Бесконечномерные критические случаи в цепочках связанных осцилляторов

Сергей Кащенко

Региональный научно-образовательный математический центр
«Центр интегрируемых систем»
при Ярославском государственном университете им. П. Г. Демидова

15 мая 2023 г.

Постановка задачи

Уравнение Ван-дер-Поля

$$\ddot{u} + a\dot{u} + u = f\left(u, \dot{u}\right), \quad f\left(u, \dot{u}\right) = \dot{u}u^2 \tag{1}$$

возникает во многих прикладных задачах. Рассмотрим систему из N связанных уравнений Ван-дер-Поля

$$\ddot{u}_j + a\dot{u}_j + u_j = f\left(u_j, \dot{u}_j\right) + \sum_{i=1}^{N} \alpha_{ij} u_i, \quad j = 1, \ldots, N. \tag{2}$$

Будем предполагать, что коэффициенты связей каждого элемента с номером j одинаковы для всех j, т.е. $\alpha_{ij} = \alpha_{i-j}$ и цепочка является кольцевой. Это означает, что элемент с номером $j \pm N$ отождествляется с элементом с номером j. Кроме этого предполагаем, что система (2) имеет однородные решения $u_j(t) \equiv u_0(t) \quad (j = 1, \ldots, N)$, где $u_0(t)$ - решение уравнения (1). Тем самым

$$\sum_{j=1}^{N} \alpha_j = 0. \tag{3}$$

Пусть $x_j = 2\pi j N^{-1} \quad (j = 1, \dots, N)$ - равномерно распределенные на некоторой окружности точки с угловой координатой x_j. Значения $u_j(t)$ будем отождествлять со значениями функции двух переменных $u(t, x)$ в точке $x = x_j$.

Будем предполагать, что количество N элементов в (2) является достаточно большим, а значит для параметра $\varepsilon = 2\pi N^{-1}$ выполнено соотношение

$$0 < \varepsilon \leq 1. \tag{4}$$

Это условие позволяет перейти от фиксированных по x переменных $u(t, x_j) \quad (j = 1, \dots, N)$ к непрерывной переменной $x \in [0, 2\pi]$ функции $u(t, x)$. Тогда систему (2) можно записать в более общем виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a\frac{\partial u}{\partial t} + u = f\left(u, \frac{\partial u}{\partial t}\right) + d\int\limits_{-\infty}^{\infty} F(s, \varepsilon) u(t, x + s) ds \tag{5}$$

с условиями

$$u(t, x + 2\pi) \equiv u(t, x) \tag{6}$$

и

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} F(s, \varepsilon) ds = 0. \tag{7}$$

Для произвольно фиксированного значения k положим

$$F_{k\varepsilon}(s) = \frac{1}{2\varepsilon\sigma\sqrt{\pi}} \exp\left(-(\varepsilon\sigma)^{-2}(s + \varepsilon k)^2\right),\ \sigma > 0,\ \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} F_{k\varepsilon}(s) ds = 1\right).$$

Для фиксированной функции $u(t, x)$ при $\sigma \to 0$ имеем

$$\lim_{\sigma \to 0} \int\limits_{-\infty}^{\infty} F_{\varepsilon k}(s) u(t, x + s) ds = u(t, x + \varepsilon k).$$

Например, для диффузионного типа связей

$$\frac{1}{2}u(t,x+\varepsilon)-u(t,x)+\frac{1}{2}u(t,x-\varepsilon) \tag{8}$$

в качестве $F(s,\varepsilon)$ естественно определить функцию

$$F(s,\varepsilon)=\frac{1}{2}F_{\varepsilon}(s)-F_0(s)+\frac{1}{2}F_{-\varepsilon}(s).$$

Диффузионный тип связей (8) является простейшей разностной аппроксимацией оператора диффузии $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. Связь адвективного типа

$$u(t,x+\varepsilon)-u(t,x). \tag{9}$$

является простейшей разностной аппроксимацией оператора адвекции (переноса) $\partial u/\partial x$. Одновременно будем рассматривать связь

$$u(t,x+\varepsilon)-u(t,x-\varepsilon), \tag{10}$$

поскольку и она в той же мере аппроксимирует оператор адвекции.

Применительно к функции $F(s,\varepsilon)$ для (9) будем рассматривать выражение

$$F(s,\varepsilon) = F_\varepsilon(s) - F_0(s), \tag{11}$$

а для (10) - выражение

$$F(s,\varepsilon) = F_\varepsilon(s) - F_{-\varepsilon}(s). \tag{12}$$

Приведем еще близкую к (11) и (12) запись, обобщающую адвективную связь (9):

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} F(s,\varepsilon)u(t,x+s)ds = \int\limits_{-\infty}^{\infty} F_\varepsilon(s)u(t,x+s)ds - u(t,x). \tag{13}$$

В качестве фазового пространства краевой задачи (5), (6) фиксируем пространство начальных условий $u(0,x) \in C_{[0,2\pi]}$, $\left.\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\right|_{t=0} \in C_{[0,2\pi]}$.

Теорема Андронова–Хопфа

$$\dot{u} = (A_0 + \varepsilon A_1)u + F(u).$$

$$A_0 a = i\omega a, \quad \tau = \varepsilon t.$$

$$u = \varepsilon(\xi(\tau)\exp(i\omega t)a + \bar{\xi}(\tau)exp(-i\omega t)\bar{a}) + \varepsilon^2 \dots.$$

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \alpha\xi + \beta\xi|\xi|^2.$$

Исследуем поведение всех решений (5), (6) с достаточно малыми начальными условиями со связями (11), (12) и (13). При изучении локальной динамики центральное место занимает исследование свойств линеаризованных в нуле краевых задач с 2π-периодическими краевыми условиями (6)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a\frac{\partial u}{\partial t} + u = d\int\limits_{-\infty}^{\infty} F(s,\varepsilon)u(t,x+s)ds. \tag{14}$$

Поведение решений этих краевых задач определяется соответственно расположением корней характеристических уравнений

$$\lambda^2 + a\lambda + 1 = d\int\limits_{-\infty}^{\infty} F(s,\varepsilon)\exp(iks)ds, \tag{15}$$

где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Утверждение

Пусть все корни характеристического уравнения (15) имеют отрицательные вещественные части и отделены от нуля при $\varepsilon \to 0$. *Тогда нулевое состояние равновесия (5), (6) асимптотически устойчиво и все решения из некоторой достаточно малой и независящей от* ε *окрестности нулевого состояния равновесия стремятся к нулю при* $t \to \infty$.

Утверждение

Пусть характеристическое уравнение (15) имеет корень с положительной и отделенной от нуля при $\varepsilon \to 0$ *вещественной частью. Тогда нулевое состояние равновесия в (5), (6) неустойчиво и в достаточно малой и независящей от* ε *окрестности нулевого состояния равновесия не может быть аттракторов этой краевой задачи.*

Критические случаи в краевой задаче (5), (6). Адвективная связь (12)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a\frac{\partial u}{\partial t} + u = f\left(u, \frac{\partial u}{\partial t}\right) + d\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(F_\varepsilon(s) - F_{-\varepsilon}(s)\right) u(t, x+s)ds \quad (16)$$

Линеаризованное в нуле уравнение имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a\frac{\partial u}{\partial t} + u = d\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(F_\varepsilon(s) - F_{-\varepsilon}(s)\right) u(t, x+s)ds. \quad (17)$$

Характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + a\lambda + 1 = 2idg(z)\sin z, \quad (18)$$

где $g(z) = \exp\left(-\sigma^2 z^2\right),\ z = \varepsilon k,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Пусть выполнено условие невырожденности

$$a > 0. \tag{19}$$

При $d = 0$ все корни (18) имеют отрицательные вещественные части. Обозначим через $d_0^+ > 0$ наименьшее (если оно существует) значение параметра d, при котором найдется такое значение z_0^+, что при $d = d_0^+$ и $z = z_0^+$ уравнение (18) имеет чисто мнимый корень $\lambda = i\omega \quad (\omega > 0)$. Через $d_0^- < 0$ обозначим наибольшее (если оно существует) значение параметра d, при котором найдется такое z_0^-, что при $d = d_0^-$ и $z = z_0^-$ уравнение (18) имеет чисто мнимый корень $\lambda = i\omega \quad (\omega > 0)$. Пусть z_0 - первый положительный корень уравнения $\operatorname{tg} z = (2\sigma z)^{-1}$. Положим $g_0 = \max\limits_z g(z) \sin z$. Тогда $g_0 = g\left(z_0\right) \sin z_0$.

Lemma

Фиксируем произвольно $a_0 > 0$. *Имеют место равенства*

$$\omega = 1,\ d_0^+ = \frac{1}{2} a g_0^{-1},\ d_0^- = -\frac{1}{2} a g_0^{-1},\ z_0^+ = z_0,\ z_0^- = -z_0.$$

Lemma

Пусть выполнены неравенства

$$d_0^- < d < d_0^+. \tag{20}$$

Тогда все корни (18) имеют отрицательные вещественные части и отделены от нуля при $\varepsilon \to 0$.

Lemma

Пусть выполнено одно из неравенств

$$d_0 > d_0^+ \text{ или } d_0 < d_0^- . \tag{21}$$

Тогда уравнение (18) имеет корень с положительной и отделенной от нуля при $\varepsilon \to 0$ вещественной частью.

Положим в (16)

$$a = a_0 + \varepsilon^2 a_1, \quad d = d_0^+ + \varepsilon^2 d_1. \tag{22}$$

Найдем асимптотику при $\varepsilon \to 0$ всех тех корней $\lambda_m^{\pm}(\varepsilon)$ и $\overline{\lambda}_m^{\pm}(\varepsilon)$ $(m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ уравнения (18), вещественные части которых стремятся к нулю. Через $\Theta = \Theta(\varepsilon, z) \in [0, 1)$ обозначим такое значение, которое дополняет до целого выражение $|z|\varepsilon^{-1}$. Через g^0 обозначим выражение $g^0 = \frac{d^2}{dz^2}\left(g(z)\sin z\right)\Big|_{z=z_0}$. Отметим, что $g^0 < 0$.

Рассмотрим множество целых значений $k = z_0\varepsilon^{-1} + \Theta + m$ $(m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$. Тогда $z = z_0 + \varepsilon(\Theta + m)$.

Lemma

Имеют место асимптотические равенства

$$\lambda_m^+(\varepsilon) = i + \varepsilon^2 \left(L_0(\Theta + m)^2 + L_1 \right) + O\left(\varepsilon^4\right), \qquad (23)$$

где

$$\begin{aligned} L_0 &= (a_0 + 4)^{-1} (ia_0 - 2)\, 2d_0 g^0, \\ L_1 &= (a_0 + 4)^{-1} (ia_0 - 2) \left(2d_0 g_0 - a_1\right). \end{aligned}$$

Уравнение (17) при $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ имеет решения

$$\begin{aligned} u_m(t, x, \varepsilon) = &\exp[i(z_0^{\pm}\varepsilon^{-1} + \Theta + m)x + \\ &+ (i + \varepsilon^2(L_0(\Theta + m)^2 + L_1) + O\left(\varepsilon^4\right))t]. \end{aligned} \qquad (24)$$

Рассмотрим нелинейную краевую задачу

$$\frac{\partial\xi}{\partial\tau} = L_0\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + 2iL_0\Theta\frac{\partial\xi}{\partial x} + \left(L_1 - L_0\Theta^2\right)\xi + \sigma\xi|\xi|^2, \tag{25}$$

$$\xi(\tau, x + 2\pi) \equiv \xi(\tau, x), \tag{26}$$

где $\sigma = -\left(a_0^2 + 4\right)^{-1}(2 + ia_0)$. Определим функцию $U_0(\tau, x)$ равенством

$$U_0(\tau, x) = \xi^3 iA\exp\left(i\left(3\left(z_0\varepsilon^{-1} + \Theta\right)\right)x + 3it\right) - \\ -\overline{\xi}^{\,3} i\,\overline{A}\exp\left(-i\left(3\left(z_0\varepsilon^{-1} + \Theta\right)x\right) - 3it\right), \tag{27}$$

где $A = -\left(a_0^2 + 4\right)^{-1}(2 + ia)$. Через $\varepsilon_n = \varepsilon_n\left(\Theta_0\right)$ ниже обозначается такая последовательность $\varepsilon_n \to 0$, на которой $\Theta\left(\varepsilon_n\right) = \Theta_0$.

Теорема

Пусть выполнены условия (22). Фиксируем произвольно $\Theta_0 \in [0,1)$. *Пусть* $\xi_0(\tau,x)$ *- ограниченное при* $\tau \to \infty,\ x \in [0,2\pi]$ *решение краевой задачи (25), (26) при* $\Theta = \Theta_0$. *Тогда функция*

$$u_0(t,x,\varepsilon) = \varepsilon\left(\xi(\tau,x)\exp\left(i\left(z_0\varepsilon^{-1}+\Theta\right)x+it\right)+\right. \\ \left.+\bar{\xi}(\tau,x)\exp\left(-i\left(z_0\varepsilon^{-1}+\Theta\right)x-it\right)\right)+\varepsilon^3U_0(\tau,x) \quad (28)$$

при $\xi = \xi_0(\tau,x)$ *и* $\varepsilon = \varepsilon_n\left(\Theta_0\right)$ *удовлетворяет краевой задаче (16), (6) с точностью до* $o\left(\varepsilon_n^3\left(\Theta_0\right)\right)$.

Адвективная связь (12) при малых значениях параметра σ

Предполагаем, что параметр σ, фигурирующий в $g(z)$, является достаточно малым

$$\sigma = \varepsilon\sigma_1. \tag{29}$$

В этом случае имеем: $\omega = 1,\ d_0^+ = \frac{1}{2}a_0,\ d_0^- = -\frac{1}{2}a_0$. Главное отличие состоит в том, что для каждого z выполнено равенство $g(z) = 1 - \varepsilon^2\sigma_1^2 z^2 + O\left(\varepsilon^4\right)$. Тем самым значения $z_0^\pm$ определяются неоднозначно: $z_0^+ = 2\pi n + \frac{\pi}{2},\ z_0^- = 2\pi n - \frac{\pi}{2}$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Пусть количество элементов рассматриваемой цепочки N кратно четырем. Тогда значения $z_n^\pm \varepsilon^{-1}$ являются целыми при всех n, а значит, $\Theta\left(\varepsilon, z_n^\pm\right) = 0$.

Асимптотические формулы для корней $\lambda^{+}_{m,n}(\varepsilon)$, $\overline{\lambda}^{+}_{m,n}(\varepsilon)$, $(m,n=0,\pm 1,\pm 2,\ldots)$, вещественные части которых стремятся к нулю при $\varepsilon \to 0$, имеют вид

$$\begin{aligned}\lambda^{+}_{m,n}(\varepsilon) =& i+\varepsilon^{2}\left(a_0^2+4\right)^{-1}(2+ia_0)\left[d_1-a_1-\right.\\ &\left.-d_0\left(\frac{1}{2}m^2+\sigma^2\left(2\pi n+\frac{\pi}{2}\right)^2 2\right)+O\left(\varepsilon^4\right)\right.\end{aligned}.$$

Этим корням отвечают решения линейной краевой задачи (17), (6)

$$u_{m,n}(t,x)=\exp\left[i\left(\left(2\pi n+\frac{\pi}{2}\right)\varepsilon^{-1}+m\right)x+\left(i+O\left(\varepsilon^2\right)\right)t\right].$$

Формальные решения для (16), (6) ищем в виде

$$\begin{aligned} u(t,x,\varepsilon) =& \varepsilon(\xi(\tau,x,y)\exp(it) + \\ & + \bar{\xi}(\tau,x,y)\exp(-it)) + \varepsilon^3 U(t,\tau,x,y), \\ & \tau = \varepsilon^2 t,\ y = \pi\varepsilon^{-1}x, \end{aligned} \tag{30}$$

а $U(t,\tau,x,y)$ - 2π-периодична по t и x и 1-периодична по y. Приходим к краевой задаче для определения амплитуды $\xi(\tau,x,y)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \left(a_0^2+4\right)^{-1}(2+ia_0)\Bigg[-d_0\left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + \sigma^2\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} + i\sigma^2\frac{\pi}{2}\frac{\partial \xi}{\partial y}\right) + \\ + \left(d_1 - a_1 - d_0\sigma^2\frac{\pi^2}{4}\right)\xi - \xi|\xi|^2\Bigg], \end{aligned} \tag{31}$$

$$\xi(\tau, x+2\pi, y) \equiv \xi(\tau,x,y) \equiv \xi(\tau,x,y+1). \tag{32}$$

Теорема

Пусть выполнены условия (19), (22), (29) и пусть $\xi_0(\tau, x, y)$ *является ограниченным при* $\tau \to \infty,\ x \in [0, 2\pi],\ y \in [0, 1]$ *решением краевой задачи (31), (32). Тогда функция (30) при* $\xi = \xi_0(\tau, x, y)$ *с точностью до* $o\left(\varepsilon^3\right)$ *удовлетворяет краевой задаче (16), (6).*

Уравнения (25) и (31) являются уравнениями типа Гинзбурга-Ландау. Известно, что их решения могут иметь сложную, в том числе нерегулярную структуру. В этом плане уравнение (31) существенно сложнее, чем (25), поскольку содержит две пространственные переменные.

Исследование критических случаев для краевой задачи (5), (6) при условии (11)

Краевая задача

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a\frac{\partial u}{\partial t} + a = d\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(F_\varepsilon(s) - F_0(s)\right) u(t, x+s)ds, \qquad (33)$$

$$u(t, x+2\pi) \equiv u(t, x). \qquad (34)$$

Характеристическое для (33), (34) уравнение имеет вид

$$\lambda^2 + a\lambda + 1 = dg(z)\left(\exp(iz) - 1\right), \; z = \varepsilon k, \; k = 0, \pm 1 \pm 2, \dots. \qquad (35)$$

В силу (19) при малых d все корни (35) имеют отрицательные вещественные части и отделены от мнимой оси при $\varepsilon \to 0$. Обозначим через d_0^+ и d_0^- соответственно наименьшее положительное и наибольшее отрицательное значения параметра d, при которых существует такое z_0, что уравнение (35) имеет мнимый корень $i\omega \quad (\omega > 0)$. Подставим в (35) $\lambda = i\omega$. Тогда получим, что

$$\begin{cases} 1 - \omega^2 + dg\left(z_0\right) = dg\left(z_0\right)\cos z_0, \\ a\omega = dg\left(z_0\right)\sin z_0. \end{cases} \tag{36}$$

Отсюда приходим к равенствам

$$\left(dg\left(z_0\right)\right)^2 = \left[1 - \omega^2 + dg\left(z_0\right)\right]^2 + a^2\omega^2,$$

$$\operatorname{tg} z_0 = a\omega\left[1 - \omega^2 + dg\left(z_0\right)\right]^{-1}.$$

Поэтому

$$d = \left(2g(z)\left(\omega^2 - 1\right)\right)^{-1}\left[\left(1-\omega^2\right)^2 + a^2\omega^2\right], \qquad (37)$$

$$\operatorname{tg} z_0 = a\omega\left[1-\omega^2 + \left(2\left(\omega^2-1\right)\right)^{-1}\left(\left(1-\omega^2\right)^2 + a^2\omega^2\right)\right]^{-1}. \qquad (38)$$

Рассмотрим тот корень $\lambda = \lambda(z)$ уравнения (35), который обращается в $i\omega$ при $z = z_0$. Тогда из (35) имеем равенство $\Re\left(\left.\frac{d\lambda(z)}{dz}\right|_{z=z_0}\right) = 0$, а значит

$$0 = \left(a^2 + 4\omega^2\right)^{-1} d_0 g\left(z_0\right)\left[a\left(2\sigma^2 z_0\left(\cos z_0 - 1\right) + \sin z_0\right) + 2\omega\left(2\sigma^2 z_0 \sin z_0\right.\right.$$

Отсюда приходим к выводу, что

$$\omega = -\frac{a}{2}\left(2\sigma^2 z_0 \sin z_0 - \cos z_0\right)^{-1}\left(2\sigma^2 z_0\left(\cos z_0 - 1\right) + \sin z_0\right). \qquad (39)$$

Таким образом, из (39) получим выражение для $\omega = \omega(z)$ как функции параметра z. Подставим его в (38). В итоге получим уравнение относительно параметра z. Находим его корни z_m и значения $\omega\left(z_m\right)$. Учитывая эти значения в правой части (37), получаем значения $d = d\left(z_m\right)$. Затем через d_0^+ обозначаем наименьшее из положительных $d\left(z_m\right)$ (при $\omega\left(z_m\right) > 1$), а через d_0^- - наибольшее из отрицательных $d\left(z_m\right)$ (при $0 < \omega\left(z_m\right) < 1$). Через z_0 обозначим такое из значений z_m, на котором $d_0^{\pm} = d\left(z_m\right)$ и пусть $\omega_0 = \omega\left(z_0\right)$.

Результаты численного анализа показали, что при всех $\sigma > 0$ и $a_0 > 0$ значения d_0^+ и d_0^- определяются однозначно.

Для тех корней $\lambda_m^{\pm}(\varepsilon),\ \overline{\lambda}_m^{\pm}(\varepsilon) \quad (m = 0, \pm1, \pm2, \ldots)$ характеристического уравнения (35) при $d = d_0^{\pm}$, вещественные части которых стремятся к нулю при $\varepsilon \to 0$, имеют место асимптотические разложения

$$\lambda_m(\varepsilon) = i\omega_0 + \varepsilon i(\Theta + m)K_1 + \varepsilon^2(\Theta + m)^2 \left(K_2 + K_{21}\right) + \ldots, \tag{40}$$

где

$$\begin{aligned} K_1 &= -id_0 g(z_0)(a_0 + 2i\omega_0)^{-1}[\exp(iz_0)(1 - 2z_0\sigma^2) + 2z_0\sigma^2], \\ K_2 &= (a_0 + 2i\omega_0)^{-1}[K_1^2 + d_0 g(z_0)[\exp(iz_0)(2\sigma^2(2\sigma^2 z^2 - z - 1) + \\ &\quad + \frac{1}{2}) + 2\sigma^2(1 - 2\sigma^2 z_0^2)]], \\ K_{21} &= (a_0 + 2i\omega_0)^{-1}[-a_1 + d_1 g(z_0)(\exp\left(iz_0\right) - 1)t]. \end{aligned}$$

Отметим, что

$$\Im K_1 = 0,\ \Re K_2 < 0. \tag{41}$$

Построение нормализованной краевой задачи

Рассмотрим формальное выражение

$$
\begin{aligned}
u =&\varepsilon \left(\xi(\tau, y) \exp \left(i \left(z_0\varepsilon^{-1} + \Theta\right) x + it \left(\omega_0 + 1 + \varepsilon\Theta K_1\right)\right) + \right.\\
&+ \left.\overline{\xi}(\tau, y) \exp \left(-i \left(z_0\varepsilon^{-1} + \Theta\right) x - it \left(\omega_0 + 1 + \varepsilon\Theta K_1\right)\right)\right) + \\
&+ \varepsilon^3 U(t, \tau, y),
\end{aligned} \tag{42}
$$

где $\tau = \varepsilon^2 t,\ y = x + \varepsilon t$, а функция $U(t, \tau, y)$ – $\frac{2\pi}{\omega_0}$-периодична по t и 2π-периодична по y. Подставляя (42) в (37) и совершая стандартные действия, приходим к уравнению для определения $U(t, \tau, y)$. Из условия его разрешимости в указанном классе функций получаем краевую задачу для определения неизвестной амплитуды $\xi(\tau, y)$:

$$\frac{\partial\xi}{\partial\tau} = K_2\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} - 2i\Theta K_2\frac{\partial\xi}{\partial y} -$$
$$- \left(\Theta^2 K_2 - a_1 - d_1 g\left(z_0\right)\left(\exp\left(iz_0\right) - 1\right) - a_1\right)\xi - \omega_0\xi|\xi|^2, \quad (43)$$

$$\xi(\tau, y + 2\pi) \equiv \xi(\tau, y). \quad (44)$$

Теорема

Пусть выполнены условия (19) и (22). Фиксируем произвольно $\Theta_0 \in [0, 1)$ и пусть $\xi_0(\tau, x)$ - ограниченное при $\tau \to \infty,\ x \in [0, 2\pi]$ решение краевой задачи (43), (44) при $\Theta = \Theta_0$. Тогда на последовательности $\varepsilon_n(\Theta_0) \to 0$ функция (42) при $\varepsilon = \varepsilon_n\left(\Theta_0\right),\ \xi = \xi_0(\tau, x)$ удовлетворяет уравнению (5) с точностью до $o\left(\varepsilon^3\right)$.

В рассматриваемых критических случаях краевая задача (43), (44) является квазинормальной формой для краевой задачи (5), (6).

Построение квазинормальной формы при малых σ

Корням $\lambda^{\pm}_{m,n}(\varepsilon)$, $\overline{\lambda}_{m,n}(\varepsilon)$ характеристического уравнения (35), вещественные части которых стремятся к нулю при $\varepsilon \to 0$, отвечают решения краевой задачи (33), (34)

$$u(t,x,\varepsilon) = \exp\left(i\left(\left(z_0 + 2\pi n\right)\varepsilon^{-1} + \Theta\left(\varepsilon, z_0\right) + m\right)x + i\lambda^{\pm}_{m,n}(\varepsilon)t\right).$$

Асимптотические формулы для $\lambda^{\pm}_{m,n}(\varepsilon)$:

$$\begin{aligned}
\lambda^{\pm}_{m,n}(\varepsilon) &= i\omega\left(z_0\right) + \varepsilon i(\Theta + m)K_{10} + \\
&+ \varepsilon^2(\Theta + m)^2 K_{20} + \varepsilon^2\left(z_0 + 2\pi n\right)^2 K_{21} + O\left(\varepsilon^3\right), \\
K_{10} &= -id^{\pm}_0\left(a_0 + 2i\omega_0\right)^{-1}\exp\left(iz_0\right), \ \Im K_{10} = 0, \\
K_{20} &= \left(a_0 + 2i\omega_0\right)^{-1}\left(-K^2_{10} + \frac{1}{2}d^{\pm}_0\exp\left(iz_0\right)\right), \\
K_{21} &= -\left(a_0 + 2i\omega_0\right)^{-1} d^{\pm}_0 \sigma^2_1\left(\exp\left(iz_0\right) - 1\right), \ \Re K_{20} < 0, \ \Re K_{21} < 0, \\
K_{22} &= \left(a_0 + i\omega_0\right)^{-1}\left(-a_1 + d_1\left(\exp\left(iz_0\right) - 1\right)\right).
\end{aligned}$$

Для построения квазинормальной формы введем в рассмотрение формальное выражение

$$u(t,x,\varepsilon) = \varepsilon\left(\xi(\tau,y,s)\exp\left(i\left(z_0\varepsilon^{-1}+\Theta\right)x + it\left(\omega_0+\varepsilon\Theta K_{10}\right)\right) + \right.$$
$$\left. +\bar{\xi}(\tau,y,s)\exp\left(-i\left(z_0\varepsilon^{-1}+\Theta\right)x - it\left(\omega_0+\varepsilon\Theta K_{10}\right)\right)\right)+\varepsilon^3 U(t,\tau,x,y,s), \tag{45}$$

где $\tau = \varepsilon^2 t,\ y = x+\varepsilon t$, а функция $U(t,\tau,x,y,s)$ является $2\pi\left(\omega_0+\varepsilon\Theta K_{10}\right)^{-1}$-периодичной по t, 2π-периодичной по $\left(z_0\varepsilon^{-1}+\Theta\right)x$, 2π-периодичной по y и 1-периодичной по $s = Nx = 2\pi\varepsilon^{-1}x$. Подставим (45) в (5) и будем приравнивать коэффициенты при одинаковых степенях ε в левой и правой частях получившегося асимптотического равенства.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a\frac{\partial u}{\partial t} + u = d_0\left(\exp[(iz_0) - 1\right) u + \Phi(t, \tau, x, y, s). \qquad (46)$$

Для разрешимости (46) в классе $\frac{2\pi}{\omega_0}$-периодических по t функций необходимо, чтобы выражение $\Phi(t, \tau, x, y, s)$ не содержало гармоник по t с частотами $\pm i\omega$. Это требование выполняется при условии

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = K_{20}\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + K_{21}\frac{\partial^2 \xi}{\partial s^2} - 2i\Theta K_{20}\frac{\partial \xi}{\partial y} - iz_0 K_{21}\frac{\partial \xi}{\partial s} + \\ + \left[-a_1 - K_{22} - \Theta^2 K_{20} + z_0^2 K_{21}\right]\xi - \omega_0 \xi|\xi|^2, \qquad (47)$$

$$\xi(\tau, y + 2\pi, s) \equiv \xi(\tau, y, s) \equiv \xi(\tau, y, s + 1). \qquad (48)$$

Теорема

Пусть выполнены условия (19), (22), (29). Фиксируем произвольно $\Theta_0 \in [0,1)$. *Пусть* $\xi_0(\tau, y, s)$ *- ограниченное при* $\tau \to \infty,\ y \in [0, 2\pi],\ s \in [0,1]$ *решение краевой задачи (47), (48). Тогда на последовательности* $\varepsilon_n(\Theta_0) \to 0$ *функция (45) при* $\xi = \xi_0(\tau, y, s),\ \Theta = \Theta_0$ *удовлетворяет краевой задаче (5), (6) с точностью до* $o\left(\varepsilon^3\right)$.

Исследование критических случаев. Линейный анализ в случае (12)

Характеристическое уравнение для линеаризованной краевой задачи

$$\lambda^2 + a\lambda + 1 = i\lambda d g(z)\sin z \quad (z = \varepsilon k,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \tag{49}$$

При условии $a_0 > 0$ и при $d = 0$ все корни (49) имеют отрицательные вещественные части и отделены от нуля при $\varepsilon \to 0$. В том случае, когда найдутся такие d_0 и z_0, что уравнение (49) имеет мнимый корень $\lambda = i\omega$, выполнено равенство

$$1 - \omega^2 + i a_0 \omega = -\omega d_0 g\left(z_0\right)\sin z_0.$$

Отсюда получаем, что $1 - \omega^2 = -\omega d_0 g\left(z_0\right)\sin z_0, \quad a_0\omega = 0$. Эта система уравнений, очевидно, несовместна. Поэтому для каждых d и z все корни (49) имеют отрицательные и отделенные от нуля при $\varepsilon \to 0$ вещественные части. Это означает, что в рассматриваемом случае в задаче об устойчивости решений критических случаев не возникает.

Линейный анализ в случае (11)

Характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + a\lambda + 1 = \lambda d g(z)(\exp(iz) - 1) \quad (z = \varepsilon k,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \quad (50)$$

В критическом случае имеем равенства $d = d_0,\ z = z_0,\ \lambda = i\omega_0$ и эти величины связаны равенствами

$$1 - \omega_0^2 = -\omega_0 d_0 g(z_0) \sin z_0, \quad (51)$$

$$a\omega_0 = \omega_0 d_0 g(z_0)(\cos z_0 - 1). \quad (52)$$

Из (51) вытекает, что $\omega_0 \neq 0$, а из (52) тогда находим, что

$$d_0 = -a\left(2g(z_0)\sin^2\frac{z_0}{2}\right)^{-1}. \quad (53)$$

Отсюда получаем, что при $d_0 > 0$ система (51), (52) неразрешима, т.е. при $d > 0$ критические случаи в рассматриваемой задаче не реализуются. Поэтому ниже предполагаем, что

$$d < 0. \quad (54)$$

Положим $g_0 = \max\limits_z 2g(z)\sin\left(\frac{z}{2}\right) = 2g\left(z_0\right)\sin^2\left(\frac{z_0}{2}\right)$. Из (51) и (52) тогда находим, что $d_0 = -a_0 g_0^{-1}$. Из (51) получаем, что

$$\omega_0 = \frac{1}{2}\left(d_0 g\left(z_0\right)\sin z_0 + \left(d_0^2 g^2\left(z_0\right)\sin^2 z_0 + 4\right)^{\frac{1}{2}}\right).$$

Lemma

При каждых z и $d > d_0$, а также при $d = d_0$ и $z \neq z_0$ все корни характеристического уравнения (50) имеют отрицательные и отделенные от нуля при $\varepsilon \to 0$ вещественные части. При $d = d_0$ и $z = z_0$ уравнение (50) имеет корень $\lambda = i\omega_0 \ \left(\omega_0 > 0\right)$.

Построение квазинормальной формы

Для изучения решений нелинейной краевой задачи с достаточно малыми начальными условиями введем в рассмотрение формальное выражение

$$u(t,x,\varepsilon) = \varepsilon\left(\xi(\tau,x)\exp\left(i\left(z_0\varepsilon^{-1}+\Theta\right)x + i\omega_0 t\right) + \right.$$
$$\left. + \bar{\xi}(\tau,x)\exp\left(-i\left(z_0\varepsilon^{-1}+\Theta\right)x - i\omega_0 t\right)\right) + \varepsilon^3 U(t,\tau,x,y), \quad (55)$$

где $\tau = \varepsilon^2 t,\ y = \left(z_0\varepsilon^{-1}+\Theta\right)x$, а функция $U(t,\tau,x,y)$ является $\frac{2\pi}{\omega_0}$-периодической по t и 2π-периодической по x и y. После стандартных действий для $U(t,\tau,x,y)$ получаем уравнение, из условия разрешимости которого в указанном классе функций приходим к краевой задаче для определения амплитуды $\xi(\tau,x)$:

$$\frac{\partial\xi}{\partial\tau} = \lambda_{10}\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} - iz\Theta\frac{\partial\xi}{\partial x} + \left[\lambda_1 + \Theta^2\lambda_{10}\right]\xi - \omega_0\xi|\xi|^2, \quad (56)$$

$$\xi(\tau,x+2\pi) \equiv \xi(\tau,x). \quad (57)$$

Теорема

Пусть выполнены условия (19), (22). Фиксируем произвольно $\Theta_0 \in [0,1)$. *Пусть* $\xi_0(\tau, x)$ *- ограниченные при* $\tau \to \infty,\ x \in [0, 2\pi]$ *решение краевой задачи (56), (57) при* $\Theta = \Theta_0$. *Тогда на последовательности* $\varepsilon_n\left(\Theta_0\right) \to 0$ *функция (55) при* $\xi(\tau, x) = \xi_0(\tau, x)$ *и при* $\Theta = \Theta_0$ *удовлетворяет краевой задаче с точностью до* $o\left(\varepsilon^3\right)$.

Таким образом нелокальная динамика в (56), (57) определяет локальное поведение решений исходной краевой задачи при адвективной связи (11).

Исследование критических случаев при малых значениях параметра σ

Пусть выполнено условие $\sigma = \varepsilon\sigma_1$. Тогда $g(z) = 1 - \varepsilon^2\sigma_1^2 z^2 + O\left(\varepsilon^4\right)$, $\omega_0 = 1 + O\left(\varepsilon^2\right)$, $z_0 = \pi(2n+1) + O(\varepsilon)$, $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$, $d_0 = -\frac{1}{2}a_0$. Таким образом в отличие от условий предыдущего раздела значения z_0 определяются неоднозначно. Тогда корни $\lambda_{m,n}(\varepsilon)$, $\overline{\lambda}_{m,n}(\varepsilon)$ уравнения (50), вещественные части которых стремятся к нулю при $\varepsilon \to 0$, представимы в виде

$$\lambda_{m,n}(\varepsilon) = i + \varepsilon(\Theta + m)\lambda_1 + \varepsilon^2\left[(\Theta+m)^2\lambda_{20} + \lambda_{21} + \pi^2(1+2n)^2\lambda_{22}\right] + \ldots,$$

где

$$\lambda_1 = i\frac{a_0}{4},\ \lambda_{20} = -\frac{a_0}{8} + \frac{ia_0^2}{32},\ \lambda_{21} = -\frac{a_1}{2} - d_1,\ \lambda_{22} = -\frac{a_0\sigma_1^2}{2}.$$

Для построения квазинормальной формы рассмотрим выражение

$$u(t,x,\varepsilon) = \varepsilon\left(\xi(\tau,y,s)\exp\left(it_1\right) + \overline{\xi}(\tau,y,s)\exp\left(-it_1\right)\right) + \varepsilon^3 U(t_1,\tau,y,s). \tag{58}$$

Здесь $\tau = \varepsilon^2 t,\ t_1 = \left(1 + \varepsilon\Theta\frac{a_0}{4}\right)t,\ y = x + \varepsilon\frac{a_0}{4}t_1,\ s = \varepsilon^{-1}x$, а функция $U(t_1,\tau,y,s)$ является 2π-периодической по t_1 и y, π-антипериодической по s. Подставляя (58) и производя стандартные действия, приходим к краевой задаче для определения $\xi(\tau,y,s)$:

$$\frac{\partial\xi}{\partial\tau} = \lambda_{20}\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} + \lambda_{21}\frac{\partial^2\xi}{\partial s^2} - 2i\Theta\lambda_{20}\frac{\partial\xi}{\partial y} + \left[\lambda_{21} + \Theta^2\lambda_{20}\right]\xi - \xi|\xi|^2,$$

$$\xi(\tau, y+2\pi, s) \equiv \xi(\tau,y,s) \equiv -\xi(\tau,y,s+\pi). \tag{59}$$

Важно отметить, что при четных N выполнено равенство $\Theta = \Theta(\varepsilon) \equiv 0$, а при нечетных N имеем $\Theta(\varepsilon) \equiv \frac{1}{2}$.

Теорема

Пусть выполнены условия (19), (22), (29) и пусть $\xi_0(\tau, y, s)$ *- ограниченное при* $\tau \to \infty,\ y \in [0, 2\pi],\ s \in [0, \pi]$ *решение краевой задачи (59). Тогда функция (58) при* $\xi = \xi_0(\tau, y, s)$ *удовлетворяет исходному уравнению с точностью до* $o\left(\varepsilon^3\right)$ *.*

Выводы

В задаче о локальной динамике цепочек уравнений Ван-дер-Поля с однонаправленными связями выделены критические случаи в задаче об устойчивости состояния равновесия. Эти критические случаи имеют бесконечную размеренность. Построены аналоги нормальных форм – квазинормальные формы, которые являются краевыми задачами параболического типа. Их нелокальная динамика определяет локальную структуру решений исходного уравнения. Решения квазинормальных форм позволяют построить главные члены асимптотики решений. Полученные результаты применимы и к другим цепочкам уравнений и систем уравнений с различными типами связей. Полученные асимптотические формулы для решений могут быть использованы для инженерных расчетов.

Спасибо за внимание!