

# **Псевдокумулянты и динамика отклонений от распределения Лоренца в задачах статистической физики**

**Д.С. Голдобин**

Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь

Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь

**Фин.: бюджетная тема № 121112200078-7**

Нелинейные дни в Саратове для молодых— 19.05.2023

# Распределение Лоренца

## Распределение Лоренца: примеры

- Примеры
  - Lamb, *Theory of an Optical Maser*, Phys. Rev. **134**, A1429 (1964)
  - Использование теоремы о вычетах

$$L(y) = \frac{\pi^{-1} \Delta}{\Delta^2 + (y - y_0)^2}$$

$$f(z(y), y | Z) = 0, \quad Z = \int L(y) z(y) dy = \\ = z(y_0 \pm i\Delta)$$

$$f(z(y_0 \pm i\Delta), y_0 \pm i\Delta | z(y_0 \pm i\Delta)) = 0$$

Якубович, *О динамике процессов в средах с неоднородным уширением линии рабочего вещества*, ЖЭТФ **55**, 304 (1968)

# Распределение Лоренца

## Распределение Лоренца: примеры

- Примеры
  - Lamb, *Theory of an Optical Maser*, Phys. Rev. **134**, A1429 (1964)
  - Использование теоремы о вычетах  
Якубович, *О динамике процессов в средах с неоднородным уширением линии рабочего вещества*, ЖЭТФ **55**, 304 (1968)
- Локализация Андерсона
  - Модель Ллойда в 3D (Р.Л. для неоднородности потенциала)  
Lloyd, *Exactly solvable model of electronic states in a three-dimensional disordered Hamiltonian: non-existence of localized states*, J. Phys. C: Solid State Phys. **2**, 1717 (1969)
- Ott–Antonsen theory [Chaos **18**, 037113 (2008); **19**, 023117 (2009)]

$$L(y) = \frac{\pi^{-1} \Delta}{\Delta^2 + (y - y_0)^2}$$

$$w_{\text{wL}}(\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\pi^{-1} \Delta}{\Delta^2 + (\varphi - \varphi_0 - 2n\pi)^2} = \frac{1}{2\pi} \frac{1 - e^{-2\Delta}}{1 - e^{-\Delta} \cos(\varphi - \varphi_0)}$$

+ Montbrió, Pazó, Roxin, Phys. Rev. X **5**, 021028 (2015)

псевдокумулянты & нелоренцево распределение

# “Проблемы” с распределением Лоренца

- Моменты (и кумулянты) расходятся

$$\langle y^{n \geq 1} \rangle = \infty$$

**Характеристическая функция:**

$$F(k) = \langle e^{ikV} \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \textcolor{blue}{M}_n \frac{(ik)^n}{n!}, \quad \textcolor{blue}{M}_n \equiv \langle V^n \rangle$$

$\ln(\text{харкт. ф-ция})$  = генерирующая ф-ция кумулянтов

$$\Phi(k) = \ln F(k) = \sum_{n=1}^{\infty} \textcolor{blue}{K}_n \frac{(ik)^n}{n!}$$

“кумулянты”:

$$K_1 = \langle V \rangle, \quad K_2 = \langle V^2 \rangle - \langle V \rangle^2, \quad \textcolor{blue}{K}_n = \langle V^n \rangle - \sum_{m=1}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(m-1)!(n-m)!} \langle V^m \rangle \textcolor{blue}{K}_{n-m}$$

$$\text{independent } x, y : \quad F_{x+y}(k) = \langle e^{ik(x+y)} \rangle = \langle e^{ikx} \rangle \langle e^{iky} \rangle = F_x(k) F_y(k)$$

$$\ln F_{x+y}(k) = \ln F_x(k) + \ln F_y(k) \Rightarrow \textcolor{blue}{K}_{x+y,n} = \textcolor{blue}{K}_{x,n} + \textcolor{blue}{K}_{y,n}$$

# Характеристическая ф-ция для Р.Л.

$$F(k) = \sum_{n=0}^{\infty} \textcolor{blue}{M}_n \frac{(ik)^n}{n!}, \quad \textcolor{blue}{M}_n \equiv \langle V^n \rangle$$

$$\text{P.V.} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikV} \frac{\pi^{-1} a \, dV}{a^2 + (V - v)^2} = e^{ikv - a|k|}$$

$$\Phi(k) = \ln F(k) = \sum_{n=1}^{\infty} \textcolor{blue}{K}_n \frac{(ik)^n}{n!}$$

$$\Phi(k) = ivk - a | k |$$

# Характеристическая ф-ция и псевдокумулянты

$$\Phi_{\text{LD}}(k) = ivk - a | k | \quad w_{\text{LD}}(V) = \frac{\pi^{-1}a}{a^2 + (V - v)^2}$$

$$\Phi(k) = \ln \left\langle e^{ikV} \right\rangle \quad \Rightarrow \quad \Phi(-k) = \Phi^*(k)$$

$$\begin{aligned} \Phi(k) = & -(a \operatorname{sign}(k) - iv)k - (q_2 + ip_2 \operatorname{sign}(k)) \frac{k^2}{2} - \\ & - (q_3 \operatorname{sign}(k) + ip_3) \frac{k^3}{3} - \dots \end{aligned}$$

«Псевдокумулянты» (“pseudocumulants”)  $\mathbf{W}_n$ :

$$W_1 \equiv a - iv, \quad W_n \equiv q_n + ip_n$$

# Квадратичные нейроны–пороговые интеграторы (quadratic integrate-and-fire neurons, QIFs)

Популяция  $N$  синаптически связанных QIF:

$$\begin{aligned}\dot{V}_j &= V_j^2 + I_j, \quad I_j = I_0(t) + \eta_j + \sigma \xi_j(t), \\ \langle \xi_j(t) \xi_n(t') \rangle &= 2\delta_{jn} \delta(t - t'), \quad g(\eta) = \frac{\Delta}{\pi[\Delta^2 + (\eta - \eta_0)^2]}, \\ I_0(t) &= I(t) + J_s(t).\end{aligned}$$

Термодинамический предел бесконечного  $N$ :  $s(t) = r(t)$  – средняя по ансамблю частота генерации импульсов

Уравнение Фоккера–Планка для плотности вероятности  $\eta$ -подансамбля:

$$\frac{\partial w(V, t | \eta)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial V} \left[ (V^2 + I_\eta) w(V, t | \eta) \right] = \sigma^2 \frac{\partial^2 w(V, t | \eta)}{\partial V^2},$$

$$I_\eta = I(t) + \eta + J_r(t)$$

псевдокумулянты & нелоренцево распределение

# Квадратичные нейроны–пороговые интеграторы

$$\dot{V}_j = V_j^2 + I_j, \quad I_j = I_0(t) + \eta_j + \sigma \xi_j(t)$$

$$I_\eta(t) = I(t) + \eta + J_r(t)$$

Для  $\eta$ -подансамбля:

$$\mathcal{F}_\eta(k) = \left\langle e^{ikV_\eta} \right\rangle = \text{P.V.} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikV} w(V, t | \eta) dV$$

$$\partial_t \mathcal{F}_\eta(k) = \text{P.V.} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikV} \frac{\partial w(V, t | \eta)}{\partial t} dV$$

$$\frac{\partial w(V, t | \eta)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial V} \left[ (V^2 + I_\eta) w(V, t | \eta) \right] + \sigma^2 \frac{\partial^2 w(V, t | \eta)}{\partial V^2}$$

$$\partial_t \mathcal{F}_\eta = ik \left[ I_\eta \mathcal{F}_\eta - \partial_k^2 \mathcal{F}_\eta \right] - \sigma^2 k^2 \mathcal{F}_\eta$$

Для всего ансамбля:  $F(k, t) = \int \mathcal{F}_\eta(k, t) g(\eta) d\eta$

$$\boxed{\partial_t F = ik \left[ I_0 F - \partial_k^2 F \right] - |k| \Delta F - \sigma^2 k^2 F}$$

## Квадратичные нейроны–пороговые интеграторы

$$\dot{V}_j = V_j^2 + I_j, \quad I_j = I_0(t) + \eta_j + \sigma \xi_j(t)$$

$$I_\eta(t) = I(t) + \eta + J_r(t)$$

$$\partial_t F = ik \left[ I_0 F - \partial_k^2 F \right] - |k| \Delta F - \sigma^2 k^2 F$$

$$F_{\text{LD}}(k) = e^{ikv - a|k|}, \quad \Phi_{\text{LD}}(k) = ivk - a|k| \quad F(k) = e^{\Phi(k)}$$

$$\partial_t \Phi = ik \left[ I_0 - \partial_k^2 \Phi - (\partial_k \Phi)^2 \right] - |k| \Delta - \sigma^2 k^2$$

$$\sigma = 0 : \Phi = ikv - a|k|,$$

$$\dot{v} = I_0 + a^2 - v^2, \quad \dot{a} = 2av + \Delta, \quad r = \frac{a}{\pi}$$

E. Montbrio, D. Pazo, A. Roxin, *Macroscopic description for networks of spiking neurons*, Phys. Rev. X 5, 021028 (2015)

# Квадратичные нейроны–пороговые интеграторы

$$\dot{V}_j = V_j^2 + I_j, \quad I_j = I_0(t) + \eta_j + \sigma \xi_j(t)$$

$$\partial_t \Phi = ik \left[ I_0 - \partial_k^2 \Phi - (\partial_k \Phi)^2 \right] - |k| \Delta - \sigma^2 k^2$$

$$I_\eta(t) = I(t) + \eta + J_r(t)$$

$$\Phi = -(a \operatorname{sign}(k) - iv)k - (q_2 + ip_2 \operatorname{sign}(k)) \frac{k^2}{2}$$

$$- (q_3 \operatorname{sign}(k) + ip_3) \frac{k^3}{3} - \dots$$

$$\Phi_{\text{LD}}(k) = ivk - a |k|$$

$$\Phi(k) = \ln \langle e^{ikV} \rangle \quad \Rightarrow \quad \Phi(-k) = \Phi^*(k)$$

$$w_{\text{LD}}(V) = \frac{\pi^{-1} a}{a^2 + (V - v)^2}$$

«Псевдокумулянты» (“pseudocumulants”)  $\mathbf{W}_n$ :

$$\mathbf{W}_1 \equiv a - iv, \quad \mathbf{W}_n \equiv q_n + ip_n$$

$$\dot{W}_m = (\Delta - iI_0) \delta_{1m} + 2\sigma^2 \delta_{2m} + im \left( -m W_{m+1} + \sum_{n=1}^m W_n W_{m+1-n} \right)$$

# Геометрический смысл

$$\Phi = -(a \operatorname{sign}(k) - iv)k - (q_2 + ip_2 \operatorname{sign}(k))\frac{k^2}{2} - (q_3 \operatorname{sign}(k) + ip_3)\frac{k^3}{3} - \dots$$

$$\Phi(k) = \ln \left\langle e^{ikV} \right\rangle \quad \Rightarrow \quad \Phi(-k) = \Phi^*(k)$$

*a*: *width* of the “Lorentzian” part of the distrib, for QIFs is always *firing rate*;

*v*: always “*P.V. mean*” of the distribution;

*q*<sub>2</sub>: an analogue of *kurtosis* for Gaussian;

*p*<sub>2</sub>: an analogue of *skewness* for Gaussian.

$$w_{\text{LD}}(V) = \frac{\pi^{-1}a}{a^2 + (V - v)^2}$$

$$w(V, t) = \left( 1 + \frac{q_2(t)}{2} \frac{\partial^2}{\partial V^2} - \frac{p_2(t)}{2} \frac{\partial^2}{\partial V \partial a} + \dots \right) w_{\text{LD}}(V, t)$$

# Геометрический смысл: обычные кумулянты vs «псевдокумулянты»

$$\Phi = -(a \operatorname{sign}(k) - iv)k - (q_2 + ip_2 \operatorname{sign}(k)) \frac{k^2}{2} - (q_3 \operatorname{sign}(k) + ip_3) \frac{k^3}{3} - \dots$$

$$F(k) = \langle e^{ikV} \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} M_n \frac{(ik)^n}{n!}, \quad M_n \equiv \langle V^n \rangle$$

$$w_{V \rightarrow \infty} < \frac{C}{V^{1+\alpha}},$$

$$\langle V^n \rangle : \int^{+\infty} V^n w(V) dV \propto \int^{+\infty} \frac{dV}{V^{1+\alpha-n}} \propto \frac{1}{V^{\alpha-n}} \Big|^{+\infty}$$

Если  $\langle V^n \rangle$  ( $n < \alpha$ ) существуют, то  $p_n = 0$  для чётных  $n$ ,  
 $q_n = 0$  для нечёт.  $n$ ;

все младшие элементы соответствуют «обычным» моментам/кумулянтам

$$W_{n<\alpha} = q_n + ip_n = \frac{-i^n}{(n-1)!} K_n = -n \frac{d\Phi(k)}{dk} \Big|_{k=0}$$

псевдокумулянты & нелоренцево распределение

# Псевдокумулянты & преобразование Фенхеля (Legendre–Fenchel transform)

$$F(k) = \langle e^{ikV} \rangle$$
$$\langle V \rangle = \frac{\partial}{\partial ik} \langle e^{ikV} \rangle \Big|_{k=0}$$
$$F_{LD}(k) = e^{ikv - a|k|}$$

Модель Изинга в магнитном поле  $H$ :

$$F(H) = \langle e^{S_z H} \rangle$$
$$\langle S_z \rangle = \frac{\partial}{\partial H} \langle e^{S_z H} \rangle \Big|_{H=0}$$

Ниже температуры Кюри (ферромаг.)

A. Vasiliev, *Functional Methods in Quantum Field Theory and Statistical Physics*, (London: Gordon and Breach, 1998)

Tobias Kühn, Moritz Helias, *Expansion of the effective action around non-Gaussian theories*, J. Phys. A: Math. Theor. **51**, 459502 (2018)

Moritz Helias, David Dahmen, *Statistical Field Theory for Neural Networks*, Lecture Notes in Physics, vol. 970 (2020)

$$\dot{V}_j = V_j^2 + I_j, \quad I_j = I_0(t) + \eta_j + \sigma \xi_j(t)$$

$$I_\eta(t) = I(t) + \eta + Jr(t)$$

## Примеры

E. Montbrio, D. Pazo, A. Roxin, *Macroscopic description for networks of spiking neurons*, Phys. Rev. X 5, 021028 (2015) + внутренний шум

$$\begin{aligned}\dot{r} &= \Delta / \pi + 2rv + p_2 / \pi, \\ \dot{v} &= I_0 - \pi^2 r^2 + v^2 + q_2, \\ \dot{q}_2 &= 2\sigma^2 + 4(p_3 + q_2 v - \pi p_2 r), \\ \dot{p}_2 &= 4(-q_3 + \pi q_2 r + p_2 v).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \ln r &= \frac{\Delta}{\pi r} + 2\bar{v} + \frac{p_2}{\pi r}, \\ p_2 \ll 1 : \quad \bar{v} &< 0 \\ \dot{q}_2 &= -4(-v)q_2 - 4\pi r p_2 + 2\sigma^2 + \dots, \\ \dot{p}_2 &= +4\pi r q_2 - 4(-v)p_2 + \dots.\end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt} = 0 : \quad \frac{p_2}{\pi} = \frac{r\sigma^2}{2(v^2 + \pi^2 r^2)} + \dots, \quad q_2 = \frac{(-v)\sigma^2}{2(v^2 + \pi^2 r^2)} + \dots.$$

I. Ratas, K. Pyragas, *Noise-induced macroscopic oscillations in a network of synaptically coupled quadratic integrate-and-fire neurons*, Phys. Rev. E 100, 052211 (2019)

MPR модель + шум + конечная продолжительность синапт. импульса

$$S = V_{\text{th}} \int_{V_{\text{th}}}^{+\infty} w(V, t) dV = V_{\text{th}} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \arctan \frac{V_{\text{th}} - v}{a} + \frac{q_2 a (V_{\text{th}} - v) + p_2 [(V_{\text{th}} - v)^2 - a^2] / 2}{\pi [a^2 + (V_{\text{th}} - v)^2]^2} \right)$$

$$\dot{V}_j = V_j^2 + I_j , \quad I_j = I_0(t) + \eta_j + \sigma \xi_j(t)$$

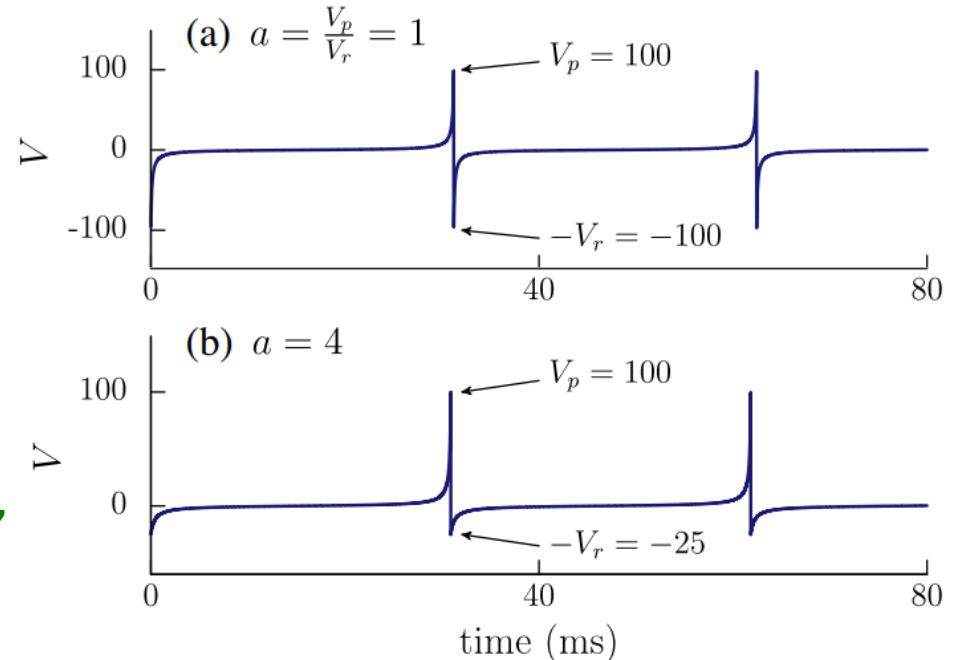
$$I_\eta(t) = I(t) + \eta + Jr(t)$$

## Примеры

M. di Volo, A. Torcini, *Transition from Asynchronous to Oscillatory Dynamics in Balanced Spiking Networks with Instantaneous Synapses*, Phys. Rev. Lett. **121**, 128301 (2018)

$$\begin{aligned}\dot{r} &= \left( \frac{g_0 \Delta_0}{\pi} + 2v \right) r + \frac{p_2}{\pi}, \\ \dot{v} &= \sqrt{K}(I_0 - g_0 r) - \pi^2 r^2 + v^2 + q_2, \\ \dot{q}_2 &= g_0^2 r + 4(q_2 v - \pi p_2 r), \\ \dot{p}_2 &= -\frac{g_0^2 \Delta_0}{\sqrt{K}} r + 4(\pi q_2 r + p_2 v).\end{aligned}$$

E. Montbrió, D. Pazó, *Exact Mean-Field Theory Explains the Dual Role of Electrical Synapses in Collective Synchronization*, Phys. Rev. Lett. **125**, 248101 (2020) + шум



$$\dot{V}_j = V_j^2 + I_j, \quad I_j = I_0(t) + \eta_j + \sigma \xi_j(t)$$

$$I_\eta(t) = I(t) + \eta + J_r(t)$$

## Сходимость и обрывание

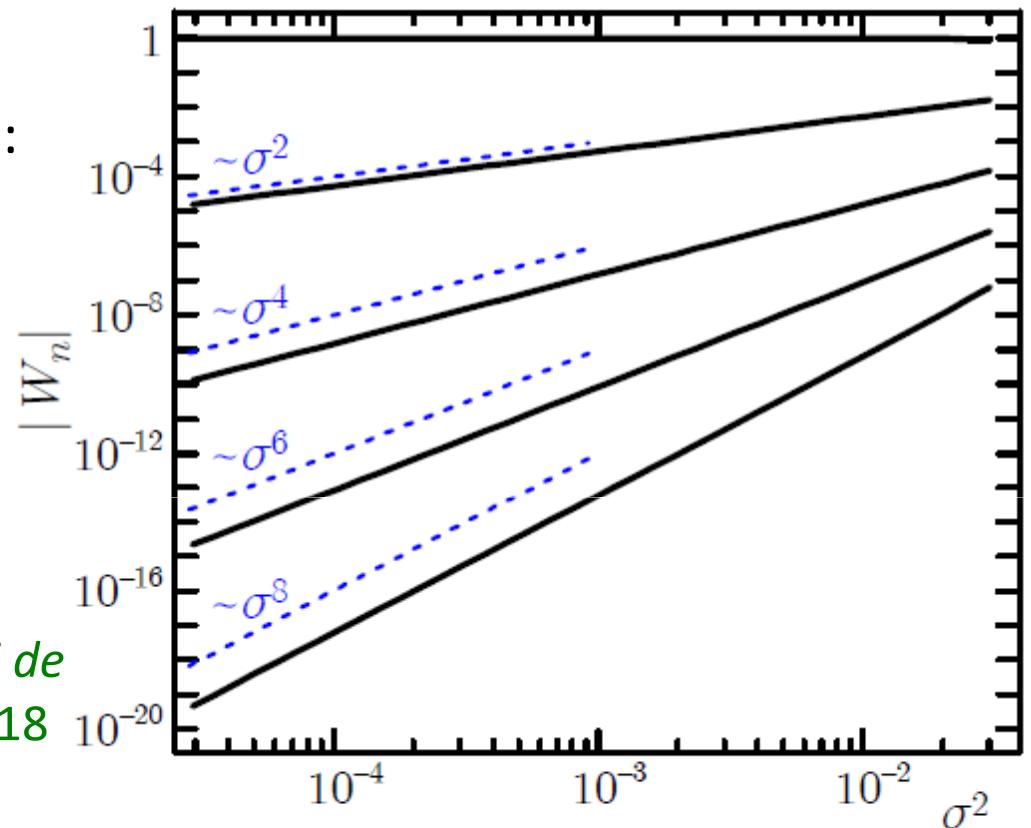
$$\dot{W}_m = (\Delta - iI_0)\delta_{1m} + 2\sigma^2\delta_{2m} + im\left(-mW_{m+1} + \sum_{n=1}^m W_n W_{m+1-n}\right)$$

При ненулевой гетерогенности и  
“вблизи” стационарных состояний:

$$W_m \sim \sigma^{2(m-1)}$$

Теорема Марцинкевича:

J. Marcinkiewicz, *Sur une propriété de la loi de Gauss*, Mathematische Zeitschrift **44**, 612–618 (1939)



$$I_0 = 0.1, \eta_0 = -1, J_0 = 1, \Delta_\eta = 0.1 \text{ and } \Delta_J = 0.1.$$

# Аналог теоремы Марцинкевича

J. Marcinkiewicz, *Sur une propriété de la loi de Gauss*, Mathematische Zeitschrift **44**, 612–618 (1939)

Dezember 1939

## Sur une propriété de la loi de Gauß.

Par

J. Marcinkiewicz (Wilno).

1. Le but principal de cette note est de démontrer le

Théorème 1. Soient  $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$  une suite finie ou infinie de variables aléatoires indépendantes ayant la même loi de probabilité  $V(x)$  qui satisfait à la condition suivante

$$(1.1) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^r dV(x) < \infty \quad (r = 1, 2, 3, \dots).$$

Supposons que les deux sommes

$$(1.2) \quad \sum a_i x_i, \quad \sum b_i x_i$$

existent et sont égales, c'est à dire qu'elles ont la même fonction de distribution. Sous ces hypothèses ou bien les suites  $\{|a_i|\}$  et  $\{|b_i|\}$  ne diffèrent que par l'ordre des termes ou bien  $V(x)$  est la loi de Gauß c'est à dire que

$$(1.3) \quad V(x) = \Phi(ax + b); \quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

où  $a$  et  $b$  sont deux constantes qui peuvent être finies ou infinies<sup>1</sup>).

$$\langle e^{ikx} \rangle = e^{iK_1 k - \frac{1}{2} K_2 k^2}$$

$$\langle e^{ikx} \rangle = e^{f(k)}$$

$$\langle e^{ikx} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} w(x) e^{ikx} dx$$

$$\langle e^{ikV} \rangle = e^{ivk - a|k|}$$

$$\langle e^{ikx} \rangle = e^{\Phi(k)}$$

$$\dot{V}_j = V_j^2 + I_j, \quad I_j = I_0(t) + \eta_j + \sigma \xi_j(t)$$

# Моделирование больших (конечных) сетей

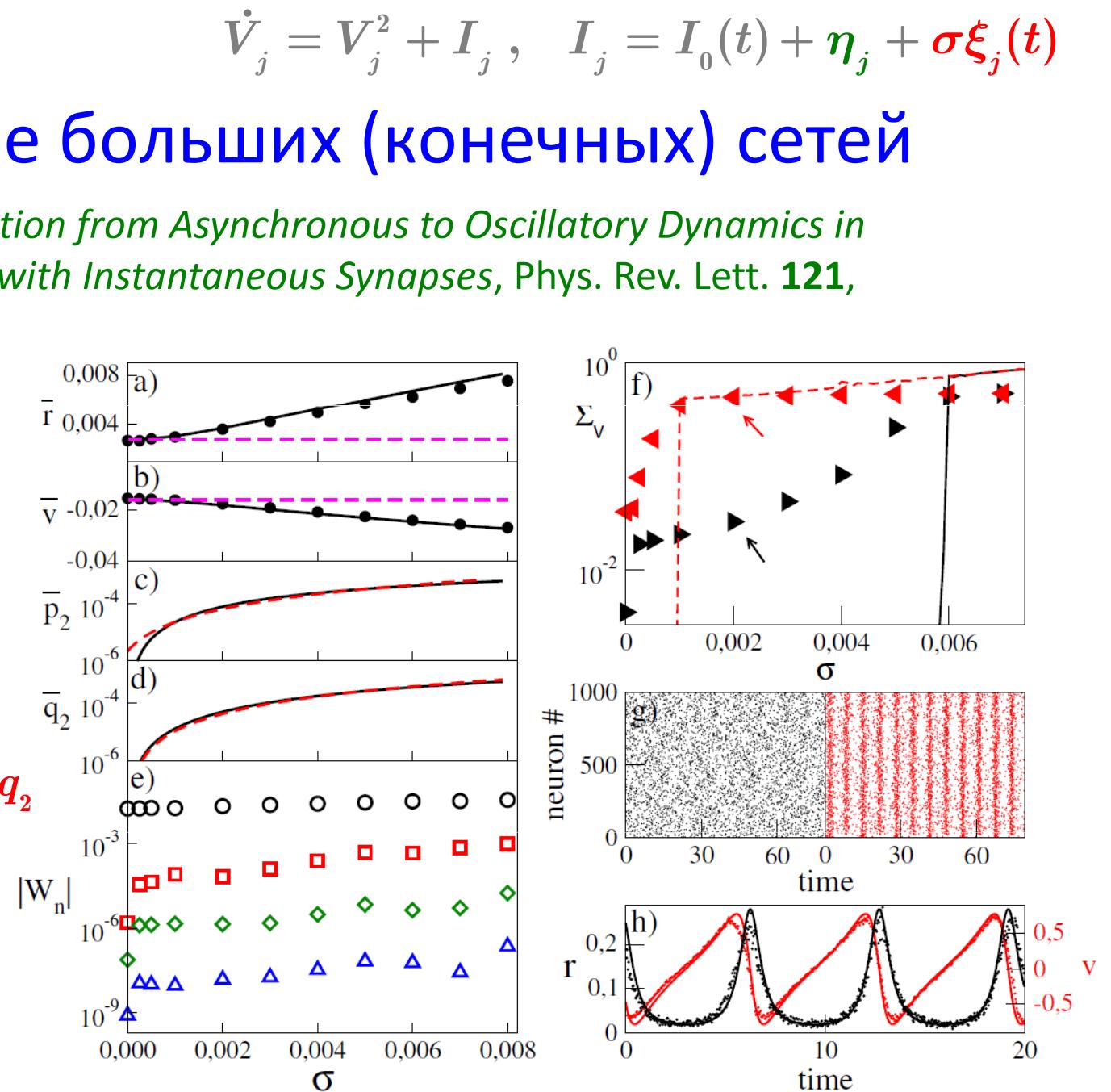
M. di Volo, A. Torcini, *Transition from Asynchronous to Oscillatory Dynamics in Balanced Spiking Networks with Instantaneous Synapses*, Phys. Rev. Lett. **121**, 128301 (2018)

$$\dot{r} = \left( \frac{g_0 \Delta_0}{\pi} + 2v \right) r + \frac{p_2}{\pi}$$

$$\dot{v} = \sqrt{K}(I_0 - g_0 r) - \pi^2 r^2 + v^2 + q_2$$

$$\dot{q}_2 = g_0^2 r + 2\sigma^2 + 4(q_2 v - \pi p_2 r)$$

$$\dot{p}_2 = -\frac{g_0^2 \Delta_0}{\sqrt{K}} r + 4(\pi q_2 r + p_2 v)$$



# Заключение

D.S. Goldobin, M. di Volo, A. Torcini, *Reduction Methodology for Fluctuation Driven Population Dynamics*, Phys. Rev. Lett. **127**, 038301 (2021)

- Формализм “**псевдокумулянтов**” (на основе характеристических ф-ций) может быть введен для работы с возмущенным р. Лоренца
- Формализм дает (в общем случае) бесконечную сходящуюся цепочку среднеполевых уравнений, которая может быть оборвана
- Маломодовые среднеполевые модели могут быть получены для макроскопической динамики ансамблей QIFs
- В частности, устойчивость многообразий Ott-Antonsen или Montbrio-Pazo-Roxin может быть исследована в рамках маломодовых моделей
- Маломодовые модели хорошо воспроизводят динамику конечных сетей

D.S. Goldobin, M. di Volo, A. Torcini, *Reduction Methodology for Fluctuation Driven Population Dynamics*, Phys. Rev. Lett. **127**, 038301 (2021)

## Спасибо за внимание!

**Людмила С. Клименко, Matteo di Volo, Alessandro Torcini**

*All science . . . has a twofold value . . . . There is its value as science, which is generally deemed to be its intrinsic, main worth, but which is, however, only of secondary importance ; and there is its value as a kind of moral and intellectual gymnastics . . . and this is its primary importance.*

Christian Morgenstern, 1910, *Aphorismen, Sprüche und andere Aufzeichnungen* (Munich and Zurich 1979 : R. Piper & Co.).

