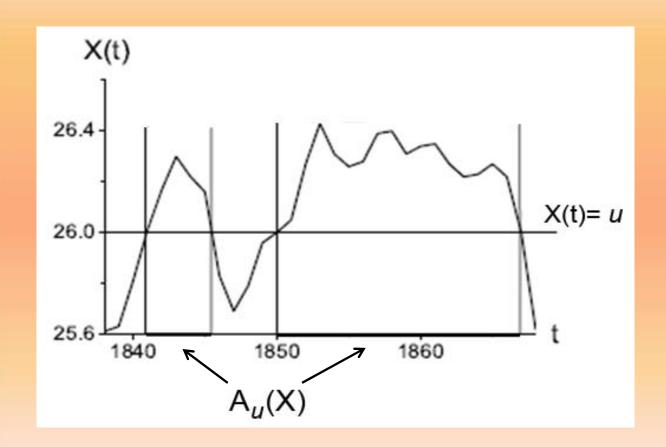
Stefan Banach (1892-1945)

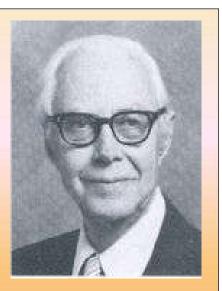
$$N(f,h) = \#\{f^{-1}(h)\}$$

$$||f||_V = \int_{-\infty}^{+\infty} N(f,h) dh$$

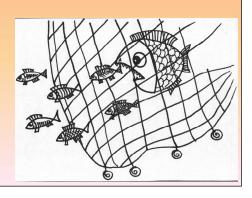
ВЫБРОСЫ СЛУЧАЙНОЙ ФУНКЦИИ

(Bell System Technical J. 23, 1944, 282; 24, 1945, 46)

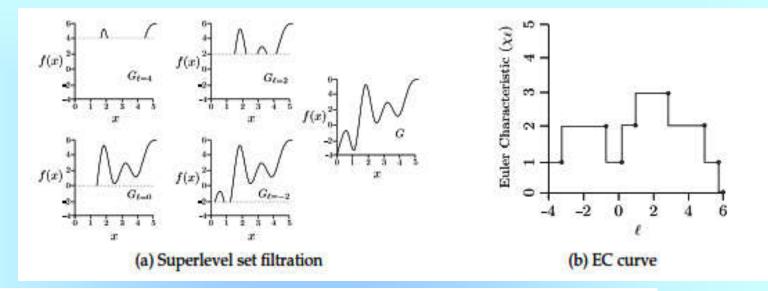


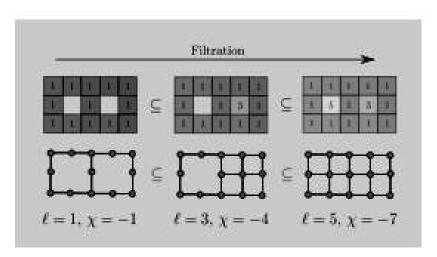


Stephen O. Rice (1907 – 1986)

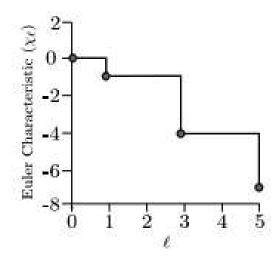


Фильтрация графиков изображений

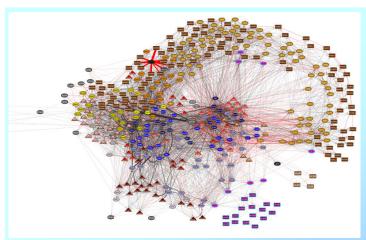




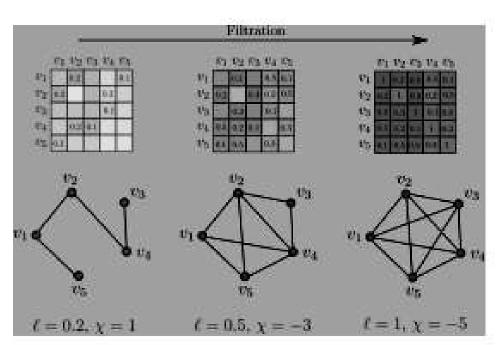
(a) Filtration of node-weighted graph (image).



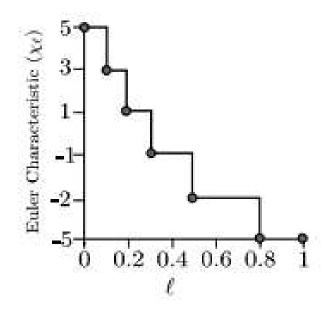
(b) EC Curve for the graph filtration.



Фильтрация корреляционной матрицы

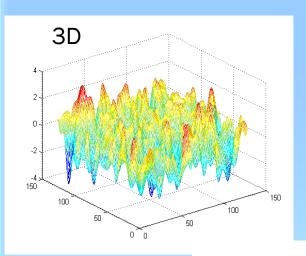


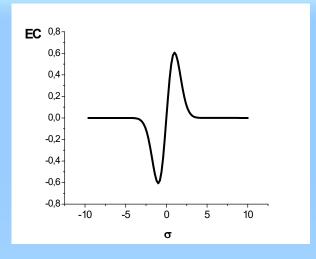
(a) Edge weighted graph filtration.



(b) EC Curve for the graph filtration.

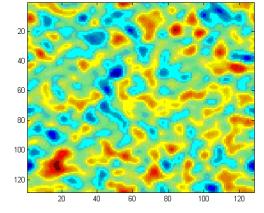
ГАУССОВЫ ПОЛЯ





$$EC_{\beta}(h) = \sqrt{2\pi}\beta^2 h \exp(-\frac{1}{2}h^2)$$

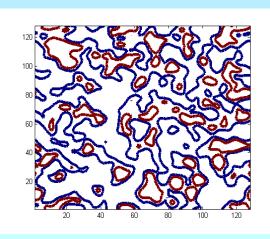
2D



$$\beta = \sqrt{\frac{C(0)}{-C''(0)}}$$

 $C(\tau)$ – автокорреляционная функция

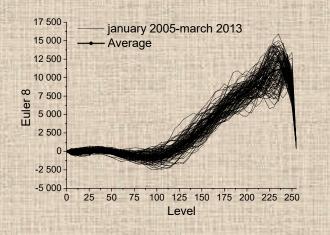


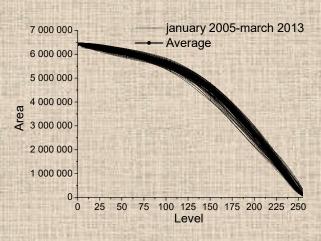


•ФРАКТАЛЬНЫЕ И ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ДЛЯ ОБРАБОТКИ ЦИФРОВЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Институт Проблем Информатики и Управления МОН РК, Алматы Макаренко Н., Волобуев Д., Уртьев Ф., Лукьянова Р. (НИИ Арктики и Антарктики)



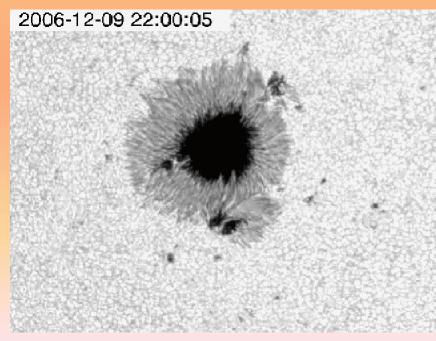


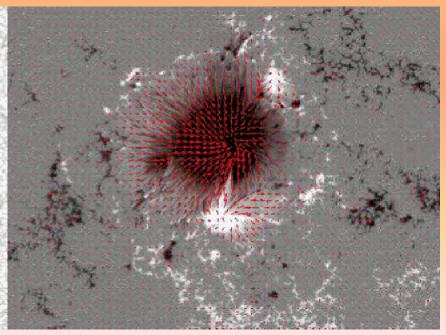


Морфология Магнитных Полей Солнца

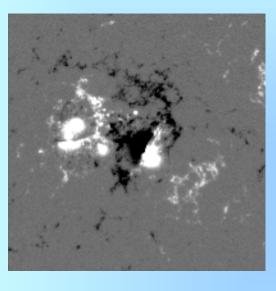


Helioseismic and Magnetic Imager (HMI/SDO) ~500 km/pix

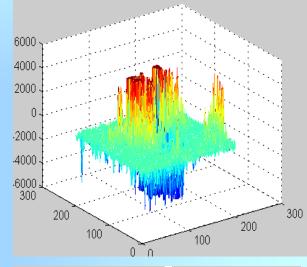


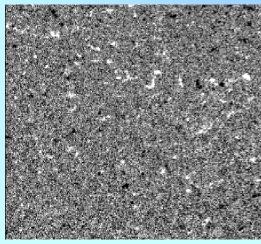


СЛУЧАЙНЫЕ ПОЛЯ НА СОЛНЦЕ

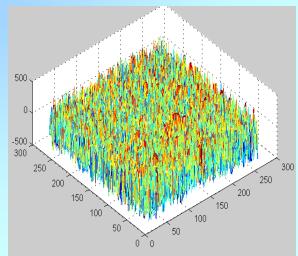


AO



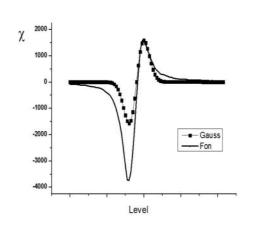


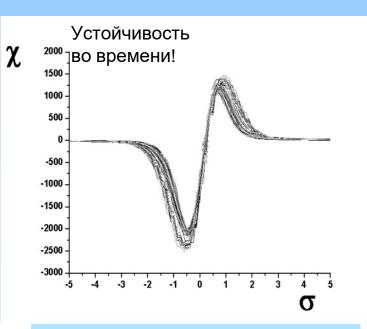
ФОН

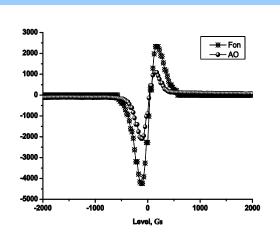


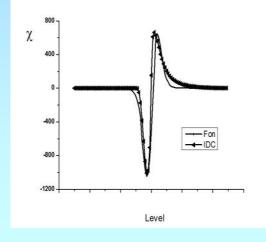
CÍLAKLABO UOUA: XOBORLEBNOLNRO

ЭИЛЕРА

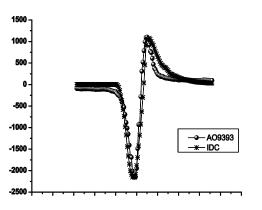








Поля фона и АО одинаковы и описываются логнормальным законом!



IDC (Infinitely Divisible Cascades) P. Chainais, R. Riedi, P. Abry. (2003)

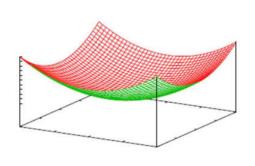
Лемма Морса

Для z = f(x, y) точка $p_0 = (x_0, y_0)$ критическая если

$$\nabla f \Big|_{p_0} = 0$$
 Точка p_0 -Морсовская, если $\det H_f(p_0) \neq 0$

В окрестности такой точки f можно представить в форме

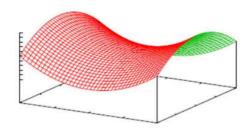
$$f = -X_1^2 - X_2^2 - \dots - X_{\lambda}^2 + X_{\lambda+1}^2 + \dots + X_d^2 + c$$



Minima

$$x^{2} + y^{2}$$

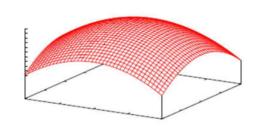
$$\lambda = 0$$



Saddle

$$x^2 - y^2$$

$$\lambda = 1$$



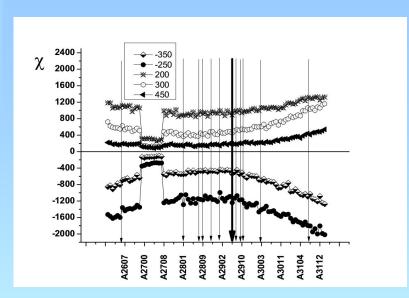
Maxima

$$-x^2 - y^2$$

$$\lambda = 2$$

Morphological precursor of Solar Flares

AR 09393

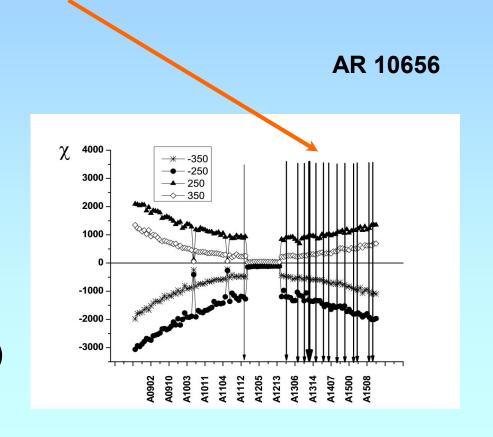


Before flash
$$\chi \to 0$$

 $\#(\max + \min) = \#(saddle)$

$$\chi = \#(\max) + \#(\min) - \#(saddle)$$

Bars show time of a flash



Леопольд Вьеторис (1891-2002)

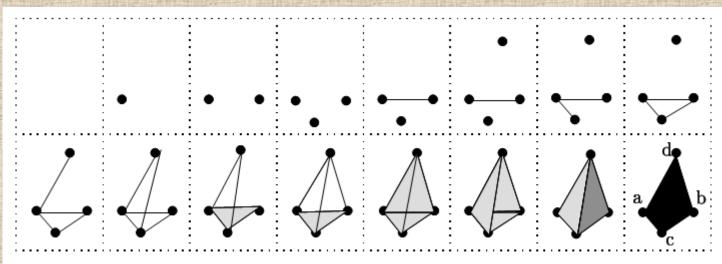
ФИЛЬТРАЦИЯ

 $X^1 \subseteq X^2 \subseteq X^3 \subseteq \ldots \subseteq X^n$

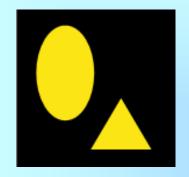


Илья Рипс (1948-

t=2 t=3 t=5 t=0 t=1 t=4 cd, ad a, b d, ab,bc abc acd ac



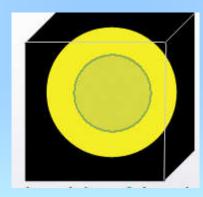
$\chi = \#(cesssee компоненты) - \#(dыpы) = \beta_0 - \beta_1$



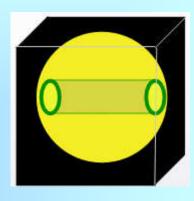
$$\beta_0 = 2, \beta_1 = 0$$



$$\beta_0 = 1, \beta_1 = 2$$



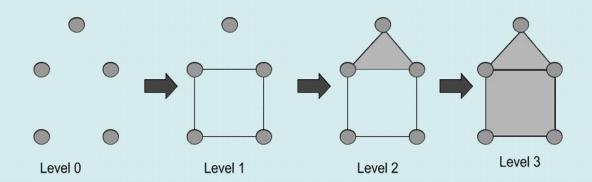
$$\beta_0 = 1, \beta_1 = 0, \beta_2 = 1$$

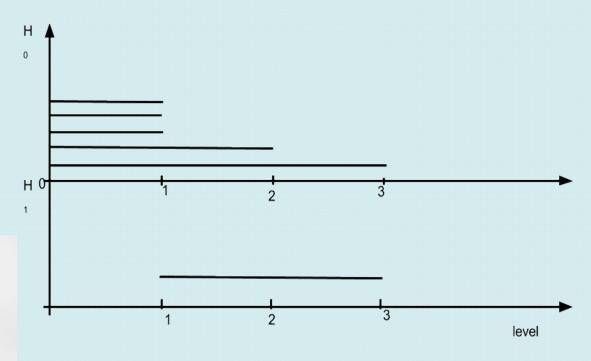


$$\beta_0 = 1, \beta_1 = 1,$$
$$\beta_2 = 0$$



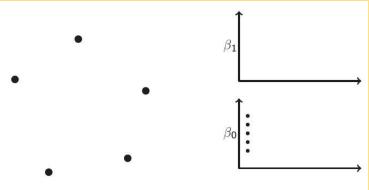
Компоненты связности и дыры

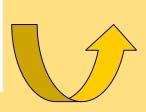


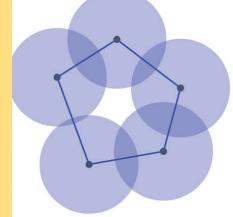


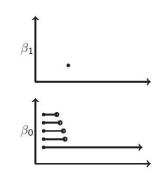


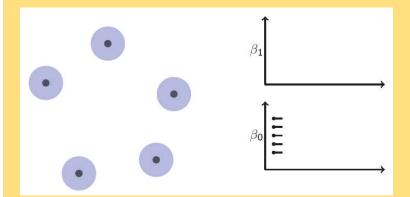
ФИЛЬТРАЦИЯ ЧЕХА

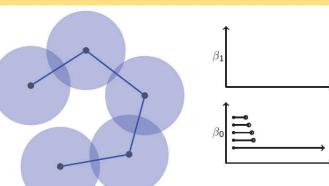




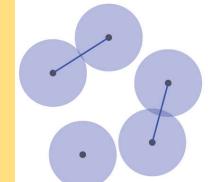


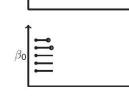














Э.Чех (1893-1960)

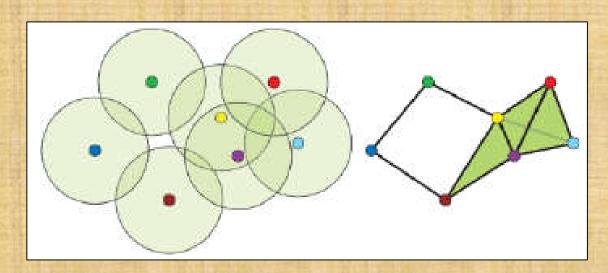
КОМПЛЕКС ЧЕХА И ТЕОРЕМА О НЕРВЕ

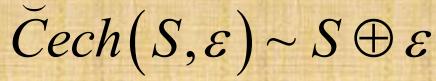
Для множества симплексов с вершинами

$$v_1, v_2, \dots, v_k \in S$$

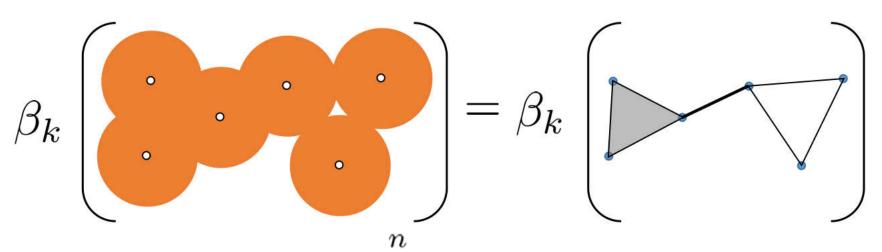
Комплексом Чеха называют:

$$\check{C}ech(S,\varepsilon) = \bigcap_{i=1}^{k} B(v_i,\varepsilon)$$



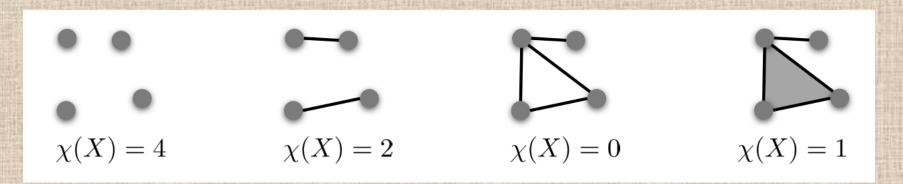




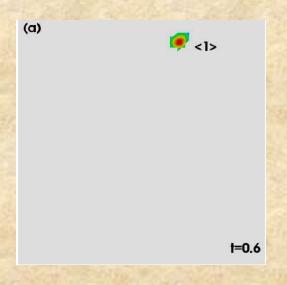


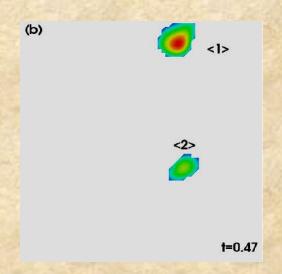
$$\chi(X) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \beta_k(X)$$

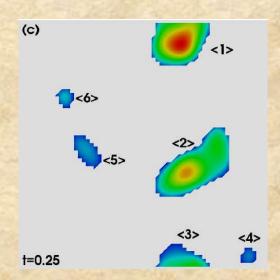
$$\chi(A \cup B) = \chi(A) + \chi(B) - \chi(A \cap B)$$

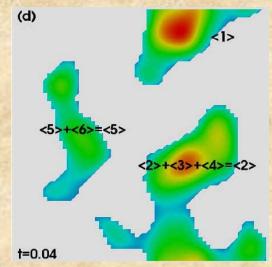


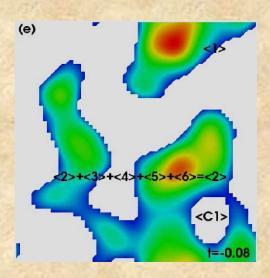
Persistence: level sets

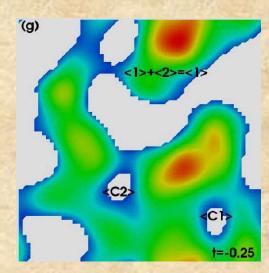




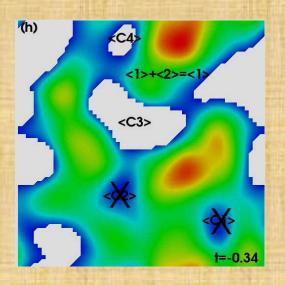


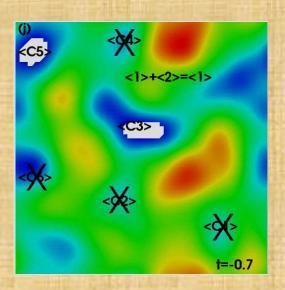


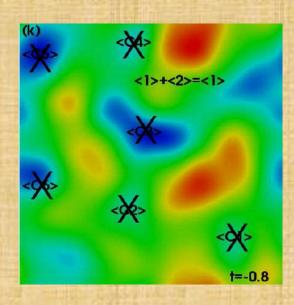


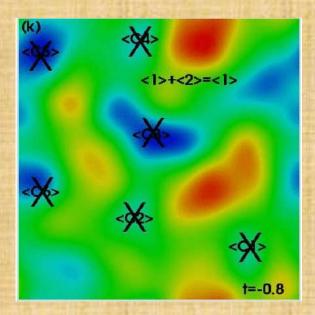


Persistence: level sets





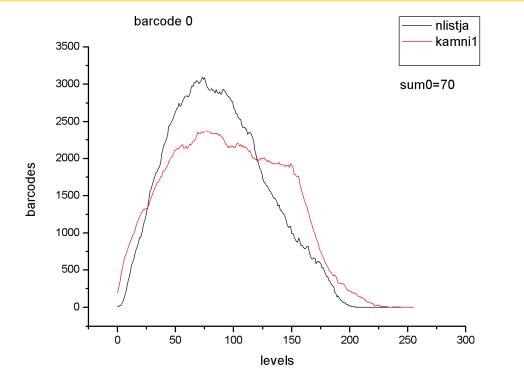




Текстуры в ДДЗ







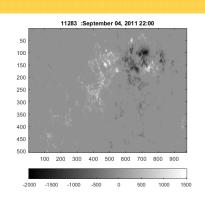
AO 11283 6.09. 2011 (22:12) X2.1

60 часов до вспышки

11283 :September 04, 2011 00:00 50 100 150 200 250 300 350 400 400 500 100 200 300 400 500 600 700 800 900 -1500 -1000 -500 0 500 1000

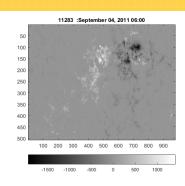


48 часов до вспышки



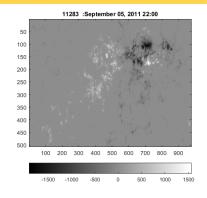


54 часа до вспышки





24 часа до вспышки





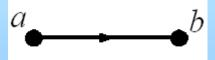
ДИСКРЕТНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ



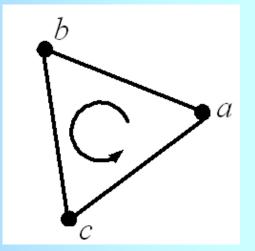
Симплексы и цепи

а

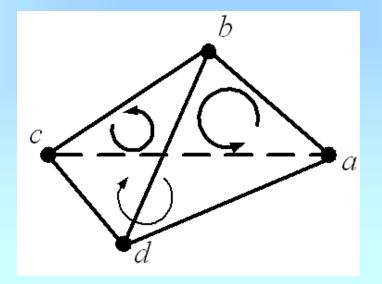
cumплек c ompesok [a,b]



2-симплекс mреугольн ψ к, b, c



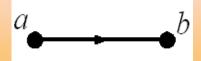
Линейная комбинация симплексов называется цепью



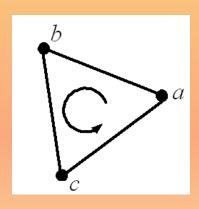
3-симплекс $mempa > \partial \phi a, b, c, d$

ГРАНИЦА СИМПЛЕКСА

$$\partial_k \sigma = \sum_{i=0}^k (-1)^i \left[a_0, \dots \tilde{a}_i \dots a_k \right],$$



$$\partial_1 [a,b] = b + (-1)^1 a = b - a$$



$$\partial_{2}[a,b,c] = [b,c] - [a,c] + [a,b] = = [b,c] + [c,a] + [a,b]$$

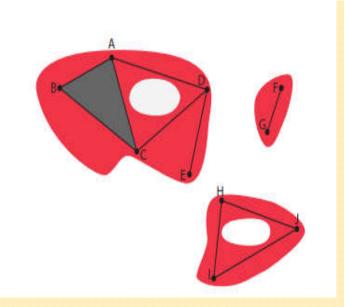
Граница границы есть нуль!

$$\partial_1 \partial_2 [a,b,c] = [c] - [b] - [c] + [a] + [b] - [a] = 0$$

ГРУППЫ ЦЕПЕЙ, ЦИКЛОВ, ГРАНИЦ

Цепи
$$C_k$$
: $c_k = \sum_{i=1}^k a_i \sigma_i$,

Циклы
$$Z_k$$
: $\partial C_k = 0$, $Z_k \subset C_k$



$\partial [ABC]$ – Boundary

$$\partial [ACD]$$
 – Cycle

Границы $B_k: B_k = \partial C_{k+1}$

ГРУППЫ ГОМОЛОГИЙ

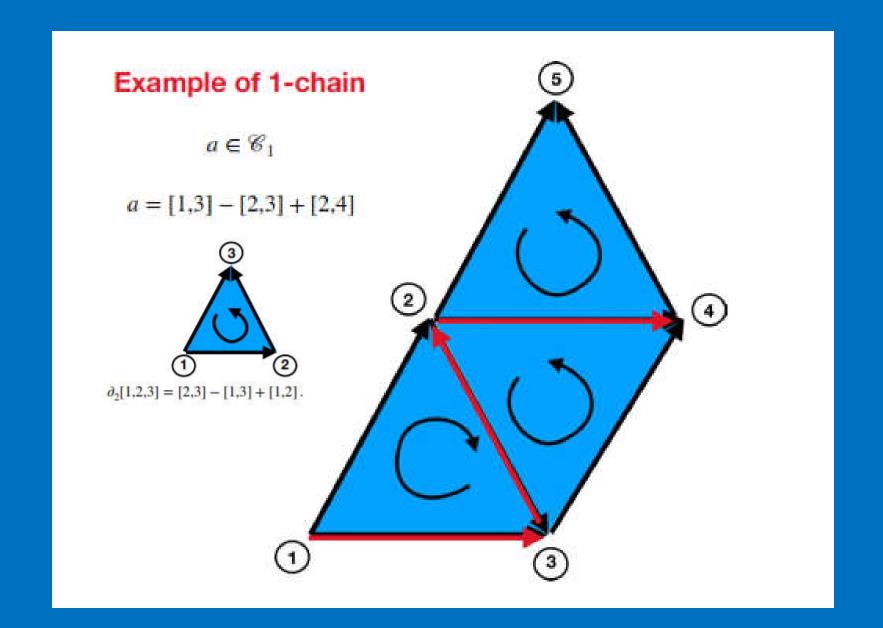
$$B \subset Z \subset C \Rightarrow H_k = Z_k/B_k$$

Числа
$$\beta_k = rank H_k$$

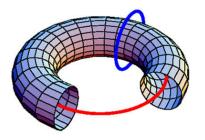
Бетти

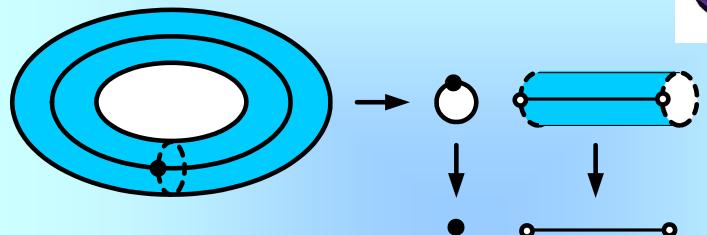
$$\partial [a,b] = b-a$$
 а и b гомологичны

$$b \sim a + \partial [a,b]$$



Гомологии Тора





$$C_0 = 1 \rightarrow \beta_0 = 1$$

$$C_1 = 2 \rightarrow \beta_1 = 2$$

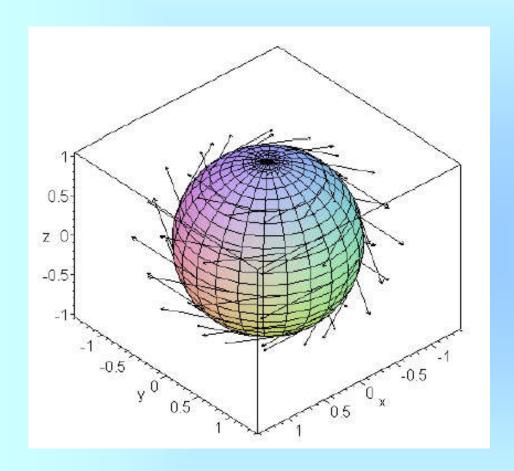
$$C_2 = 1 \rightarrow \beta_2 = 1$$



$$\chi = \sum_{i} (-1)^{i} \beta_{i}$$



Гомологии Сферы



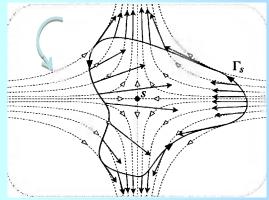
$$C_0 = 1 \rightarrow \beta_0 = 1$$

 $C_1 = 0 \rightarrow \beta_1 = 0$
 $C_2 = 1 \rightarrow \beta_2 = 1$
 $\chi = 1 - 0 + 1 = 2$

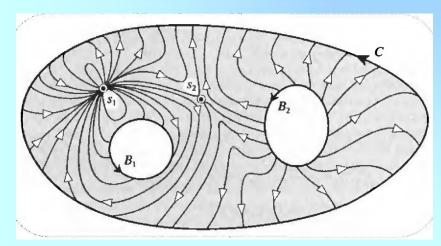
Векторное поле на сфере имеет 2 особенности

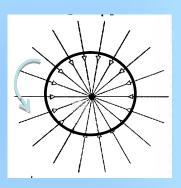
Характеристика Эйлера и индекс векторного поля

$$Ind(u(x,y),\gamma) = (2\pi)^{-1} \mathcal{L}_{\gamma} d \operatorname{arctg} \frac{u_{y}}{u_{x}}$$



седло Ind = -1





Max, Min Ind = 1

Сумма индексов особых точек поля в многосвязной области равна ее характеристики Эйлера

$$EC = \#(\max) - \#(saddle) + \#(\min)$$

ЦЕПИ И КОЦЕПИ

Любая цепь
$$c = \sum_i s_i \sigma_i, \ s_i \in [0,1]$$

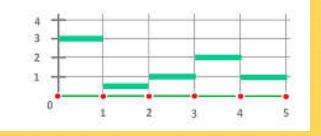
Граница [AB]:
$$\partial [AB] = B - A$$
, $\partial^2 [AB] = \partial [B] - \partial [A] = 0$

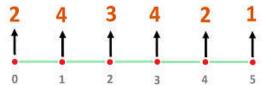
$$c = \sum s_i \sigma_i, \ \partial[c] = \sum s_i \partial \sigma_i, \ \partial: C_1(\square) \rightarrow C_0(\square)$$

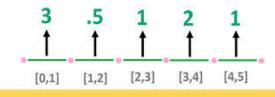
Коцепь – дискретная функция на цепи









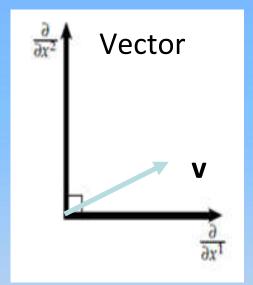


$$f[0] = 2; f[1] = 4; f[2] = 3,.....$$
 $f[0,1] = 3; f[1,2] = 5;.....$

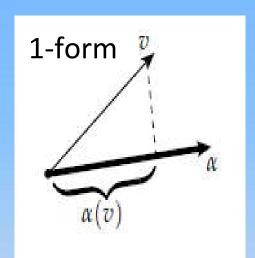
$$f[0,1] = 3; f[1,2] = 5;....$$

Некоторые вещи из дифференциальной геометрии.

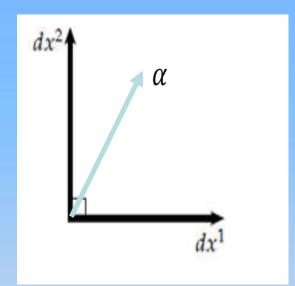
Differentials as basis vectors



$$\mathbf{v} = v^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + v^2 \frac{\partial}{\partial x^2}$$



$$dx^k \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \delta_i^k$$



$$\alpha(\mathbf{v}) = \alpha_1 dx^1 + \alpha_2 dx^2$$

$$\alpha(\mathbf{v}) = \alpha_i \, dx^i \left(v^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \alpha_i v^j$$

Метрический тензор:
$$g_{ik} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = \left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^k}\right)$$



ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА АНАЛИЗА

ВНЕШНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ КОЦЕПИ

$$df[AB] = f[B] - f[A], d: C_0(\square) \rightarrow C_1(\square)$$

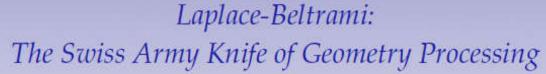
$$\int_{AB} df = f(B) - f(A) = f(B - A) = f(\partial(AB))$$

$$\int_{C} df = \int_{\partial(C)} f, \ df = f\partial$$

$$f = a(x,y)dx + b(x,y)dy \quad df = \frac{\partial a}{\partial y}dy \wedge dx + \frac{\partial b}{\partial x}dx \wedge dy = \left(\frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y}\right)dx \wedge dy$$

$$\int_{c} \left(\frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y} \right) dx \wedge dy = \int_{\partial c} a(x, y) dx + b(x, y) dy .$$

ЛАПЛАСИАН И ЕГО ИПОСТАСИ





Justin Solomon Keenan Crane Etienne Vouga

$$(x_0-h) \leftarrow (x_0+h)$$

$$f''(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{2}{h^2} \left\{ \frac{f(x_0 + h) + f(x_0 - h)}{2} - f(x_0) \right\}$$

$$\Delta := \sum_{k} \frac{\partial^{2}}{\partial x_{k}^{2}}, \frac{1}{2n} \Delta f(p) = \lim_{r \to 0} \left(\frac{\int_{S_{r}} f}{Vol(S_{r})} - f(p) \right)$$

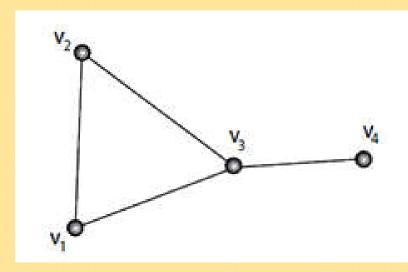
Слайд 53

нг1

николай; 08.02.2017

КОМБИНАТОРНЫЙ ЛАПЛАСИАН

F.R.K Chung, Spectral graph theory. American mathematical Society, 1997



$$L = \begin{cases} \deg(\mathbf{v}_i), i = j \\ -1, \mathbf{v}_i \sim \mathbf{v}_j \\ 0, \text{ if otherwise} \end{cases}$$

$$(x_{0} - h) \xrightarrow{x_{0}} (x_{0} + h) \qquad L = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

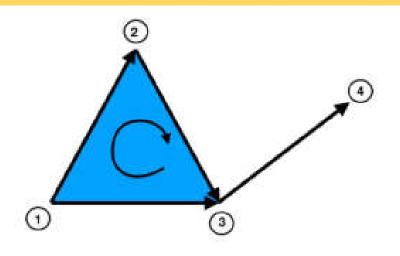
$$f''(x_{0}) = \lim_{h \to 0} \frac{2}{h^{2}} \left\{ \frac{f(x_{0} + h) + f(x_{0} - h)}{2} - f(x_{0}) \right\}$$

$$(x_{1})^{T} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$-\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = \sum_{i \sim 3} (x_i - x_3) = \Delta(\mathbf{v}_3)$$





$$\mathbf{B}_{[1]} = \begin{bmatrix} 1,2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1,3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2,3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3,4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_{[1]} = \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix} \quad 1 \quad 0 \quad -1 \quad 0 \quad ,$$

$$\begin{bmatrix} 3 \end{bmatrix} \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad -1$$

$$\begin{bmatrix} 4 \end{bmatrix} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1$$

$$\mathbf{B}_{[2]} = \begin{bmatrix} 1,2,3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_{[2]} = \begin{bmatrix} 1,3 \end{bmatrix} \quad -1 \quad .$$

$$\begin{bmatrix} 2,3 \end{bmatrix} \quad 1$$

$$\begin{bmatrix} 3,4 \end{bmatrix} \quad 0$$

$$\mathbf{L}_{[0]} = \mathbf{B}_{[1]} \mathbf{B}_{[1]}^{\top}.$$

$\mathbf{L}_{[n]} = \mathbf{B}_{[n]}^{\top} \mathbf{B}_{[n]} + \mathbf{B}_{[n+1]} \mathbf{B}_{[n+1]}^{\top}.$

In terms of the incidence matrices the relation

$$\partial_n \partial_{n+1} = 0 \quad \forall n \ge 1$$

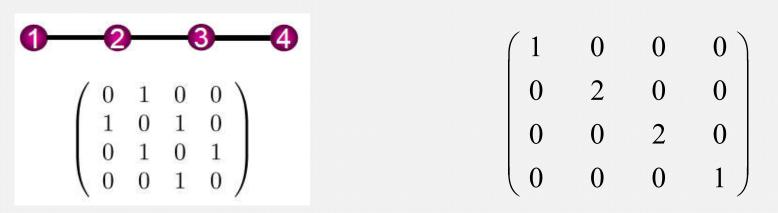
Can be expressed as

$$\mathbf{B}_{[n]}\mathbf{B}_{[n+1]} = \mathbf{0} \quad \forall n \geq 1 \qquad \qquad \mathbf{B}_{[n+1]}^{\top}\mathbf{B}_{[n]}^{\top} = \mathbf{0} \quad \forall n \geq 1$$

Спектр Графа

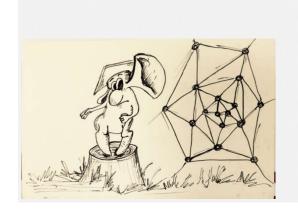
МАТРИЦА ИНЦИДЕНТНОСТИ А:

МАТРИЦА ВЕСОВ D



$$\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}$$

МАТРИЦА ЛАПЛАСА L



$$L = D - A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$



НЕПРЫВНЫЙ И ДИСКРЕТНЫЙ ЛАПЛАСИАН

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) + \Delta u(x,t) = 0, \ u(x,0) = f(x)$$

$$u(x,t) = H^{t} f(x) = \int_{\mathbb{R}^{2}} f(y)H^{t}(x,y)dy,$$

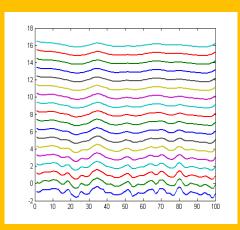
$$H^{t}(x,y) = \frac{1}{4\pi t} \exp\left[-\frac{\|x-y\|^{2}}{4t}\right]$$

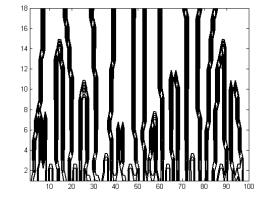
$$\Delta f(x) = -\frac{\partial}{\partial t}u(x,t)\Big|_{t=0} = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left(f(x) - H^{t} f(x)\right)$$

$$\hat{\Delta} f(x) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \frac{\left(4\pi t\right)^{-1}}{t} \sum_{i} e^{-\frac{\|x_{i} - x\|^{2}}{4t}} \left(f(x) - f(x_{i})\right)$$

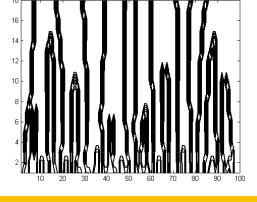
Andrew Witkin (1952-2010)

SCALE -SPACE



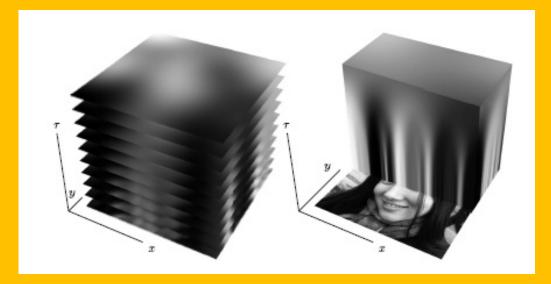


$$F(x,\sigma) = G(x,\sigma) * F(x) \qquad F''(x) = 0$$





lijima Taizo. (1925-)



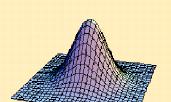
T. lijima Bull. Electrotech. Lab 1962, v.26, 368 A.P. Witkin, Proc. 8th Int. Joint Conf. Art. Intell., 1983,1019. J.Koenderink, Biol.Cybern. 1984. 50, 363

БЛЮРИНГ С ЯДРОМ ГАУССА

$$f_t(x) \equiv f * g_t = \int_{y \in R^2} f(y)g_t(y - x)dy$$

 $g_s * g_t = g_{s+t}$





$$g_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left[-\|x\|^2/2t\right]$$

Для компакта Ω

$$\frac{\partial f_t}{\partial t} = \Delta f_t \quad \Omega \times R^+$$

$$\frac{\partial f_t}{\partial n} = 0 \quad \partial \Omega \times R^+$$

$$f_t = f \quad \Omega \times \{0\}$$

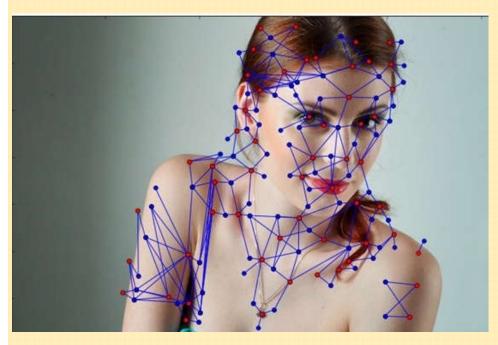
Аппроксимация
 Лапласиана

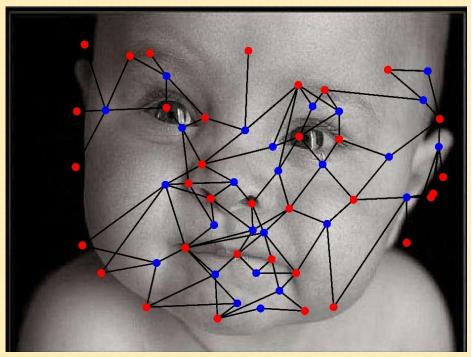
$$\left| f_{t+1} - f_t \sim \Delta f_t(x) \right|$$

КРИТИЧЕСКИЕ СЕТИ

Gu S., Zheng Y., Tomasi C. //Computer Vision–ECCV 2010. Springer, 2010. P. 663-676.

- Найдем устойчивый масштаб в Scale-Space.
- Локализуем экстремумы на диффузном образе
- Соединим минимумы с ближайшими максимумами.
- Полученный ациклический граф критическая сеть

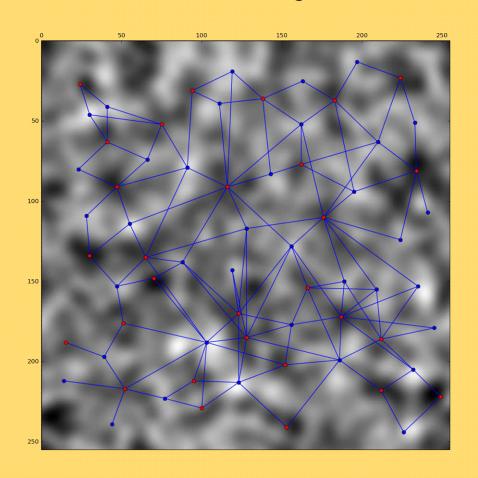




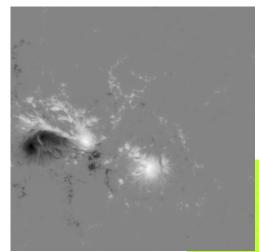
ГРАФЫ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ

Gaussian random field
256 x 256 px,
Gaussian correlation function,
Correlation length = 10

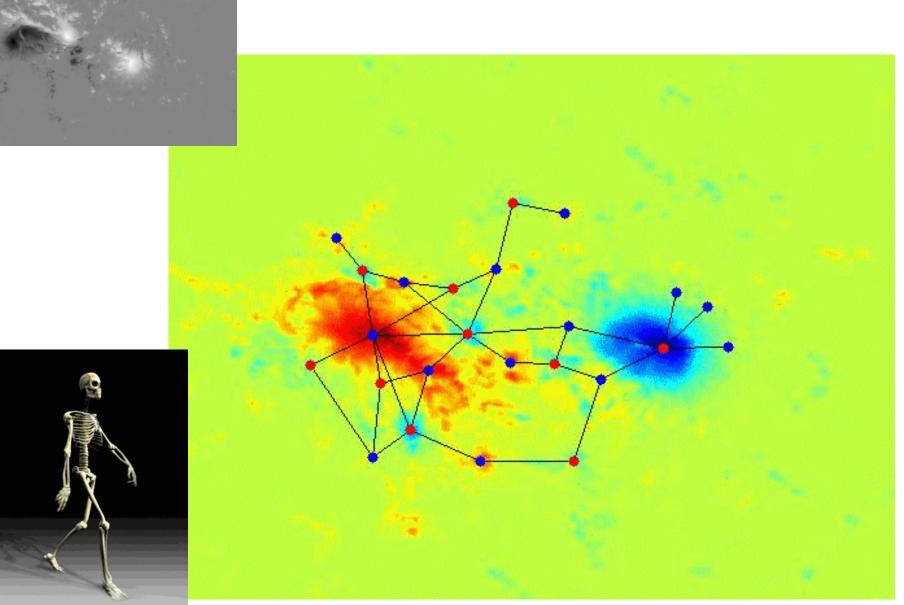
Lognormal field

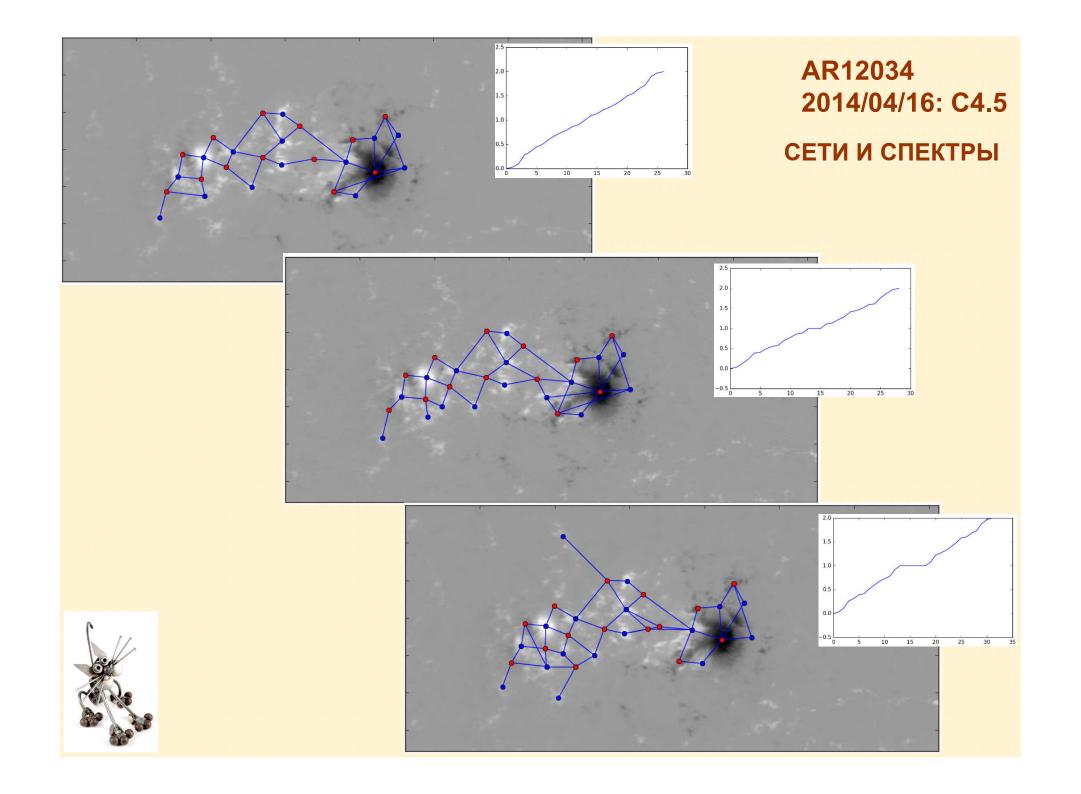


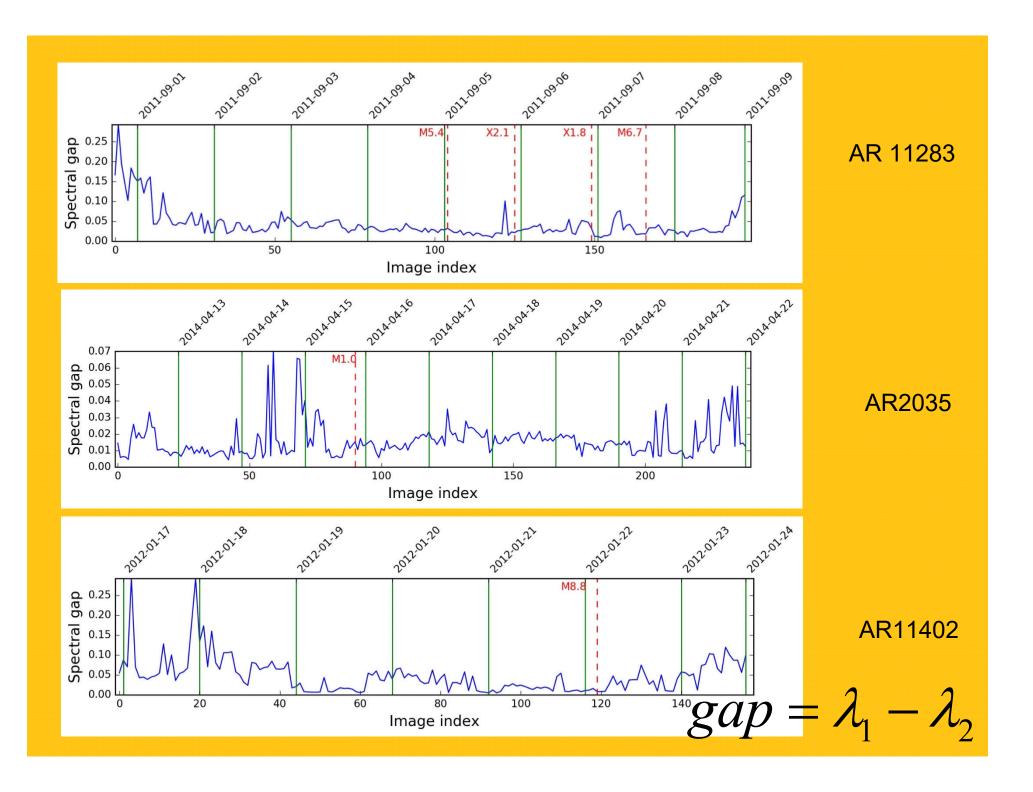




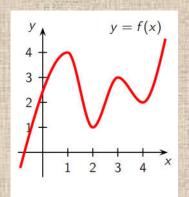
Графодинамика магнитограмм АО

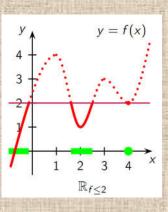


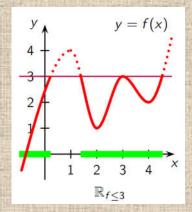


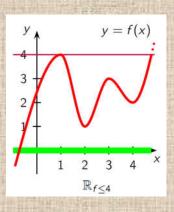


ИДЕЯ ПЕРСИСТЕНТНОСТИ

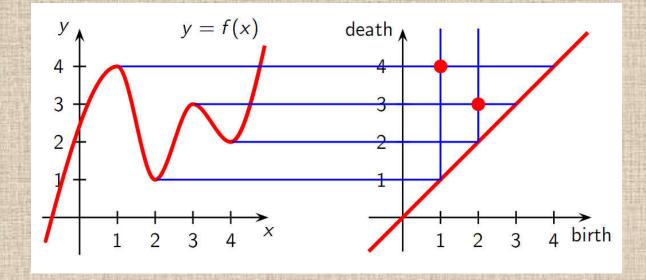




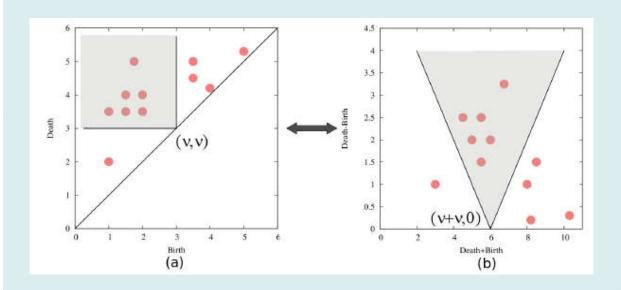


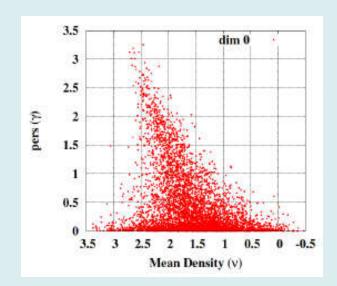






Персистентные диаграммы





$$\frac{D+B}{2}=$$

средняя плотность

$$D - B =$$

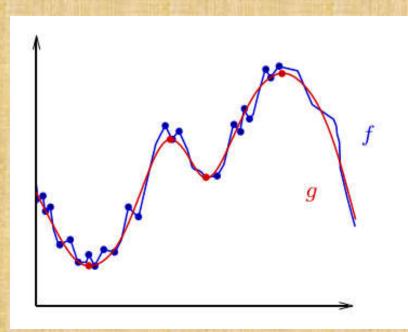
персистентность

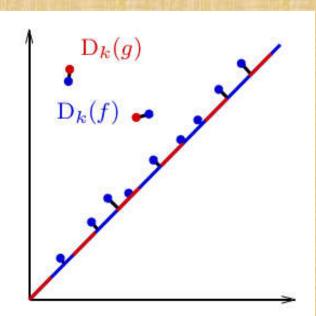
$$\langle I_{ij} \rangle = \frac{\langle N_{ij} \rangle}{\langle N_{tot} \rangle}$$



ЧТО ДЕЛАТЬ?

ТЕОРЕМА УСТОЙЧИВОСТИ





Для двух ручных непрерывных функций *f* и *g* на конечно триангулируемых пространствах

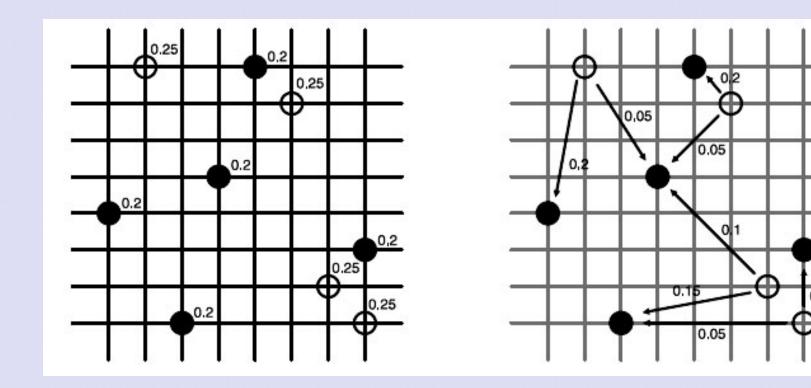
$$d_b(D_k(f), D_k(g)) \le ||f - g||_{\infty}$$



МАХИИ В Васерштейн Леонид Нисонович

РАССТОЯНИЕ ВАСЕРШТЕЙНА

$$W_p(\mu,\nu)^p = \inf E \left[d(X,Y)^p \right]$$

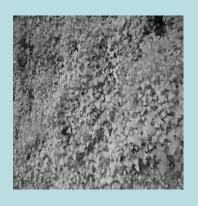


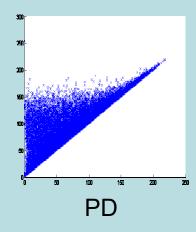
КАК ВЕКТОРИЗОВАТЬ ДП?

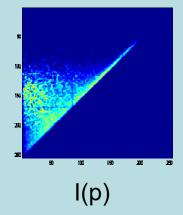
- 1. Поместим в каждую точку ДП центр 2-D гауссовское ядро.
- 2. Найдем сумму всех гауссиан.
- 3. Перевычислим полученную функцию на новую решетку.

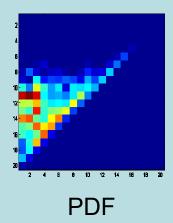
$$I(p) = \iint_{p} \sum_{(b_{x},b_{y}) \in \mathbb{B}} \frac{1}{2\pi\sigma_{x}\sigma_{y}} e^{\frac{-1}{2}\left(\frac{(x-b_{x})^{2}}{\sigma_{x}^{2}} + \frac{(y-b_{y})^{2}}{\sigma_{y}^{2}}\right)} dy dx$$

$$I(p) = \iint_{p} \sum_{(b_x, b_y) \in \mathbf{B}} f(|\mathbf{b}|) \frac{1}{2\pi\sigma_x \sigma_y} e^{-\frac{1}{2} \left[\frac{(x-b_x)^2}{\sigma_x^2} + \frac{(y-b_y)^2}{\sigma_y^2} \right]} dy dx$$



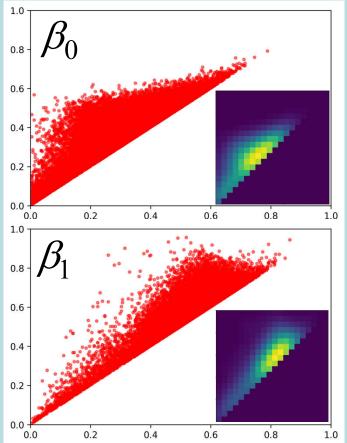






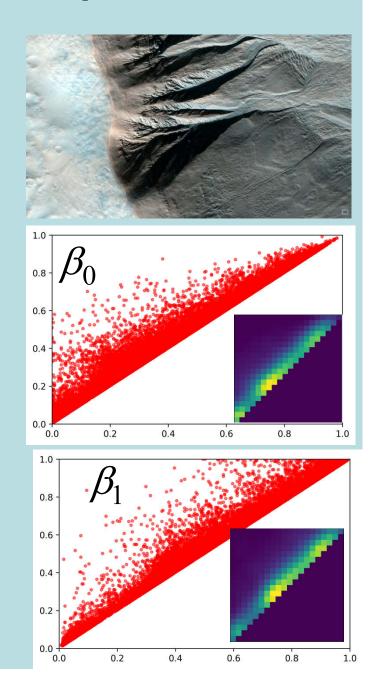
Пример: Ландшафты Марса



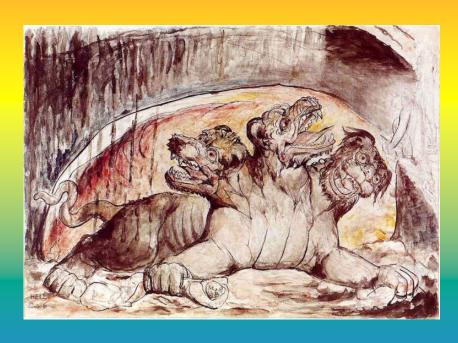


DRim=0.5500

DRim=0.5774



РИМАНОВА МЕТРИКА НА ДИАГРАММАХ ПЕРСИСТЕНТНОСТИ



Чу́дище обло, озо́рно, огро́мно, стозе́вно и ла́яй

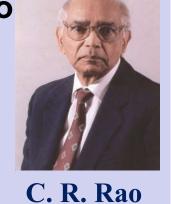
Информационная метрика Фишера-Рао

A Fisher Memorial Trees.

R. A. Fisher (1890-1962)

Пусть
$$p(x,\theta)-pdf$$
, $\theta=(\theta_1,\theta_2,....,\theta_n)$

$$\int_X p(x, heta)\,dx=1$$



C. R. Rao (born 1920)

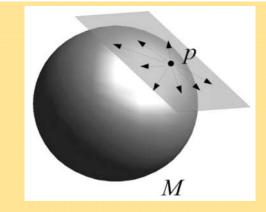
$$g_{ik} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = \left(\frac{\partial}{\partial \theta_i}, \frac{\partial}{\partial \theta_k}\right)$$

$$p(\mathbf{x}, \theta) \rightarrow \log p(\mathbf{x}, \theta)$$

$$g_{jk}(heta) = \int_X rac{\partial \log p(x, heta)}{\partial heta_j} rac{\partial \log p(x, heta)}{\partial heta_k} p(x, heta) \, dx.$$

Слишком сложно для вычислений!

PDF живут в Банаховом пространстве с нормой Для измерения нужна гильбертова норма Переселим pdf на единичную сферу!



- 1. Замена координат $y_i = \sqrt{p_i}; \sum_i p_i = 1 \implies \sum_i y_i^2 = 1$
- 2. В касательном пространстве, определим метрику Фишера-Рао:

$$ds^{2} = \sum_{i} dy_{i} dy_{i} = \sum_{i} d\sqrt{p_{i}} d\sqrt{p_{i}} = \frac{1}{4} \sum_{i} \frac{dp_{i} dp_{i}}{p_{i}} \sim \int \frac{\|\nabla p\|^{2}}{p}$$

3. И скалярное произведение:

$$(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = ||\mathbf{v}_1|| ||\mathbf{v}_2|| \cos \varphi.$$

$$\mathbf{v}_i \equiv d \mathbf{\psi}_i \equiv d \sqrt{p_i}$$
 Этот угол измеряє

$$\varphi = \arccos \frac{(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)}{\|\mathbf{v}_1\| \|\mathbf{v}_2\|}$$

Этот угол измеряет расстояния между pdf на сфере

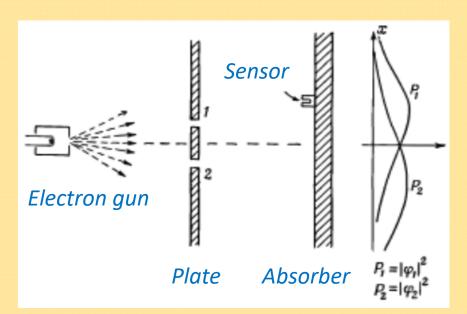
Квантовая эвристика: эксперимент с двумя щелями

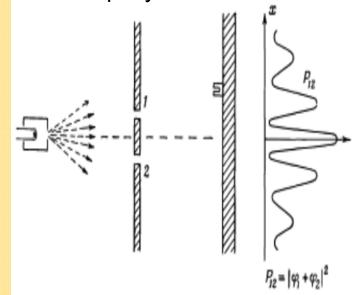
 P_i - вероятность пройти через щель i =1,2

 $P_{12}\,$ - вероятность пройти через щель или 1 либо через щель 2

 $P_{12} = P_1 + P_2$, если мы анализируем путь $P_{12} \neq P_1 + P_2$, если мы смотрим

результат





$$\psi_{12} = \psi_1 + \psi_2 \longrightarrow$$

$$\psi_{12} = \psi_1 + \psi_2 \rightarrow P_{12} = P_1 + P_2 + 2\psi_1\psi_2$$

- амплитуда вероятности или полуплотность

Общий случай I (Пространство Банаха)

Let
$$\mathscr{P} = \left\{ \mathbf{g} : [0,1] \mapsto \mathbb{R}_{\geq 0} \mid \int\limits_0^1 g(t) dt = 1 \right\}$$
 is a set of PDFs

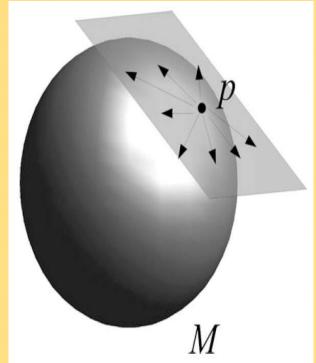
and
$$T_g(\mathscr{P}) = \left\{ \mathbf{w} \in \mathbb{L}^1([0,1],\mathbb{R}) \mid \int\limits_0^1 \mathbf{w}(\mathbf{t}) \mathrm{d}\mathbf{t} = 0 \right\}$$

is a tangent space in g.

Then non-parametric Fisher-Rao metric for $g\in\mathscr{P}_0$ and $v_1,v_2\in T_g(\mathscr{P})$ is

$$((v_1, v_2))_g = \int_0^1 v_1(t)v_2(t) \frac{1}{g(t)} dt$$

where
$$\mathscr{P}_0 = \{ g \in \mathscr{P} \mid g > 0 \}.$$



Tangent space to M at p

Общий случай II - S_{∞}

Пусть
$$S_{\infty} = \{f \in L_2 \| f \| = 1, S_{\infty} \in L_2 \}$$
 и $Q \in S_{\infty}^+$ Пусть $q(t) = \sqrt{g(t)}$ множество всех таких корней $\mathcal Q$

Два касательных вектор $w \in T_q(\mathcal{Q})$ $v \in T_g(\mathcal{P}_0)$ связаны $v(t) = 2\sqrt{g(t)}w(t)$

Тогда)
$$((v_1,v_2))_g=\int\limits_0^1v_1(t)v_2(t)rac{1}{g(t)}dt=4\int\limits_0^1\sqrt{g(t)}w_1(t)\sqrt{g(t)}w_2(t)rac{1}{g(t)}dt$$

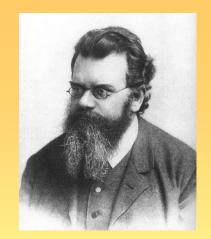
$$\propto \int_{0}^{1} w_1(t)w_2(t)dt = \langle w_1, w_2 \rangle_{\mathcal{Q}}$$



Энтропия Больцмана и Риманова метрика.

1.Pouryahya, M., et al. A. Bakry-Emery Ricci Curvature on Weighted Graphs with Applications to Biological Networks 2.J. Lott, C. Villani, Ricci curvature for metric-measure spaces via optimal transport. Ann. Math. 169, 903–991 (2009)

 $S = -\int_{M} \mu \log \mu d(\mathbf{vol} M), \quad \int_{M} \mu d(\mathbf{vol} M) = 1$



Людвиг Больцман 1844-1906

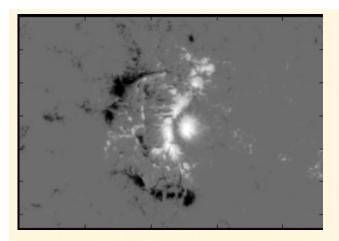
$$\frac{dS}{dt} = -\int_{M} (\mu_{t} \log \mu + \mu_{t}) d(\mathbf{vol} M) = -\int_{M} \mu_{t} \log \mu d(\mathbf{vol} M), \quad \mu_{t} = \partial \mu / \partial t$$

 μ_t удовлетворяет уравнению теплопроводности: $\mu_t = div(\mu \log \mu) = \Delta \mu$

Поэтому:
$$\frac{dS}{dt} = -\int_{M} \Delta \mu \log \mu \, d(\mathbf{vol}\,M) = \int_{M} \frac{\left\|\nabla \mu\right\|^{2}}{\mu} \, d(\mathbf{vol}\,M)$$
 - метрика Фишера-Рао

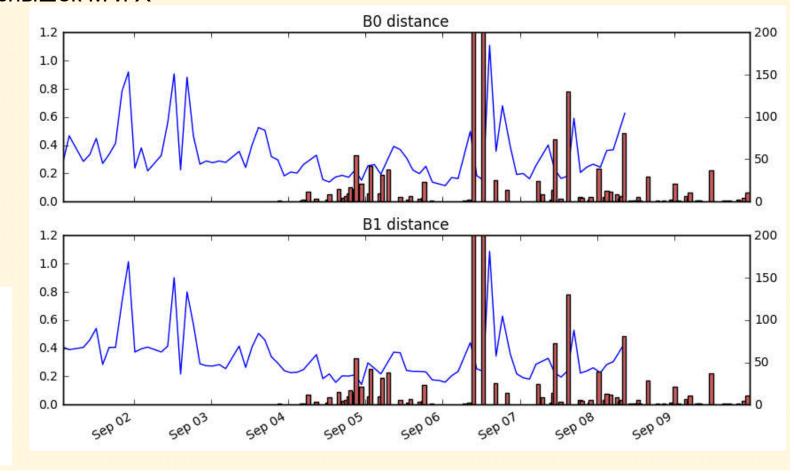
Изменение энтропии системы измеряется расстоянием Фишера-Рао!

(Boltzmann, L. Weitere Studien über das Wärmegleichgewicht unter Gasmolekülen. SitzungsberKeisAkad Wiss 1872, 66, 275–370).



Эволюция АО в Римановой метрике

AR12673~30вспышек М и X

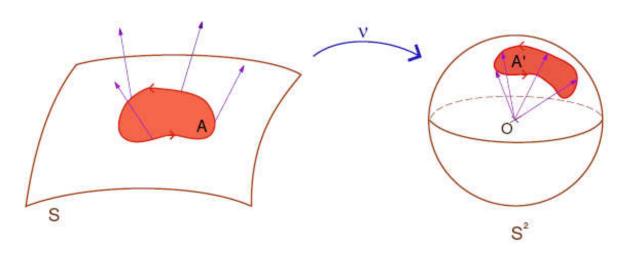


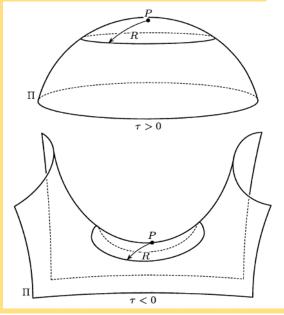




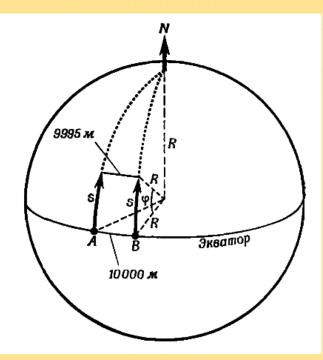
КРИВИЗНА

$$K_S(p) = \lim_{diam(R) \to 0} \frac{Area(\nu(R))}{Area(R)}$$





$$\kappa = 6 \lim_{R \to 0} \frac{2\pi R - L_{p(R)}}{\pi R^3}$$



КРИВИЗНА ОЛЛИВЬЕ -РИЧЧИ

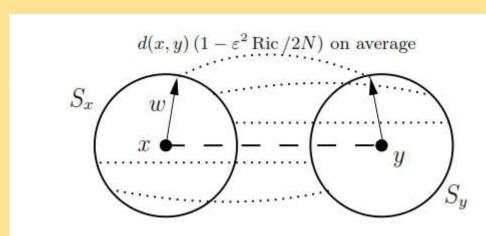


Грегорио Риччи-Курбастро (1853—1925)



Георг Фридрих Бернхард Риман (1826-1866)

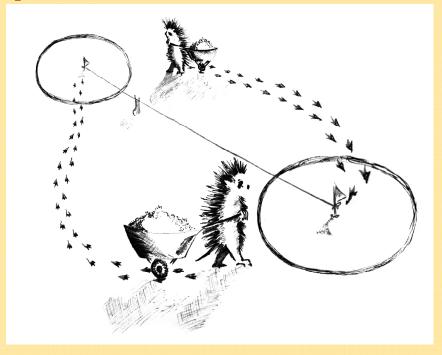
$$(\Delta x)_s = (\Delta x)_0 \cos \varphi \approx (\Delta x)_0 \left(1 - \frac{\varphi^2}{2}\right) = (\Delta x)_0 \left(1 - \frac{s^2}{2R^2}\right)$$



Кривизна Риччи и Задача Монжа-Канторовича

$$\kappa(x, y) = 1 - \frac{W_1(\mu_x, \mu_y)}{d(x, y)}$$

$$W_1(\mu_1, \mu_2) = \min_{\mu} \sum_{i,j=1}^n d(x_i, x_j) \mu(x_i, x_j)$$





$$\mu(x, y) \ge 0 \text{ for } x, y \in X$$

$$\sum_{i=1}^{n} \mu(x, x_i) = \mu_1(x) \text{ for } x \in X$$

$$\sum_{i=1}^{n} \mu(x_i, y) = \mu_2(y) \text{ for } y \in X$$

Mémoire sur la théorie des déblais et des remblais (1781)

666. Mémoires de l'Académie Royale

MÉMOIRE SURLA THÉORIE DES DÉBLAIS ET DES REMBLAIS. Par M. Monge.

Lonsqu'on doit transporter des terres d'un lieu dans un La sutre, on a coutame de donner le nom de Drôlai au volume des terres que l'on doit transporter, & le nom de Remblui à l'espace qu'elles doivent occuper après le transport.

votune des terres que l'on doit transporter, & se nom de Remblui à l'espace qu'elles doivent occuper après le transport. Le pris du transport d'une molécule étant, toutes choses d'ailleurs égales, proportionnel à son poids & à l'espace-qu'on lui fait parcourir, & par conséquent le prix du transport total devant être proportionnel à la somme des produits des molécules multipliées chacune par l'espace parcouru, il s'ensuir que le déblai & le remblai étant donnés de figure & de position, il n'est pas indifférent que telle molécule du déblai foit transportée dans tel ou tel autre endroit du remblai, mais qu'il y a une certaine distribution à faire des molécules du premier dans le second, d'après laquelle la somme de ces produits sera la moindre possible, & le prix du transport total sera un misianes.

C'est la folution de cette question que je me propose de donner ici. Je divisserai ce Mêmoire en deux parties, dans la première je supposerai que les déblais & les remblais sont des aires contenues dans un même plan : dans le second, je supposerai que ce sont des volumes.

PREMIÈRE PARTÍE.

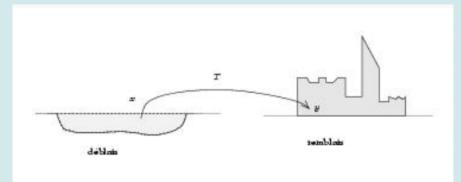
Du transport des aires planes sur des aires comprises dans un même plan.

QUELLE que soit la route que doive saivre une molécule

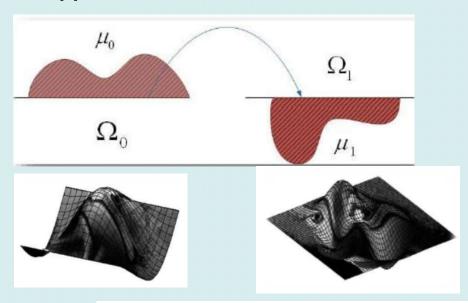


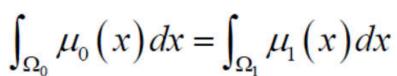
Гаспар Монж (1746-1818





ЗАДАЧА МОНЖА-КАНТОРОВИЧА





$$u:(\Omega_0,\mu_0)\to(\Omega_1,\mu_1)$$



Леонид Канторович (1912-1986

РАССТОЯНИЕ ВАССЕРШТЕЙНА:

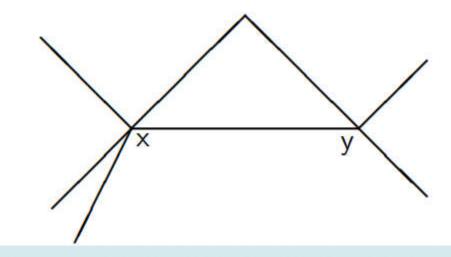
$$d_p(\mu_0, \mu_1)^p := \inf_u \int |u(x) - x|^p \mu_0(x) dx$$

КРИВИЗНА ОЛИВЬЕ-РИЧЧИ ДЛЯ ГРАФА

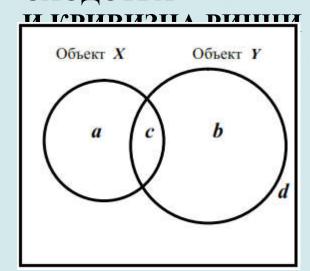
$$m_{x}(y) = \begin{cases} \frac{1}{d_{x}}, & \text{if } y \sim x; \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$$k(x,y) = -\left(1 - \frac{1}{d_x} - \frac{1}{d_y} - \frac{\sharp(x,y)}{d_x \wedge d_y}\right)_+ - \left(1 - \frac{1}{d_x} - \frac{1}{d_y} - \frac{\sharp(x,y)}{d_x \vee d_y}\right)_+ + \frac{\sharp(x,y)}{d_x \vee d_y}.$$

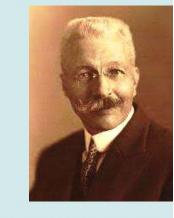




КОЭФФИЦИЕНТ ФЛОРИСТИЧЕСКОГО СХОДСТВА



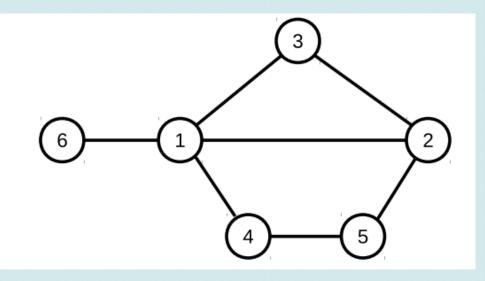
а-принадлежит X, но не Y b-принадлежит Y но не X c-общие для X и Y d- отсутствующие и в X и в Y



$$S = a \cup b \cup c \cup d$$
$$K = |c|/|S|$$

Поль Жаккар 18.11.1868 9.05.1944

$$J(i,j) = \frac{C(i,j)}{N(i,j)}.$$



Георгий Перельман (1966

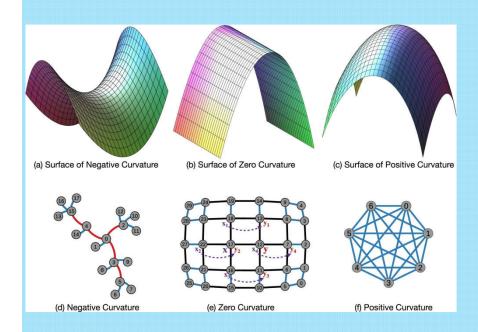
потоки риччи

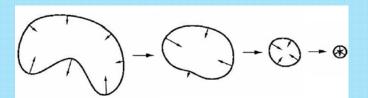
$$\partial_t g_t = -2(Ricc)_t$$

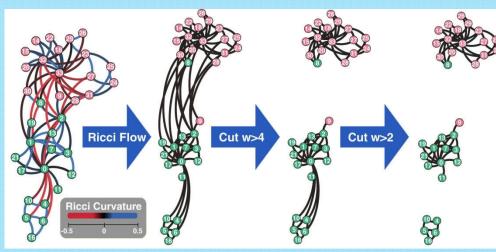
Все округлое округло в силу причастности к ней (Игра в шар)



Николай Кузанский (1401-1464)







Perelman, Grisha (2002), arXiv:math.DG/0211159

Discrete curvatures and network analysis

by

Emil Saucan, Areejit Samal, Melanie Weber, and Jürgen Jost

Preprint no.: 34

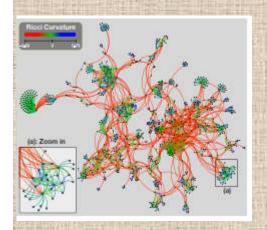
2017

Geometry of Correlation Networks for Studying the Biology of Cancer

Romeil Sandhu, Sarah Tannenbaum, Tryphon Georgiou, Allen Tannenbaum

Ricci Curvature of the Internet Topology

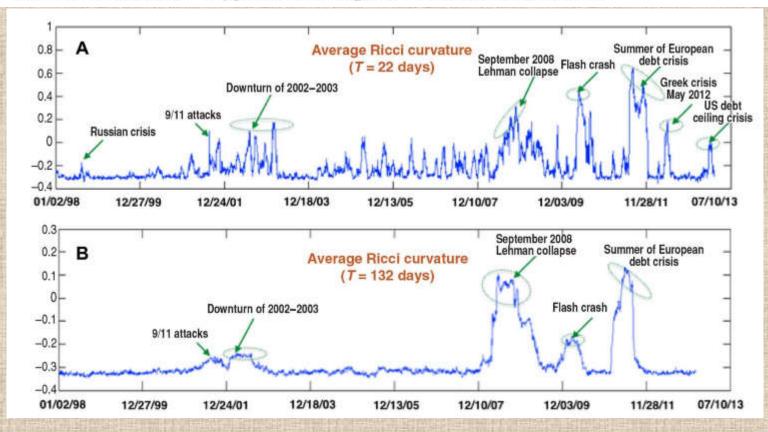
Chien-Chun Ni*, Yu-Yao Lin*, Jie Gao*, Xianfeng David Gu* and Emil Saucan!



•Sandhu, R., Georgiou, T., Reznik, L. Z., Kolesov, I., Senbabaoglu, Y., & Tannenbaum, A. (2015). Graph curvature for differentiating cancer networks. *Scientific reports*, 5.

Ricci curvature: An economic indicator for market fragility and systemic risk

Romeil S. Sandhu, 1* Tryphon T. Georgiou, 2 Allen R. Tannenbaum 1





Moo K.Chung

<u>Topological data analysis of human brain networks through order statistics</u> Soumya Das, D Vijay Anand, Moo K Chung

Heterogeneous Graph Convolutional Neural Network via Hodge-Laplacian for Brain Functional Data

Huang, MK Chung, A Qiu

<u>Unified Topological Inference for Brain Networks in Temporal Lobe Epilepsy</u>
<u>Using the Wasserstein Distance</u> Moo K Chung, et al.

Hodge Laplacian of Brain Networks DV Anand, MK Chung

Hodge Laplacian of Brain Networks_DV Anand, MK Chung

Hodge Laplacian of Brain _ Anand, MK Chung

<u>Topological Data Analysis of COVID-19 Virus Spike Proteins</u> MK Chung, et al.

Professor Ginestra Bianconi

Professor of Applied Mathematics

Email: g.bianconi@qmul.ac.uk

Room Number: Mathematical Sciences Building,

Room: MB-521

Website: http://www.maths.qmul.ac.uk/~gbianconi



<u>Higher-order simplicial synchronization of coupled topological signals</u>

Spectral detection of simplicial communities via Hodge Laplacians

Dirac synchronization is rhythmic and explosive

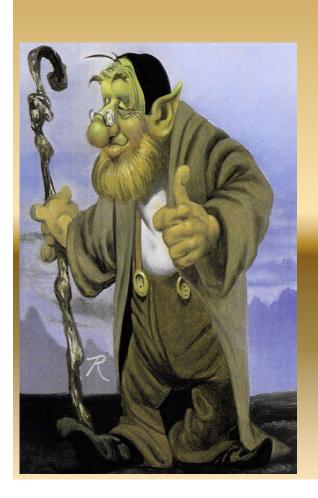
Neuroscience needs Network Science

Weighted simplicial complexes and their representation power of higherorder network data and topology



СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ

ng-makar@mail.ru



АВТОР РИСУНКОВ

Аня Курилович (МФТИ, ФизТех, Москва)



