

# Методы и приемы исследования систем сингулярно возмущенных уравнений с запаздыванием и связью различных типов

Глызин С. Д., Колесов А. Ю.  
glyzin@uniyar.ac.ru

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова

Нелинейные дни – 2023

## Общая схема исследования

Полносвязной сетью нелинейных осцилляторов или просто полносвязной сетью назовем систему вида

$$\dot{x}_j = F(x_j, u_j), \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (1)$$

Здесь  $m \geq 2$ ,  $x_j = x_j(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ ,

$$u_j = \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq j}}^m G(x_s), \quad (2)$$

а вектор-функции  $F(x, u)$ ,  $G(x)$  со значениями в  $\mathbb{R}^n$  бесконечно дифференцируемы по своим переменным  $(x, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  и  $x \in \mathbb{R}^n$ .

## Общая схема исследования

Предположим, что парциальная система

$$\dot{x} = F(x, 0) \quad (3)$$

допускает экспоненциально орбитально устойчивый цикл.

Рассмотрим ситуацию, когда  $m$  одинаковых осцилляторов (3) взаимодействуют друг с другом по принципу "каждый со всеми". Считаем, что  $F(x, u) = F(x) + D(x)u$ , где  $D(x)$  – квадратная матрица размера  $n \times n$ , тогда система (1), (2) приобретает вид

$$\dot{x}_j = F(x_j) + D(x_j) \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq j}}^m G(x_s), \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (4)$$

Определим каноническую бегущую волну

$$x_j = x(t + (j - 1)\Delta), \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (5)$$

Здесь  $\Delta > 0$  – некоторый фазовый сдвиг, а вектор-функция  $x(t)$  периодична по  $t$  с периодом  $m\Delta/k$  при некотором  $k : 1 \leq k \leq m - 1$ . Любая каноническая бегущая волна (5) порождает семейство  $\mathcal{U}_k$  индуцированных бегущих волн. Действительно, фиксируем любую перестановку  $(j_1, j_2, \dots, j_m)$  набора индексов  $(1, 2, \dots, m)$  и положим

$$x_{j_s} = x(t + (s - 1)\Delta), \quad s = 1, 2, \dots, m. \quad (6)$$

Система (1), (2) инвариантна относительно замены переменных вида

$$(x_1, x_2, \dots, x_m) \rightarrow (x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_m}), \quad (7)$$

поэтому (6) также является периодическим решением нашей системы. Это решение назовем индуцированной бегущей волной.

Количество циклов семейства  $\mathcal{U}_k$  равно  $(m - 1)!$ .

Рассмотрим вспомогательное уравнение с запаздываниями

$$\dot{x} = F(x, u_\Delta), \quad u_\Delta = \sum_{s=1}^{m-1} G(x(t - s\Delta)), \quad (8)$$

где  $x = x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $\Delta = \text{const} > 0$ .

Будем считать, что уравнение (8) допускает периодическое решение  $x = x(t, \Delta)$  периода  $T = T(\Delta) > 0$ .

**Теорема 1.1.** *Предположим, что найдется такое натуральное  $k : 1 \leq k \leq m - 1$ , при котором уравнение*

$$T(\Delta) = m\Delta/k \quad (9)$$

*имеет корень  $\Delta = \Delta_{(k)} \in (\Delta_1, \Delta_2)$ . Тогда в исходной системе (1), (2) данному корню соответствует цикл (каноническая бегущая волна)*

$$C_k : \quad x_j = x_{(k)}(t + (j - 1)\Delta_{(k)}), \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (10)$$

*периода  $T_{(k)} = m\Delta_{(k)}/k$ , где  $x_{(k)}(t) = x(t, \Delta)|_{\Delta=\Delta_{(k)}}$ .*

Проблема устойчивости всех бегущих волн из  $\mathcal{U}_k$  сводится к анализу расположения мультипликаторов линейной системы

$$\dot{h}_j = A(t+(j-1)\Delta_{(k)})h_j + B(t+(j-1)\Delta_{(k)}) \sum_{s=1}^m C(t+(s-1)\Delta_{(k)})h_s, \quad (11)$$

Здесь  $h_j = h_j(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $1 \leq j \leq m$ , а матрицы  $A(t)$ ,  $B(t)$ ,  $C(t)$  задаются равенствами

$$A(t) = \frac{\partial F}{\partial x}(x_{(k)}(t), u_{(k)}(t)) - \frac{\partial F}{\partial u}(x_{(k)}(t), u_{(k)}(t))G'_x(x_{(k)}(t)),$$

$$B(t) = \frac{\partial F}{\partial u}(x_{(k)}(t), u_{(k)}(t)),$$

$$C(t) = G'_x(x_{(k)}(t)), \quad u_{(k)}(t) = \sum_{s=1}^{m-1} G(x_{(k)}(t - s\Delta_{(k)})).$$

Рассмотрим также вспомогательное линейное уравнение с запаздываниями

$$\dot{h} = A(t)h + B(t) \sum_{s=0}^{m-1} \varkappa^s C(t - s\Delta_{(k)})h(t - s\Delta_{(k)}), \quad (12)$$

где  $h(t) \in \mathbb{C}^n$ ,  $\varkappa$  – произвольный комплексный параметр.

Нас будут интересовать его мультипликаторы  $\nu_l(\varkappa)$ ,  $l = 1, 2, \dots$ , занумерованные в порядке убывания модулей.

Остановимся на вопросе о связи между мультипликаторами систем (11) и (12).

**Теорема 1.2.** *Каждый мультипликатор  $\nu$  системы (11) допускает представление*

$$\nu = \varkappa^{m/k}, \quad (13)$$

где  $\varkappa$  – корень одного из уравнений

$$[\nu_l(\varkappa)]^k = \varkappa^m, \quad l \in \mathbb{N}. \quad (14)$$

И обратно, если при некотором  $l = l_0$  уравнение (14) имеет корень  $\varkappa = \varkappa_0 \neq 0$ , то у исходной системы (11) существует мультипликатор  $\nu = \nu_{l_0}(\varkappa_0)$ .



Установленные теоремы доставляют некую общую методику исследования периодических решений типа бегущих волн в полностью связанных сетях нелинейных осцилляторов. Действительно, вопрос о существовании канонической бегущей волны (5) сводится к отысканию цикла  $x(t, \Delta)$  вспомогательного уравнения с запаздываниями (8) и к нахождению корней уравнений (9). Что же касается вопроса об устойчивости бегущих волн семейства  $\mathcal{U}_k$ , то он решается отдельно и в силу теоремы 1.2 состоит в анализе расположения корней уравнений (14). Добавим еще, что хотя количество уравнений в системе (14), вообще говоря, счетно, но совокупность всех их ненулевых корней заведомо конечна (в противном случае конечномерная система (11) имела бы счетное число различных мультипликаторов, что невозможно).

## Случай слабо связанных осцилляторов

Рассмотрим систему слабо связанных осцилляторов

$$\dot{x}_j = F(x_j, u_j), \quad u_j = \varepsilon \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq j}}^m G(x_s), \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (15)$$

Здесь  $\varepsilon > 0$  – малый параметр,  $F(x, u) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ ,  $G(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ ,  $n \geq 2$ , а соответствующая парциальная система (3) допускает экспоненциально орбитально устойчивый цикл

$$x = x_0(t), \quad \dot{x}_0(t) \neq 0, \quad x_0(t + T_0) \equiv x_0(t), \quad T_0 > 0. \quad (16)$$

Вспомогательное уравнение имеет вид

$$\dot{x} = F(x, u_\Delta), \quad u_\Delta = \varepsilon \sum_{s=1}^{m-1} G(x(t - s\Delta)). \quad (17)$$

При  $\varepsilon = 0$  оно переходит в (3), поэтому это уравнение допускает цикл  $x = x(t, \varepsilon, \Delta)$  периода  $T(\varepsilon, \Delta)$ , обладающий свойствами

$$x(t, 0, \Delta) \equiv x_0(t), \quad T(0, \Delta) \equiv T_0$$

(т.е. асимптотически близкий к (16)). Что же касается аналогичного (9) уравнения

$$T(\varepsilon, \Delta) = m\Delta/k, \quad (18)$$

то в данном случае оно заведомо имеет решение, асимптотически близкое к  $k T_0/m$ .

**Теорема 2.1.** Для любого натурального  $k : 1 \leq k \leq m - 1$  существует такое достаточно малое  $\varepsilon_k > 0$ , что при  $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_k$  система (15) допускает каноническую бегущую волну

$$x_j = x_{(k)}(\tau + (j - 1)k T_0/m, \varepsilon), \quad \tau = (1 + \varepsilon\delta_{(k)}(\varepsilon))t, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (19)$$

где  $x_{(k)}(\tau, \varepsilon), \delta_{(k)}(\varepsilon)$  – функции

$$\begin{aligned} (\delta_{(k)}(\varepsilon), x_{(k)}(\tau, \varepsilon)) : \quad & x_{(k)}(\tau + T_0, \varepsilon) \equiv x_{(k)}(\tau, \varepsilon), \quad x_{(k)}(\tau, 0) \equiv x_0(\tau), \\ & M[(x_{(k)}(\tau, \varepsilon) - x_0(\tau), g_0(\tau))] \equiv 0, \end{aligned} \quad (20)$$

В качестве примера возьмем систему, имеющую в комплексной форме записи вид:

$$\dot{z}_j = z_j - (1 + ic_1)|z_j|^2 z_j - \nu(1 + ic_2) \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq j}}^m z_s, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (21)$$

где  $z_j = x_j + iy_j$ ,  $x_j, y_j \in \mathbb{R}$ ,  $c_1, c_2 = \text{const} \in \mathbb{R}$ ,  $\nu = \text{const} > 0$ .

Ее канонические бегущие волны задаются явными формулами

$$C_k: z_j = \xi_0 \exp \left\{ i \left( \sigma_0 t + \frac{2\pi k}{m} (j-1) \right) \right\}, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (22)$$

где  $k = 1, 2, \dots, m-1$ ,

$$\xi_0 = \sqrt{1 + \nu}, \quad \sigma_0 = -c_1 \xi_0^2 + \nu c_2. \quad (23)$$

**Теорема 3.1.** Любая бегущая волна (22), (23) с номером  $k \neq m/2$  неустойчива при выполнении неравенства

$$Q_m(\nu) \equiv q_{1,m}\nu^2 + q_{2,m}\nu + q_{3,m} < 0, \quad (24)$$

где

$$\begin{aligned} q_{1,m} &= (2+m)^2(1+c_1c_2) - (2+m)m c_2(c_1-c_2) - m(c_1-c_2)^2, \\ q_{2,m} &= 4(2+m)(1+c_1c_2) - 2m c_2(c_1-c_2) - m(c_1-c_2)^2, \\ q_{3,m} &= 4(1+c_1c_2). \end{aligned} \quad (25)$$

В случае же  $k = m/2$  соответствующая бегущая волна неустойчива при условии

$$\nu m(1+c_2^2) + 2(1+c_1c_2)(1+\nu) < 0. \quad (26)$$

**Теорема 3.2.** *Однородный цикл экспоненциально орбитально устойчив при условиях*

$$-1 + \nu(2m - 1) < 0, \quad \nu m(1 + c_2^2) - 2(1 - \nu(m - 1))(1 + c_1 c_2) > 0 \quad (27)$$

*и неустойчив при строгом нарушении хотя бы одного из этих неравенств.*

# ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕЖИМЫ ДВУХКЛАСТЕРНОЙ СИНХРОНИЗАЦИИ

$$\dot{x}_j = F(x_j, u_j), \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (28)$$

$$u_j = \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq j}}^m G(x_s), \quad (29)$$

Частный случай:

$$\dot{x}_j = F(x_j) + D(x_j) \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq j}}^m G(x_s), \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (30)$$



Разобьем множество индексов на два подмножества

$$\{1, 2, \dots, m\} = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}. \quad (31)$$

$$x_j = v(t) \text{ при } j \in \mathcal{A}, \quad x_j = w(t) \text{ при } j \in \mathcal{B}, \quad (32)$$

где переменные  $v$ ,  $w$  удовлетворяют вспомогательной системе

$$\dot{v} = F(v, u_{k,1}), \quad \dot{w} = F(w, u_{k,2}), \quad (33)$$

в которой

$$u_{k,1} = (k - 1)G(v) + (m - k)G(w), \quad u_{k,2} = k G(v) + (m - k - 1)G(w). \quad (34)$$

Предположение 1. Система (33), (34) имеет непостоянное периодическое решение

$$C_k : \quad (v, w) = (v_{(k)}(t), w_{(k)}(t)) \quad (35)$$

периода  $T_{(k)} > 0$ , удовлетворяющее требованию неоднородности

$$v_{(k)}(t) \neq w_{(k)}(t). \quad (36)$$

В этом случае имеется целое семейство циклов  $\mathcal{U}_k$ . Все циклы из этого семейства задаются равенствами (31), (32) при

$$v = v_{(k)}(t), \quad w = w_{(k)}(t), \quad (37)$$

а их количество равно  $C_m^k$ .

$$A_1(t) = \left. \frac{\partial F}{\partial x}(x, u) \right|_{x=v_{(k)}(t), u=u_{k,1}(t)}, \quad (38)$$

$$A_2(t) = \left. \frac{\partial F}{\partial u}(x, u) \right|_{x=v_{(k)}(t), u=u_{k,1}(t)} \cdot G'_x(v_{(k)}(t)), \quad (39)$$

$$A_3(t) = \left. \frac{\partial F}{\partial u}(x, u) \right|_{x=v_{(k)}(t), u=u_{k,1}(t)} \cdot G'_x(w_{(k)}(t)), \quad (40)$$

$$B_1(t) = \left. \frac{\partial F}{\partial x}(x, u) \right|_{x=w_{(k)}(t), u=u_{k,2}(t)}, \quad (41)$$

$$B_2(t) = \left. \frac{\partial F}{\partial u}(x, u) \right|_{x=w_{(k)}(t), u=u_{k,2}(t)} \cdot G'_x(v_{(k)}(t)), \quad (42)$$

$$B_3(t) = \left. \frac{\partial F}{\partial u}(x, u) \right|_{x=w_{(k)}(t), u=u_{k,2}(t)} \cdot G'_x(w_{(k)}(t)), \quad (43)$$

где

$$\begin{aligned}u_{k,1}(t) &= (k - 1)G(v_{(k)}(t)) + (m - k)G(w_{(k)}(t)), \\u_{k,2}(t) &= k G(v_{(k)}(t)) + (m - k - 1)G(w_{(k)}(t)).\end{aligned}$$

Рассмотрим линейные системы

$$\begin{aligned}\dot{c}_1 &= (A_1(t) + (k - 1)A_2(t))c_1 + (m - k)A_3(t)c_2, \\ \dot{c}_2 &= k B_2(t)c_1 + (B_1(t) + (m - k - 1)B_3(t))c_2,\end{aligned}\tag{44}$$

$$\dot{c} = (A_1(t) - A_2(t))c, \quad \dot{c} = (B_1(t) - B_3(t))c,\tag{45}$$

где  $c_1, c_2, c \in \mathbb{R}^n$ .

Условие 2. Все мультипликаторы систем (44), (45) (за исключением простого единичного в случае системы (44)) по модулю строго меньше единицы.

Базовый результат двухкластерной синхронизации.

**Теорема.** *При условиях 1,2 система (28), (29) допускает семейство  $\mathcal{U}_k$  периодических режимов двухкластерной синхронизации, количество которых равно  $S_m^k$ . Все эти циклы экспоненциально орбитально устойчивы.*

# СЛУЧАЙ СЛАБО СВЯЗАННЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ

$$\dot{x}_j = F(x_j, \varepsilon u_j), \quad u_j = \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq j}}^m G(x_s), \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (46)$$

Здесь  $\varepsilon > 0$  – малый параметр,  $F(x, u) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ ,  
 $G(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ ,  $n \geq 2$ .

Парциальная система (3) допускает экспоненциально орбитально устойчивый цикл

$$x = x_0(t), \quad \dot{x}_0(t) \neq 0, \quad x_0(t + T_0) \equiv x_0(t), \quad T_0 > 0. \quad (47)$$

$$\dot{v} = F(v, \varepsilon u_{k,1}), \quad \dot{w} = F(w, \varepsilon u_{k,2}), \quad (48)$$

где

$$u_{k,1} = (k - 1)G(v) + (m - k)G(w), \quad u_{k,2} = k G(v) + (m - k - 1)G(w).$$

При  $\varepsilon = 0$  система распадается на две независимые подсистемы, каждая из которых допускает устойчивый цикл (47). А это значит, что в указанном случае у нее существует экспоненциально орбитально устойчивый инвариантный двумерный тор

$$v = x_0(\tau), \quad w = x_0(\tau + \theta) : \quad 0 \leq \tau \leq T_0 \pmod{T_0}, \quad 0 \leq \theta \leq T_0 \pmod{T_0}, \quad (49)$$

координаты  $\tau, \theta$  которого удовлетворяют уравнениям

$$\dot{\tau} = 1, \quad \dot{\theta} = 0. \quad (50)$$

При малых  $\varepsilon > 0$  некоторые из лежащих на нем периодических движений "выживают". Будем искать такие выжившие режимы в виде:

$$v = v_{(k)}(\tau, \varepsilon), \quad w = w_{(k)}(\tau, \varepsilon), \quad \dot{\tau} = 1 + \varepsilon \delta_{(k)}(\varepsilon), \quad (51)$$

где

$$v_{(k)}(\tau, \varepsilon) = x_0(\tau) + \varepsilon V_{(k)}(\tau, \varepsilon), \quad w_{(k)}(\tau, \varepsilon) = x_0(\tau + \theta_{k,0}) + \varepsilon W_{(k)}(\tau, \varepsilon), \quad (52)$$

$\theta_{k,0} = \text{const} \in \mathbb{R}$ , а  $T_0$ -периодические по  $\tau$  вектор-функции  $V_{(k)}(\tau, \varepsilon)$ ,  $W_{(k)}(\tau, \varepsilon)$  и скалярная функция  $\delta_{(k)}(\varepsilon)$  достаточно гладко зависят от своих переменных.



Конкретный пример системы (46). В качестве парциального осциллятора возьмем двумерную систему, имеющую в комплексной форме записи вид

$$\dot{z} = z - (1 - i\omega_0)|z|^2 z, \quad z = x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R}, \quad \omega_0 = \text{const} > 0. \quad (53)$$

Система имеет экспоненциально орбитально устойчивый гармонический цикл

$$z_0(t) = \exp(i\omega_0 t), \quad (54)$$

а отвечающие ему линейные системы могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} \dot{h} &= (-1 + 2i\omega_0)h - (1 - i\omega_0) \exp(2i\omega_0 \tau) \bar{h}, & h &= h_1 + ih_2, & h_1, h_2 &\in \mathbb{R}, \\ \dot{g} &= (1 + 2i\omega_0)g + (1 - i\omega_0) \exp(2i\omega_0 \tau) \bar{g}, & g &= g_1 + ig_2, & g_1, g_2 &\in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Рассмотрим полностью связную сеть осцилляторов (53) вида

$$\dot{z}_j = z_j - (1 - i\omega_0)|z_j|^2 z_j + \varepsilon d \bar{z}_j \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq j}}^m z_s^2, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (55)$$

где  $z_j = x_j + iy_j$ ,  $x_j, y_j \in \mathbb{R}$ ,  $0 < \varepsilon \ll 1$ ,  $d = \text{const} \in \mathbb{C}$ .

Для двухкластерной синхронизации имеем вспомогательную систему

$$\begin{aligned}\dot{v} &= v - (1 - i\omega_0)|v|^2 v + \varepsilon d \bar{v} [(k-1)v^2 + (m-k)w^2], \\ \dot{w} &= w - (1 - i\omega_0)|w|^2 w + \varepsilon d \bar{w} [k v^2 + (m-k-1)w^2],\end{aligned}$$

где  $v, w \in \mathbb{C}$ .

При

$$\operatorname{Re} [d(1 + i\omega_0)] > 0. \quad (56)$$

и при всех значениях параметра  $\varepsilon$ , удовлетворяющих условию

$$\varepsilon(m-1)\operatorname{Re} d < 1. \quad (57)$$

Данная система допускает цикл

$$v = \xi(\varepsilon) \exp(i\omega(\varepsilon)t), \quad w = -\xi(\varepsilon) \exp(i\omega(\varepsilon)t), \quad (58)$$

где

$$\xi(\varepsilon) = \sqrt{1/(1 - \varepsilon(m-1)\operatorname{Re} d)}, \quad \omega(\varepsilon) = (\omega_0 + \varepsilon(m-1)\operatorname{Im} d)\xi^2(\varepsilon). \quad (59)$$

В исходной системе (55) цикл (58), (59) порождает сразу все семейства  $\mathcal{U}_k$ ,  $k = 1, \dots, m - 1$  периодических режимов двухкластерной синхронизации. Характерная особенность каждого из этих режимов состоит в том, что их компоненты, принадлежащие разным кластерам, колеблются в противофазе.

При условии (56) и при малых  $\varepsilon > 0$  все построенные периодические режимы системы (55) экспоненциально орбитально устойчивы. В случае же произвольного положительного  $\varepsilon$ , удовлетворяющего требованию (57), указанные режимы устойчивы при выполнении неравенств

$$1 + \varepsilon(m + 1)\operatorname{Re} d > 0, \quad \operatorname{Re} [d(1 + i\omega_0)] + \varepsilon|d|^2 > 0$$

и неустойчивы при строгом нарушении хотя бы одного из них.

- [1] Y. Kuramoto, D. Battogtokh, “Coexistence of Coherence and Incoherence in Nonlocally Coupled Phase Oscillators”, *Nonlinear phenomena in complex systems*, 5:4 (2002), 380–385.
- [2] D. M. Abrams, S. H. Strogatz, “Chimera States for Coupled Oscillators”, *Phys. Rev. Lett.*, 93:17 (2004), 174102-1–174102-4.
- [3] M. J. Panaggio, D. M. Abrams, “Chimera states: coexistence of coherence and incoherence in networks of coupled oscillators”, *Nonlinearity*, 28:3 (2015), R67–R87.
- [4] G. C. Sethia, A. Sen, “Chimera States: The Existence Criteria Revisited”, *Phys. Rev. Lett.*, 112:14 (2014), 144101-1–144101-5.
- [5] L. Schmidt, K. Krischer, “Clustering as a Prerequisite for Chimera States in Globally Coupled Systems”, *Phys. Rev. Lett.*, 114:3 (2015), 034101-1–034101-5.
- [6] C. R. Laing, “Chimeras in networks with purely local coupling”, *Phys. Rev. E*, 92:5 (2015), 050904-1–050904-5.
- [7] C. R. Laing, “Chimeras in networks of planar oscillators”, *Phys. Rev. E*, 81:6 (2010), 066221-1–066221-4.

- [8] A. Zakharova, M. Kapeller, E. Schöll, “Chimera Death: Symmetry Breaking in Dynamical Networks”, Phys. Rev. Lett., 112:15 (2014), 154101-1–154101-5.
- [9] I. Omelchenko, A. Zakharova, P. Hövel, J. Siebert, E. Schöll, “Nonlinearity of local dynamics promotes multi-chimeras”, Chaos, 25:8 (2015), 083104-1–083104-8.
- [10] I. Omelchenko, O. E. Omelchenko, P. Hövel, E. Schöll, “When Nonlocal Coupling between Oscillators Becomes Stronger: Patched Synchrony or Multichimera States”, Phys. Rev. Lett., 110:22 (2013), 224101-1–224101-5.
- [11] H. Sakaguchi, “Instability of synchronized motion in nonlocally coupled neural oscillators”, Phys. Rev. E, 73:3 (2006), 031907-1–031907-7.
- [12] J. Hizanidis, V. Kanas, A. Bezerianos, T. Bountis, “Chimera States in Networks of Nonlocally Coupled Hindmarsh-Rose Neuron Models”, Int. J. Bifurcat. Chaos, 24:3 (2014), 1450030-1–1450030-9.
- [13] A. Zakharova, Chimera patterns in complex networks, Springer, Berlin, 2020.

Перейдем теперь к несимметричной сети

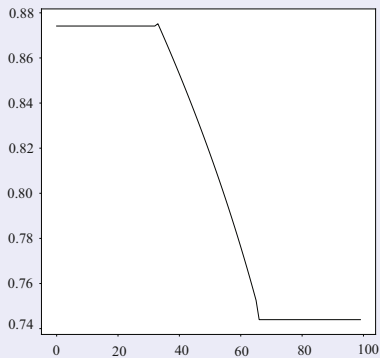
$$\dot{z}_j = (1 + i\varepsilon\mu_j)z_j - d_0|z_j|^2 z_j - \frac{\nu}{m} d_1 \bar{z}_j \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq j}}^m z_s^2, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (60)$$

где  $\varepsilon \in \mathbb{R}$ ,  $|\varepsilon| \ll 1$ ,  $\mu_j = \text{const} \in \mathbb{R}$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ . Будем предполагать существование таких натуральных  $m_1, m_2 : m_1 < m_2 < m$ , что

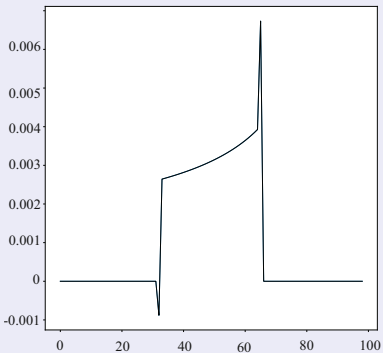
$$\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_{m_1}, \quad \mu_{m_2} = \mu_{m_2+1} = \dots = \mu_m. \quad (61)$$

В случае же  $m_1 + 1 \leq j \leq m_2 - 1$  считаем зависимость величин  $\mu_j$  от индекса  $j$  нетривиальной. Это означает, что

$$\mu_{j_1} \neq \mu_{j_2} \quad \forall j_1, j_2 \in [m_1 + 1, m_2 - 1], \quad j_1 \neq j_2. \quad (62)$$



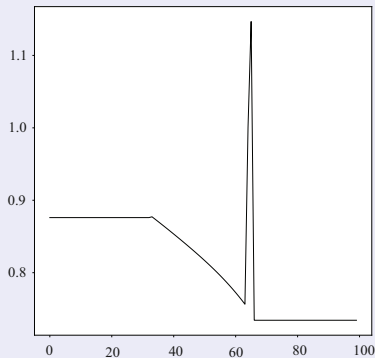
a)



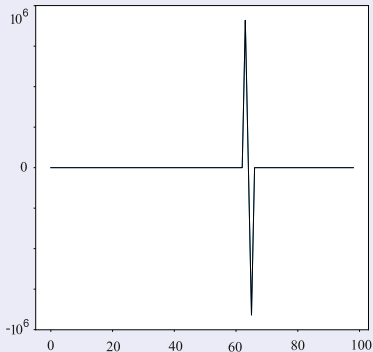
b)

Fig: a)  $\rho_j$ , b)  $\varphi_{j+1} - \varphi_j$  при  $\varepsilon = 0.07$



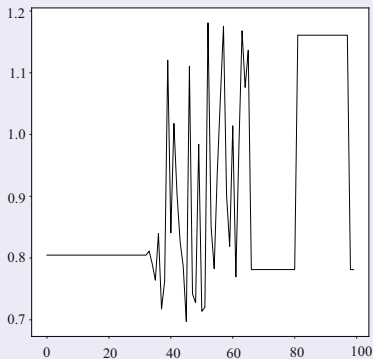


a)

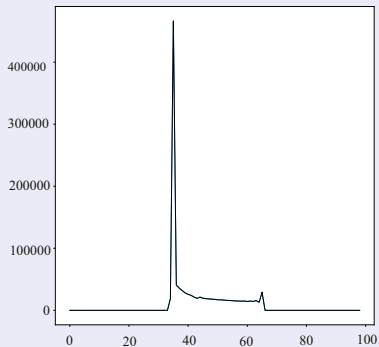


b)

Fig: a)  $\rho_j$ , b)  $\varphi_{j+1} - \varphi_j$  при  $\varepsilon = 0.08$  и  $t = 1000000$



a)



b)

Fig: a)  $\rho_j$ , b)  $\varphi_{j+1} - \varphi_j$  при  $\varepsilon = 0.18$  и  $t = 1000000$

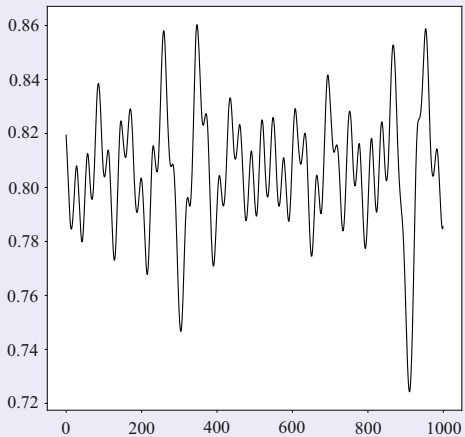


Fig: График  $\rho_5(t)$  при  $\varepsilon = 0.18$

## Случай полностью связной нейронной сети

Рассматривается полностью связная сеть из  $m$ ,  $m \geq 2$  нейронов, взаимодействующих посредством химических синапсов

$$\dot{u}_j = \left[ \lambda f(u_j(t-1)) + b \left( \sum_{s=1, s \neq j}^m g(u_s(t-\Delta)) \right) \ln \frac{u_*}{u_j} \right] u_j. \quad (63)$$

Здесь  $j = 1, 2, \dots, m$ ,  $u_j = u_j(t) > 0$  – мембранный потенциал  $j$ -ого нейрона сети, параметр  $\lambda > 0$  предполагается большим,  $b = \text{const} > 0$ ,  $u_* = \exp(\lambda c)$ ,  $c = \text{const} \in \mathbb{R}$ ,  $\Delta > 0$  – дополнительное запаздывание в химических синапсах, а функции  $f(u), g(u) \in C^2(\mathbb{R}_+)$ ,

$\mathbb{R}_+ = \{u \in \mathbb{R} : u \geq 0\}$ ,  $g(u) > 0 \forall u > 0$ , обладают свойствами:

$$f(0) = 1, \quad g(0) = 0,$$

$$f(u) + a = g(u) - 1 = uf'(u) = ug'(u) = u^2 f''(u) = u^2 g''(u) = O(u^{-1})$$

при  $u \rightarrow +\infty$ .

После замены

$$u_j = \exp(\lambda \omega_j), \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (64)$$

приходим к системе

$$\dot{\omega}_j = F(\omega_j(t-1), \varepsilon) + b(c - \omega_j) \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq j}}^m G(\omega_s(t-\Delta), \varepsilon), \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (65)$$

Фиксируем произвольно натуральное  $k : 1 < k < m$  и предположим, что совокупность индексов  $1 \leq j \leq m$  разбита на два непересекающихся подмножества  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$ , состоящих из  $k$  и  $m - k$  элементов соответственно, т.е.

$$\{1, 2, \dots, m\} = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}. \quad (66)$$

Система допускает решения с компонентами

$$\omega_j = x \text{ при } j \in \mathcal{A}, \quad \omega_j = y \text{ при } j \in \mathcal{B}, \quad (67)$$

где переменные  $x, y$  удовлетворяют системе

$$\begin{aligned} \dot{x} &= F(x(t-1), \varepsilon) + b(c-x)[(k-1)G(x(t-\Delta), \varepsilon) + \\ &\quad + (m-k)G(y(t-\Delta), \varepsilon)], \\ \dot{y} &= F(y(t-1), \varepsilon) + b(c-y)[kG(x(t-\Delta), \varepsilon) + \\ &\quad + (m-k-1)G(y(t-\Delta), \varepsilon)]. \end{aligned} \quad (68)$$

Отыскивается цикл

$$(x, y) = (x_k(t, \varepsilon), y_k(t, \varepsilon)), \quad x_k(0, \varepsilon) \equiv 0 \quad (69)$$

Перейдем от (68) к соответствующей релейной системе

$$\begin{aligned}\dot{x} &= R(x(t-1)) + b(c-x)[(k-1)H(x(t-\Delta)) + \\ &\quad + (m-k)H(y(t-\Delta))], \\ \dot{y} &= R(y(t-1)) + b(c-y)[kH(x(t-\Delta)) + \\ &\quad + (m-k-1)H(y(t-\Delta))],\end{aligned}\tag{70}$$

а затем – к упрощенной системе

$$\dot{x} = R(x(t-1)) + (k-1)b(c-x)H(x(t-\Delta)),\tag{71}$$

$$\dot{y} = R(y(t-1)) + k b(c-y)H(x(t-\Delta)),\tag{72}$$

в предположении  $y < 0$ .

## Случай полностью связной нейронной сети

Модель (63) с максимально большим числом связей позволяет описать наиболее сложное и разнообразное поведение, возможное в биологических нейронных ассоциациях. Особенностью рассмотренных нами режимов  $k$ -доминирования является то, что часть нейронов сети находится в неработающем (рефрактерном) состоянии. Вместе с тем, имеется простой способ применения построенных режимов для конструирования искусственных нейронных сетей с заданными свойствами. С этой целью каждому периодическому режиму  $k$ -доминирования может быть поставлен в соответствие бинарный вектор  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ , где  $\alpha_j = 1$  если  $j$ -й нейрон активен и  $\alpha_j = 0$  в противном случае. Принимая во внимание это обстоятельство, приходим к выводу, что данные режимы могут быть использованы для построения устройств с ассоциативной памятью на их основе.



Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда  
№ 22-11-00209, <https://rscf.ru/project/22-11-00209/>

Спасибо за внимание!