Термодинамические аналогии в хаотической динамике одномерных дискретных систем

$$Pf(x) = \int f(t)\delta(x - g(x;\lambda))dx$$

Аникин В. М., д.ф.-м.н., профессор

Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

Термодинамический формализм

1. Совокупность принципов и соотношений (между физическими величинами), составляющих основу термодинамики: понятие о равновесных и неравновесных состояниях, понятие об обратимых и необратимых процессах, уравнения состояния для равновесных систем, функции состояния равновесных систем, начала (законы) термодинамики и т.д. В обосновании термодинамики важную роль сыграла статистическая физика.

С. Карно

Д. Рюэль

2. Раздел теории динамических систем, в котором изучение их количественных и качественных характеристик определяют идеи термодинамики и статистической физики, рассмотрение нелинейно-динамических характеристик, отражающих взаимосвязь с термодинамикой и статистической физикой (механикой), а именно: вероятностные аспекты хаотической динамики, свойства операторов преобразования вероятностных плотностей, метод символической динамики, информационные меры, принцип максимальной энтропии, общие термодинамические отношения, фазовые переходы.

Эволюция произвольного состояния к состоянию равновесия

«Эволюция произвольного состояния к состоянию равновесия происходит в результате необратимых процессов. В состоянии равновесия эти процессы прекращаются. Таким образом, неравновесное состояние можно определить как такое, в котором необратимые процессы вынуждают систему эволюционировать к состоянию равновесия» <…>. Информация, даваемая термодинамикой, имеет ценность вследствие ее общности».

И. Р. Пригожин

Оператор Перрона-Фробениуса (ОПФ)

Итерации хаотического отображения:

$$x_{n+1} = g(x_n;\lambda) = g(g(x_{n-1};\lambda)) = g^2(x_{n-1};\lambda) = \ldots = g^n(x_0;\lambda)$$

,

$$x_n \in (a,b),\ n = 0,1,2,\ldots$$

Оператор Перрона-Фробениуса:

$$\tilde{a}_k = g(a_k)$$

$$Pf(x) = \int f(t)\delta(x - g(x;\lambda))dx$$

Расчет ОПФ.

1.Разбиение интервала на подынтервалы монотонности итерационной функции:

$$Pf(x) = \sum_{k=1}^{m} \int_{a_{k-1}}^{a_k} f(t)\delta(x - g_k(t))dt \quad g_k(x) = g(x)\chi_{a_{k-1},a_k}(x)$$

(a_{k-1}, a_k)
- k –й участок монотонного изменения итеративной функции

2. Замена переменных:

$$Pf(x) = \sum_{k=1}^{m} \int_{\tilde{a}_{k-1}}^{\tilde{a}_k} \frac{f(g_k^{-1}(u))}{g_k'(g_k^{-1}(u))} \chi_{\tilde{a}_{k-1},\tilde{a}_k}(x)\delta(x-u)du$$

3. Использования фильтрующего свойства дельта-функции:

$$\chi_{a,b}(x) = \begin{cases} 1, x \in (a,b), \\ 0, \notin (a,b) \end{cases}$$

$$Pf(x) = \sum_{k=1}^{m} \frac{f(g_k^{-1}(x))}{|g_k'(g_k^{-1}(x))|} \chi_{\tilde{a}_{k-1},\tilde{a}_k}(x)$$

$$Pf(x) = \sum_{k=1}^{m} f(g_k^{-1}(x)) |(g_k^{-1}(x))'| \chi_{\tilde{a}_{k-1},\tilde{a}_k}(x) \qquad Pf(x) = \sum_{k=1}^{m} f(g_k^{-1}(x)) |(g_k^{-1}(x))'|$$

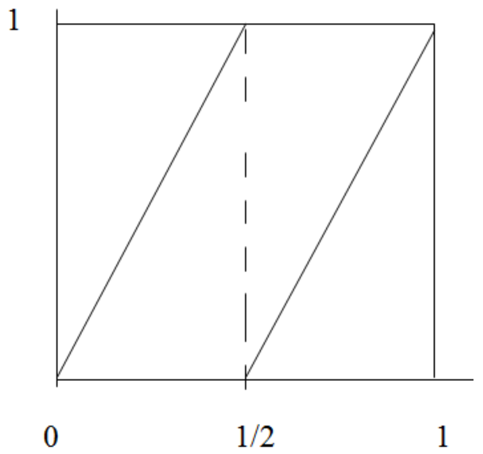
Спектральная задача для ОПФ

$$P_B f(x) = \frac{1}{2}\left(f(x/2) + f((1+x)/2)\right)$$

$$P\psi_k(x) = \lambda_k \psi_k(x),\ k = 0,1,2,\ldots$$

$$P\psi_0(x) = \psi_0(x)$$

Сдвиг Бернулли



$$x_{n+1} = \begin{cases} 2x_n, & 0 \le x_n < 1/2, \\ 2x_n - 1, & 1/2 \le x_n < 1, \end{cases}$$

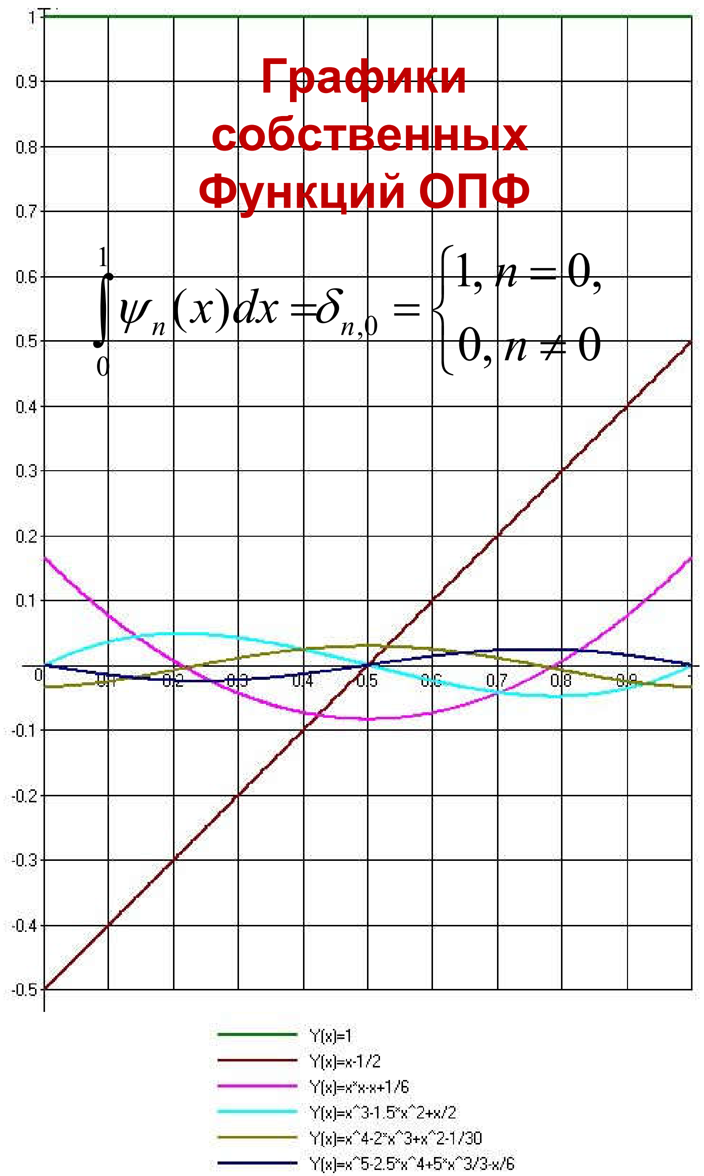
Собственные функции и числа ОПФ

$$\psi_k(x) = B_k(x) \qquad \lambda_k = 1/2^k$$

$$B_0(x) = 1,$$
$$B_1(x) = x - \frac{1}{2},$$
$$B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6},$$
$$B_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x,$$
$$B_4(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30},$$
$$B_5(x) = x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{1}{6}x,$$
$$B_6(x) = x^6 - 3x^5 + \frac{5}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{42}.$$

Графики собственных Функций ОПФ

$$\int_0^1 \psi_n(x)dx = \delta_{n,0} = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 0, & n \ne 0 \end{cases}$$



Сдвиг Бернулли. Сходимость

Начальное распределение

$$f_0(x) = ax + b$$

$$f_0(x) = ax^2 + bx + c$$

Условие нормировки

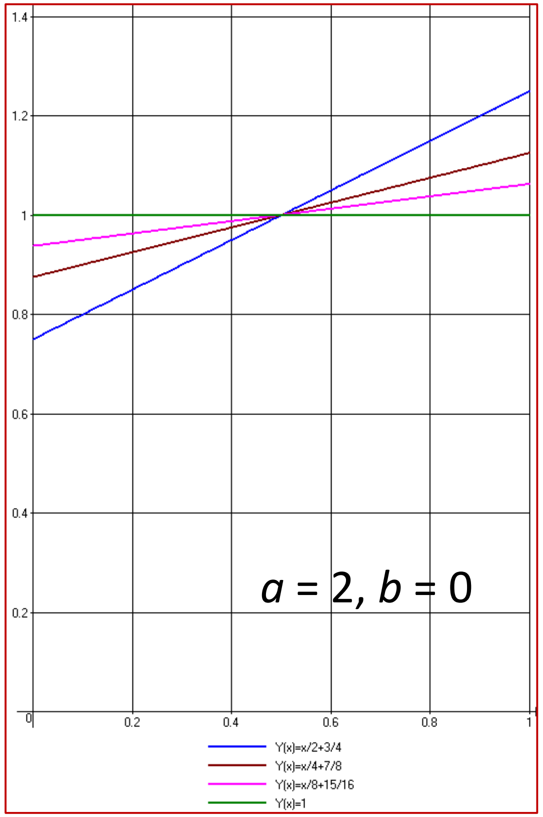
$$\int_0^1 f_0(x)dx = \int_0^1 (ax+b)dx = \frac{a}{2} + b \equiv 1$$

$$\int_0^1 f_0(x)dx = \int_0^1 (ax^2 + bx + c)dx = \frac{a}{3} + \frac{b}{2} + c \equiv 1$$

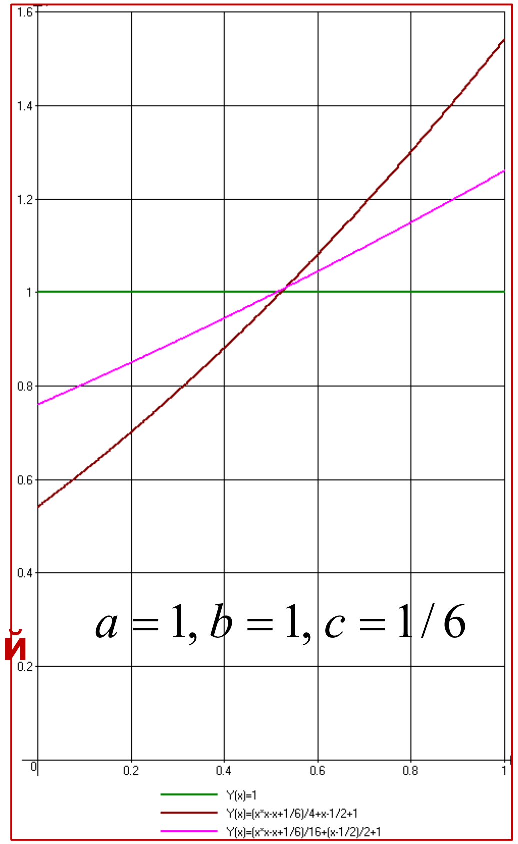
Действие

$$P^k f_0(x) = P_B{}^k (ax+b) = a\lambda_1{}^k B_1(x) + 1$$

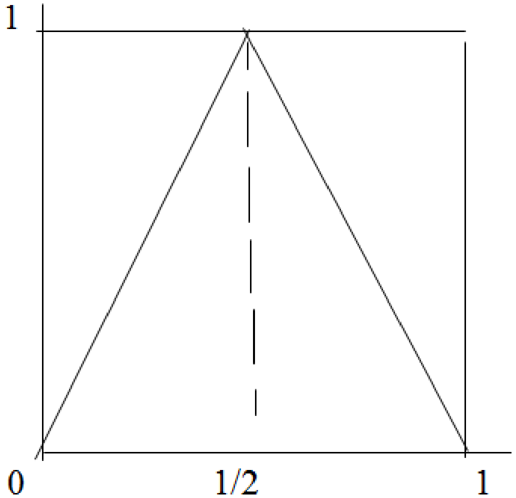
$$P_B{}^k f_0(x) = P_B{}^k (ax^2 + bx + c) =$$
$$= a\lambda_2{}^k B_2(x) + (a+b)\lambda_1{}^k B_1(x) + 1$$



Графики функций $f_k(x)$



Пирамидальное отображение (tent map)



$$x_{n+1} = 1 - |\,2x_n - 1\,| = \begin{cases} 2x_n & 0 \le x_n \le 1/2, \\ 2 - 2x_n & \le x_n \le 1, \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

ОПФ: $$P_T f(x) = \frac{1}{2}\left(f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(1 - \frac{x}{2}\right)\right)$$

Собственные функции и числа ОПФ

$$P_T B_{2n}\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2^{2n}} B_{2n}\left(\frac{x}{2}\right) \qquad \lambda_{2n} = 1/2^{2n} \qquad P_T B_{2n+1}(x) = 0 \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Действие ОПФ на линейную функцию приводит к инвариантному распределению:

$$f_0(x) = ax + b \qquad \frac{a}{2} + b = 1$$

$$P_T(ax + b) = \frac{1}{2}\left(a\left(\frac{x}{2}\right) + b + a\left(1 - \frac{x}{2}\right) + b \right) = \frac{a}{2} + b \equiv 1$$

Многочлены Чебышёва. Вычисление нестационарной плотности из точного траекторного решения

$$T_2(x) = 2x^2 - 1, \quad x \in (-1, 1)$$

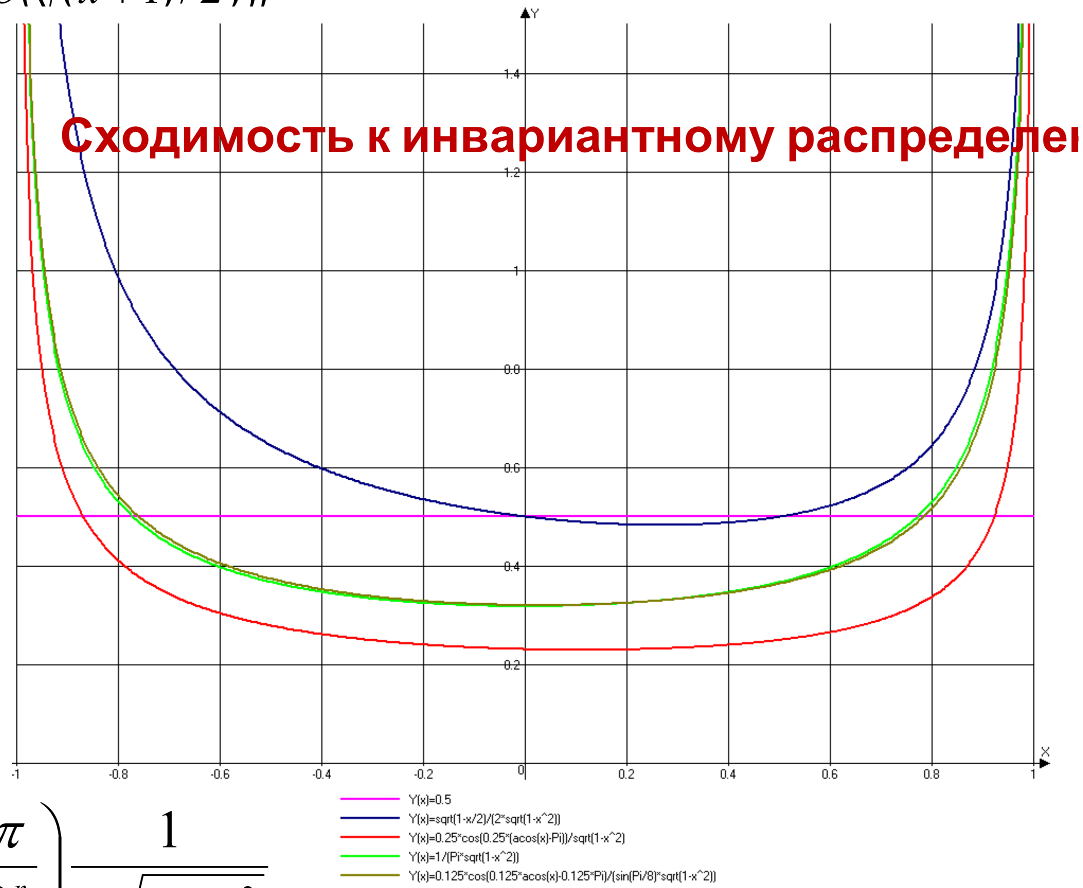
$$x_n = T_n(x_0, n) = \cos\left(2^n \arccos x_0\right)$$

$$P\rho(x) = \frac{1}{4\sqrt{(x+1)/2}}\left(\rho\left(-\sqrt{(x+1)/2}\right) + \rho\left(\sqrt{(x+1)/2}\right)\right)$$

$$\rho(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}$$

$$\rho_0(x) = 1/2, \quad x \in (-1, 1),$$

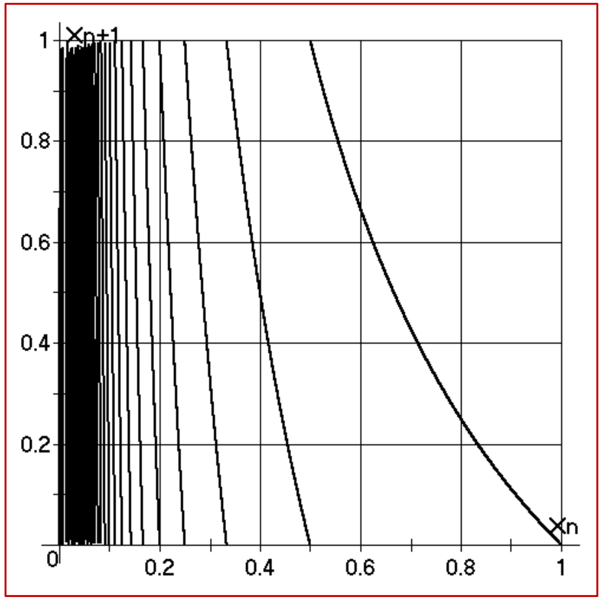
$$\rho_n(x, n) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \delta\left(x - \cos\left(2^n \arccos x_0\right)\right) dx_0$$



$$\rho_n(x, n) = \frac{\pi / 2^n}{\sin(\pi / 2^n)} \cos\left(\frac{\arccos x}{2^n} - \frac{\pi}{2^n}\right) \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}$$

Задача Гаусса, 1800 г.

1. Разложение иррационального числа в непрерывную дробь



$$x_{n+1} = Tx_n = \left\{ \frac{1}{x_n} \right\}, x \in \Omega \in (0,1), n = 0,1,2,\ldots,$$

$$x_0 = // a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n + x_n //$$

$$x_0 = // a_1 + x_1 // \qquad x_1 = x_1(x_0) = \left\{ \frac{1}{x_0} \right\} = Tx_0 \qquad a_1 = a_1(x_0) = \left\lfloor \frac{1}{x_0} \right\rfloor$$

$$x_0 = // a_1, a_2 + x_2 // = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + T^2 x_0}} \qquad x_2 = x_2(x_0) = Tx_1 = T^2 x_0 \qquad a_2 = a_2(x_0) = \left\lfloor \frac{1}{x_1} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1}{Tx_0} \right\rfloor = a_1(Tx_0)$$

$$x_0 = // a_1, a_2, a_3 + x_3 // = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + T^3 x_0}}} \qquad x_3 = x_3(x_0) = Tx_2 = T^3 x_0$$

$$a_3 = a_3(x_0) = \left\lfloor \frac{1}{x_2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1}{T^2 x_0} \right\rfloor = a_2(Tx_0) = a_1(T^2 x_0)$$

К.Ф. Гаусс

Отображение Гаусса.

2. Инвариантное распределение дробных остатков

$$x_0 = // a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n + x_n //$$

$$x_n = x_n(x_0) = T^n x_0 = T x_{n-1} = \left\{ \frac{1}{x_{n-1}} \right\}, \; x_0 \in \Omega \in (0,1), \; n \in \mathbb{N}_+$$

$$a_n = a_n(x_0) = \left\lfloor \frac{1}{x_{n-1}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1}{T^{n-1} x_0} \right\rfloor = a_{n-1}(T x_0) = a_1(T^{n-1} x_0), \; x_0 \in \Omega \in (0,1), \; n \in \mathbb{N}_+$$

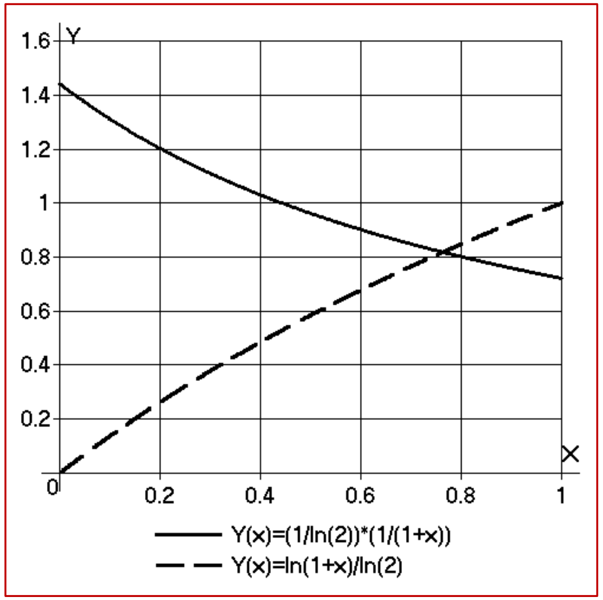
Инвариантная плотность:

$$f^*(x) = \frac{1}{\ln 2} \frac{1}{1+x}, \quad x \in (0,1)$$

Инвариантный интегральный закон:

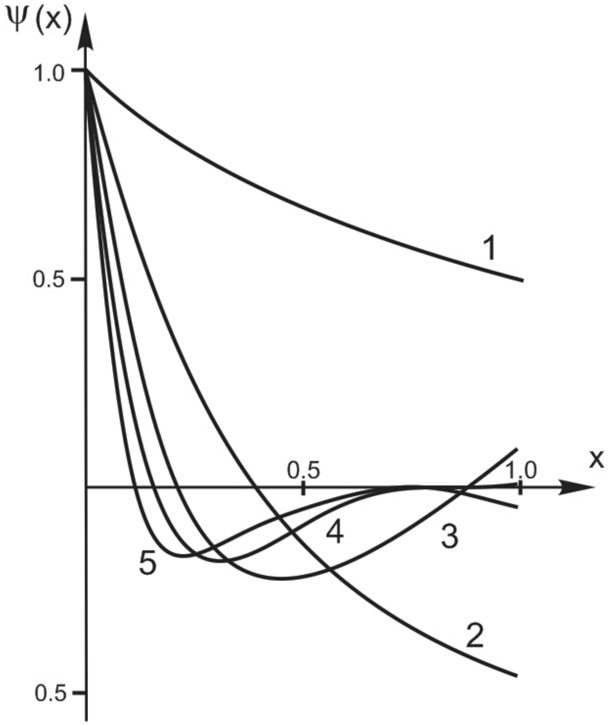
$$F^*(x) = \int_0^x f^*(t)dt = \frac{1}{\ln 2} \int_0^x \frac{dt}{1+t} dt = \frac{1}{\ln 2} \ln(1+x) = \log_2(1+x)$$

Показатель Ляпунова: $\Lambda = \dfrac{\pi^2}{6 \ln 2}$



Отображение Гаусса.

3. Оператор Перрона-Фробениуса



$$Pf(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(x+k)^2} f\left(\frac{1}{x+k}\right)$$

Собственные функции ОПФ отображения Гаусса:

1 – инвариантная плотность,

2-5- функции высших порядков

Константа Вирсинга *– второе собственное ч* «фундаментальная константа» (д. Кнут):

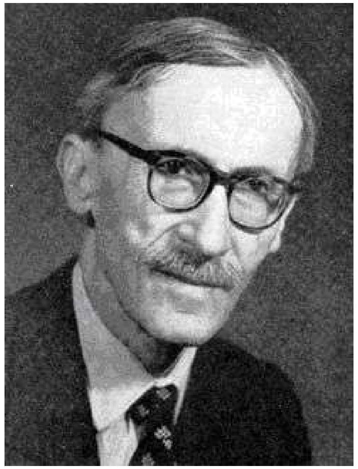
$$-\lambda = //3,3,2,2,3,13,1,174,1,1,1,2,2,2,1,1,1,2,2,1,...// =$$

$$= 0.30366\,30028\,98732\,65859\,74481\,21901\,55623\,31108\,77352\,25365$$

$$78951\,88245\,48146\,72269\,95294\,24691\,09843\,40811\,93436\,36368\ldots.$$

Отображение Гаусса.

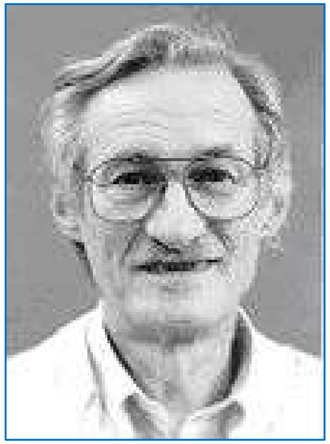
4. Асимптотика установления инвариантного распределения дробных остатков

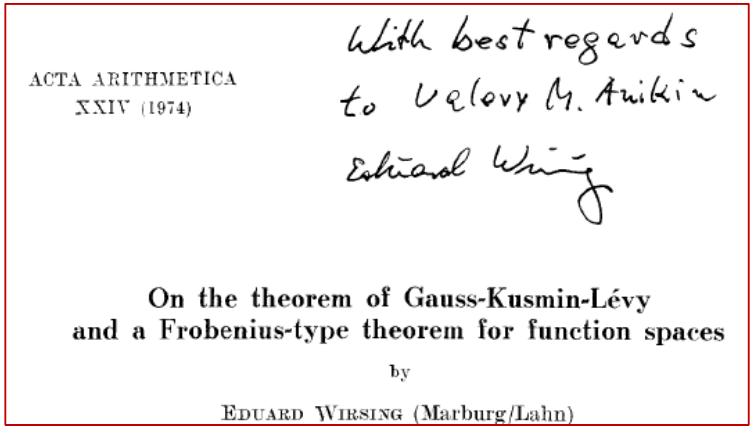


Р. О. Кузьмин, 1928 *П. Леви, 1929* *А. Я. Хинчин, 1935* *К. И. Бабенко, 1977*

$$F_n(x) = \log_2(1+x) + O(\exp(-\alpha\sqrt{n})),$$

$$F_n(x) = \log_2(1+x) + \sum_{j=2}^{\infty} \lambda_j^{n-1} \Psi_j(0) \int_0^x \Psi_j(x) dx$$





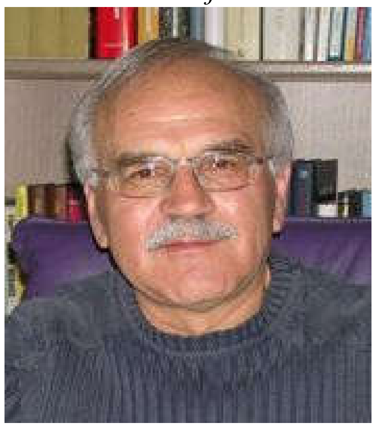
ACTA ARITHMETICA
XXIV (1974)

With best regards
to Valery M. Anikin
Eduard Wirsing

On the theorem of Gauss-Kusmin-Lévy
and a Frobenius-type theorem for function spaces

by

EDUARD WIRSING (Marburg/Lahn)

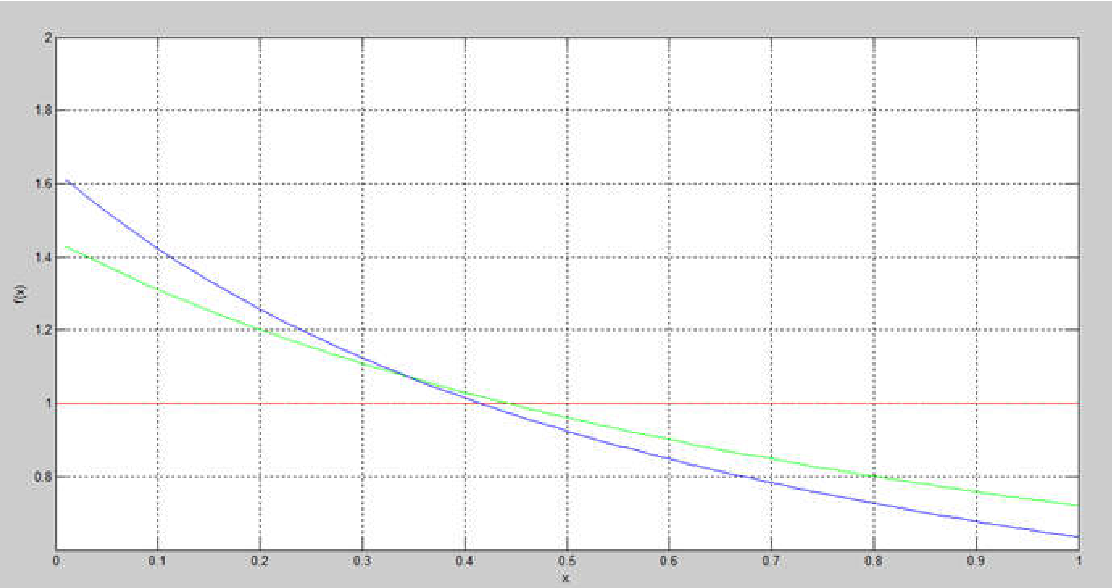


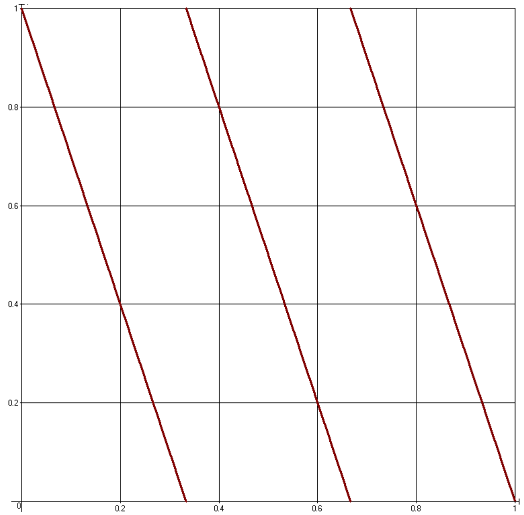
Э. Вирсинг, 1974

Д. Майер *М. Иосифеску*

Отображение Гаусса.

5. О пользе «простых моделей»





$$\alpha_{n+1} = \begin{cases} -3\alpha_n + 1, \alpha_n \in (0,1/3), \\ -3\alpha_n + 2, \alpha_n \in (1/3,2/3), \\ -3\alpha_n + 3, \alpha_n \in (2/3,1). \end{cases}$$

$$P_{\widetilde{B}} B_n(x) = \frac{(-1)^n}{3^n} B_n(x), \quad n = 0,1,2,\ldots$$

Собственные числа операторов Перрона–Фробениуса для отображения Гаусса и триадического инверсного сдвига Бернулли

$$\int_A \psi_k(x)dx = 0, k = 2,3,\ldots$$

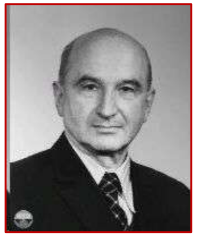
	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	λ_7
Отображение Гаусса	–0.303663	0.10088	–0.03550	0.01284	–0.00472	0.00175
Инверсный сдвиг	–0,(3)	0,(1)	–0,(037)	0,012345679	–0,0041115	0,0013717

Отображение Гаусса.

6. Космологическая модель эволюции Вселенной в пределах планковского интервала времени

1970 г. Ноябрь *Том 102, вып. 3*

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

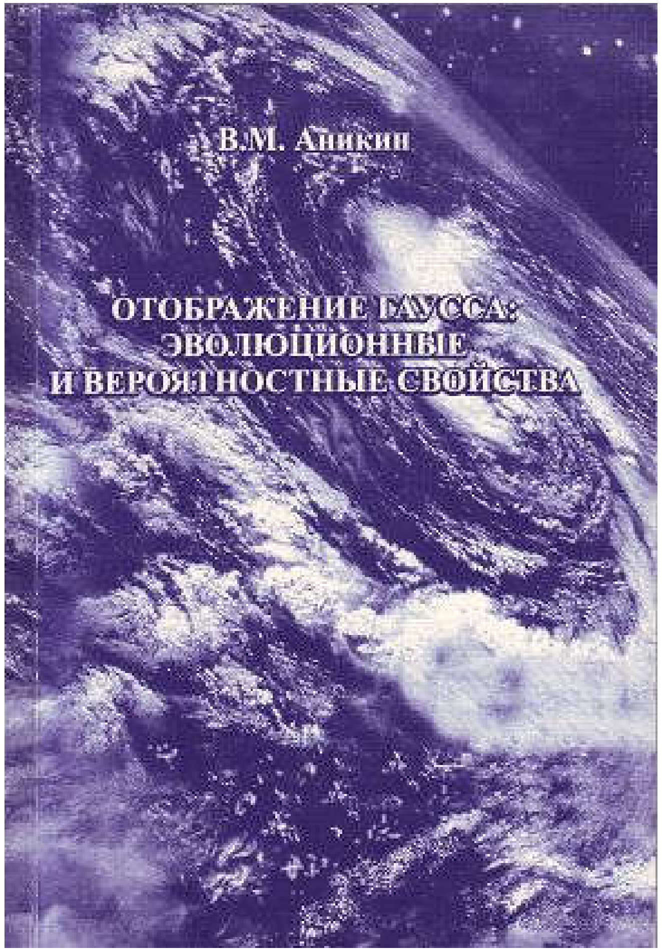


523.11

КОЛЕБАТЕЛЬНЫЙ РЕЖИМ ПРИБЛИЖЕНИЯ К ОСОБОЙ ТОЧКЕ В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ КОСМОЛОГИИ

В. А. Белинский, Е. М. Лифшиц, И. М. Халатников

СОДЕРЖАНИЕ



:

Совместные распределения коэффициентов цепной дроби

а) для нечетного числа *m:*

$$P(A_1 = n_1, A_2 = n_2, \ldots, A_m = n_m) = \log_2 \frac{//n_1, n_2, \ldots, n_m//}{//n_1, n_2, \ldots, n_m + 1//}$$

$$P(A_{s+1} = n_1, A_{s+2} = n_2, \ldots, A_{s+m} = n_m) = \log_2 \frac{//n_1, n_2, \ldots, n_m//}{//n_1, n_2, \ldots, n_m + 1//}$$

б) для четного числа *m* :

$$P(A_1 = n_1, A_2 = n_2, \ldots, A_m = n_m) = \log_2 \frac{//n_1, n_2, \ldots, n_m + 1//}{//n_1, n_2, \ldots, n_m//}$$

$$P(A_{s+1} = n_1, A_{s+2} = n_2, \ldots, A_{s+m} = n_m) = \log_2 \frac{//n_1, n_2, \ldots, n_m + 1//}{//n_1, n_2, \ldots, n_m//}$$

Закон распределения первого элемента цепной дроби:

$$P\{A_1 = n_1\} = \frac{1}{\ln 2} \int_{1/(n_1+1)}^{1/n_1} \frac{d\eta}{1+\eta} = \log_2 \frac{//1, n_1 + 1//}{//1, n_1//} = \log_2 \frac{(n_1+1)^2}{n_1(n_1+2)}$$

Литература

1. *Рюэль Д.* Термодинамический формализм. Математические структуры классической равновесной статистической механики. М.; Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2002. 288 с.
2. *Lasota A., Mackey M.* C. Chaos, Fractals, and Noise: Stochastic Aspects of Dynamics. 2nd Edition. New York: Springer-Verlag 1994. xiv + 472 pp.
3. *Аникин В.М., Голубенцев А.Ф.* Аналитические модели детерминированного хаоса. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2007. 328 с.
4. *Аникин В. М., Аркадакский С. С., Ремизов А. С.* Несамосопряженные линейные операторы в хаотической динамике. Саратов : Издательство Саратовского университета, 2015. 96 с.
5. *Аникин В. М.* Представление точных траекторных решений для хаотических одномерных отображений в форме Шрёдера // Известия вузов. ПНД. 2023. Т. 31, № 2. С. 128–142.
6. *Кузьмин Р.О.* Об одной задаче Гаусса // ДАН СССР. Сер. А. 1928. С.375–380.
7. *Lévy P.* Sur les lois de probabilité don't dependent les quotients complets et incompletes d'une fraction continue // Bull. Soc. Math. de France. 1929. V. 57. P. 178–194.
8. *Хинчин А.Я.* Цепные дроби. 4-е изд. М.: Наука, 1972. 112 с.
9. *Wirsing E.* On the theorem of Gauss–Kuzmin–Levy and a Frobenius type theorem for function spaces // Acta Arithmetica. 1974. V. 24. P. 507–528.
10. *Бабенко К.И., Юрьев С.П.* Об одной задаче Гаусса. Препринт / ИПМ АН СССР. М.: 1977. № 63. 70 с.
11. *Бабенко К. И.* Основы численного анализа. М. : Наука. Гл. ред.физ.-мат.лит. 1986. 744 с.
12. *Mayer D.H., Roepstorff G.* On the relaxation time of Gauss' continued fraction map. I: The Hilbert space approach (Koopmanism) // J. Stat. Phys. 1987. V. 47. P. 149-171.
13. *Mayer D.H., Roepstorff G.* On the relaxation time of Gauss' continued fraction map. II: The Banach space approach transfer operator method) // J. Stat. Phys. 1988. V. 50. P. 331-344.
14. *Mayer D.H.* On the Thermodynamic Formalism for the Gauss Map // Commun. Math. Phys. 1990. V. 130. P. 311 – 333.
15. *Iosifescu M., Kraaikamp C.* Metrical Theory of Continued Fractions. Boston: Kluwer, Inc. 2002. Chps. 1, 2.
16. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория поля. 6–е изд. М.: Наука, 1973. Гл. 14. Релятивистская космология.
17. *Аникин В.М.* Отображение Гаусса: эволюционные и вероятностные свойства. Саратов: Издательство Саратовского университета. 2007. 80 с. (Гриф УМО по классическому университетскому образованию).
18. *Аникин В. М.* Автокорреляционные свойства хаотических отображений. Саратов : Издательство Саратовского университета, 2018. 80 с.