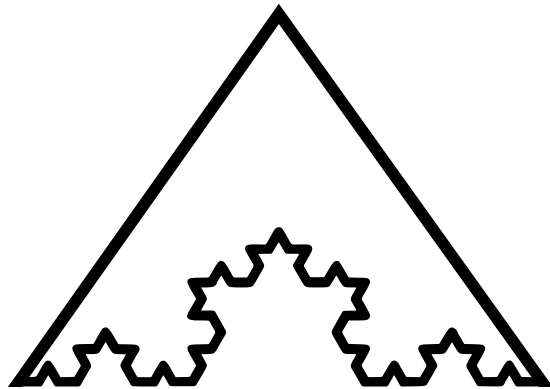


ISSN 2949-2459 (Online)



НЕЛИНЕЙНЫЕ ДНИ

в Саратове для молодых

Выпуск 17

Саратовский национальный исследовательский государственный
университет имени Н. Г. Чернышевского

НЕЛИНЕЙНЫЕ ДНИ В САРАТОВЕ ДЛЯ МОЛОДЫХ

Сборник научных трудов

Выпуск 17

Материалы XXX Всероссийской научной конференции
15–19 мая 2023, Саратов

Саратов
2023

УДК 530.182

ББК 22.312

Н49

Нелинейные дни в Саратове для молодых : сборник научных трудов / редакционная коллегия: А. А. Короновский (ответственный редактор) [и др.]. – Саратов : Саратовский университет [издание], 2023. – Вып. 17 : материалы XXX Всероссийской научной конференции, 15–19 мая 2023, Саратов. – 162 с. : ил. (7,5 Мб) – URL: <https://sgu.ru/node/200408>. – Режим доступа: свободный. Продолжающиеся издания СГУ на сайте www.sgu.ru.

ISSN 2949-2459 (Online). – Изображение. Текст : электронный.

Выпуск содержит материалы XXX Всероссийской научной конференции «Нелинейные дни в Саратове для молодых – 2023». Конференция проводилась при поддержке Саратовского национального исследовательского государственного университета имени Н. Г. Чернышевского, Регионального научно-образовательного математического центра «Математика технологий будущего», редколлегии научного журнала «Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика». Основные направления работы конференции: бифуркации в динамических системах, детерминированный хаос, квантовый хаос, самоорганизация; СВЧ-электроника и метаматериалы; прикладные задачи нелинейной теории колебаний и волн; нелинейная динамика и нейронаука.

Сборник предназначен для научных сотрудников, преподавателей вузов, аспирантов и студентов, интересующихся нелинейной динамикой.

Редакционная коллегия:

профессор *А. А. Короновский* (ответственный редактор),
профессор *Б. П. Безручко*, профессор *О. И. Москаленко*,
профессор *Н. М. Рыскин*, профессор *И. В. Сысоев*

УДК 530.182

ББК 22.312

Работа издана в авторской редакции

*Все статьи сборника публикуются на условиях лицензии
Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)*

ISSN 2949-2459 (Online)

© Авторы статей, 2023

© Саратовский университет, 2023

Содержание

Бифуркации в динамических системах. Детерминированный хаос. Квантовый хаос. Самоорганизация

<i>Аникин В. М.</i> Термодинамические аналогии в хаотической динамике одномерных дискретных систем	9
<i>Голдобин Д. С.</i> Псевдокумулянты и динамика отклонений от распределения Лоренца в задачах статистической физики.....	11
<i>Кузнецов Н. В., Кудряшова Е. В., Лобачев М. Ю.</i> Границы глобальной устойчивости и скрытые аттракторы в системах фазовой автоподстройки частоты	13
<i>Аверьянов В. М., Рыбалова Е. В., Стрелкова Г. И.</i> Химеры и уединенные состояния в кольце нелокально связанных отображений Эно–Лози	15
<i>Баин Д. Д.</i> Существование и устойчивость медленно осциллирующих периодических решений одного класса дифференциальных уравнений с запаздыванием.....	17
<i>Бакалина Д. А., Барабаш Н. В.</i> Сценарии рождения аттракторов в кусочно-линейной системе лоренцевского типа	19
<i>Балаева В. В., Савин А. В.</i> Странные нехаотические аттракторы в слабодиссипативном отображении Эно	21
<i>Барабаш Н. В., Белых В. Н., Белых И. В.</i> Доказательство существования аттрактора типа двойной спирали (double scroll).....	23
<i>Евстифеев Е. В., Москаленко О. И.</i> Оценка меры мультистабильности в однонаправленно связанных хаотических системах с различной топологией аттрактора	25
<i>Емельянова А. А., Масленников О. В., Некоркин В. И.</i> Беспорядочное подавление колебаний в цепочке взаимосвязанных осцилляторов Баутина.....	27
<i>Илларионова Е. Д., Москаленко О. И.</i> Мультистабильность на границе индуцированной шумом синхронизации в несвязанных осцилляторах Лоренца	29
<i>Килина А. К., Станкевич Н. В.</i> Хаос и гиперхаос в неавтономной модели генератора Анищенко–Астахова	31

<i>Клиньшов В. В., Соловьев И. А.</i> Аттракторы и их бассейны притяжения в сети Хопфилда	33
<i>Костерин Д. С.</i> Устойчивость решений квазинормальной формы одной краевой задачи специального вида	35
<i>Нечаев В. А., Рыбалова Е. В., Стрелкова Г. И.</i> Влияние аддитивного шума на вероятность появления химерных состояний	37
<i>Никишина Н. Н., Рыбалова Е. В., Вадивасова Т. Е.</i> Химерные состояния в ансамбле кубических отображений и отображений Рикера при шумовой модуляции параметра связи	39
<i>Пантелеева П. Ю., Станкевич Н. В.</i> Картина режимов в неавтономной системе Хиндмарша–Роуза при изменении направления действия внешних импульсов	41
<i>Семенов В. В., Бух А. В., Семенова Н. И.</i> Возбуждение автоколебаний в модели ФитцХью–Нагумо: периодическая и хаотическая динамика	43
<i>Султанов О. А.</i> Резонансные режимы в нелинейных системах с затухающими осциллирующими возмущениями	45
<i>Чирков М. А.</i> Локальное уравнение тетраэдров Замолодчикова и отображения 4-симплекса	47

Моделирование глобальных процессов. Нелинейная динамика и гуманитарные науки

<i>Макаренко Н. Г.</i> Топологический анализ данных	49
<i>Вершинина О. С., Иванченко М. В.</i> Синхронизация колебаний в пространственно-распределенной модели взаимодействующих популяционных игр	51
<i>Головина А. А., Яхно В. Г.</i> Математическое моделирование многозадачных режимов в нейроноподобных распознающих системах	53
<i>Кривонос М. И., Тихомиров С. Н.</i> Среднее время поглощения в игровых случайных блужданиях на квадратной решетке	55
<i>Сутягин А. А., Канаков О. И.</i> Механизм обучения коллективного классификатора на основе конкуренции, управляемой обучающими примерами	57

Нелинейные волны. Солитоны. Автоволны. Самоорганизация

<i>Говорухин В. Н.</i> Вихревые конфигурации в жидкости и нелинейные явления	59
--	----

<i>Кащенко С. А.</i> Бесконечномерные критические случаи в цепочках связанных осцилляторов	61
<i>Алексеев В. В., Зеленова В. К., Преображенская М. М.</i> Существование и исследование устойчивости решений в форме дискретной бегущей волны в полностью связанной цепи генераторов Мэки–Гласса	63
<i>Бир А. С.</i> Генераторы ультракоротких импульсов спиновых волн: теория и эксперимент	65
<i>Гарбузов Ф. Е., Бельтюков Я. М.</i> Вязкоупругое обобщение нелинейной модели упругости Мурнагана.....	67
<i>Елатенцев Р. Д., Сергеев К. С.</i> Влияние накачки на солитоноподобные волны в решетке частиц, связанных нелинейными силами	69
<i>Пермякова Э. В., Голдобин Д. С.</i> Стохастическое параметрическое возбуждение конвекции Рэлея–Бенара.....	71
<i>Ростунцова А. А.</i> Исследование характера модуляционной неустойчивости при циклотронном резонансном взаимодействии излучения со встречным прямолинейным пучком электронов.....	73
<i>Третинников П. В., Гусаков Е. З., Попов А. Ю.</i> Влияние периферийной турбулентности в токамаке на низкопороговую параметрическую распадную неустойчивость.....	75
<i>Тюлькина И. В., Голдобин Д. С., Клименко Л. С., Пиковский А.</i> Точные решения для динамики двухгрупповых состояний ансамблей Отта–Антонсена	77
Нелинейная динамика и нейронаука	
<i>Глызин С. Д., Глызин С. Д., Колесов А. Ю.</i> Методы и приемы исследования систем сингулярно возмущенных уравнений с запаздыванием и связью различных типов	79
<i>Клиньшов В. В., Кириллов С. Ю., Некоркин В. И.</i> Модели нейронных масс нового поколения	81
<i>Акимова А. С., Руннова А. Е., Симонян М. А., Панина О. С., Журавлев М. О.</i> Особенности электрической активности головного мозга у новорожденных разного гестационного возраста.....	83
<i>Богатенко Т. Р., Сергеев К. С., Слепнев А. В., Стрелкова Г. И., Семенова Н. И.</i> Особенности внедрения, обучения и функционирования искусственной нейронной сети, состоящей из моделей биологических нейронов	85

<i>Громов Н. В., Леванова Т. А.</i> Квантование данных для нейронных сетей в задаче предсказания экстремальных событий по данным временного ряда	87
<i>Долинина А. Ю., Сысоева М. В., Сысоев И. В.</i> Нелинейность в основе особенностей частотно-временной организации пик-волновой активности	89
<i>Егоров Н. М., Пономаренко В. И., Сысоев И. В., Сысоева М. В.</i> Кольцевой контур из осцилляторов ФитцХью–Нагумо, как фундамент для радиотехнической модели лимбической эпилепсии	91
<i>Емельянова Е. П., Сельский А. О.</i> Разметка стадий быстрого и медленного сна с помощью рекуррентного анализа	93
<i>Ершова А. С., Грищенко А. А., Сулейманова Е. М., Виноградова Л. В., Сысоев И. В.</i> Анализ связности между полушариями мозга у крыс–фармакологических моделей абсансной эпилепсии с помощью функции взаимной информации	95
<i>Журавлев М. О., Агальцов М. В., Киселев А. Р., Симонян М. А., Новиков М. Ю., Драпкина О. М., Руннова А. Е.</i> Компенсаторные механизмы снижения межполушарной синхронизации ЭЭГ активности во время сна у пациентов с апноэ	97
<i>Зеленова В. К.</i> Релейная модель замирающего нейрона	99
<i>Капустников А. А., Сысоев И. В., Сысоева М. В.</i> Сетевая модель эпилептиформной активности с использованием модельных нейронов Моррис–Лекара	101
<i>Ковалева Н. С., Мищенко М. А., Матросов В. В.</i> Гибкая модель рабочей памяти нейронной сети с двумя типами пластичности	103
<i>Лачинова Д. А., Сысоев И. В., Сулейманова Е. М., Виноградова Л. В.</i> Динамика направленной межполушарной связанности в мозге крыс после прохождения волны распространяющейся депрессии	105
<i>Маковкин С. Ю., Иванченко М. В., Гордлеева С. Ю.</i> Синхронизация в нейрон-астроцитарных ансамблях гиппокампа	107
<i>Мальшев Ю. А., Яхно В. Г.</i> Оптимизация биоморфной системы визуальной навигации	109
<i>Маслеников И. Н.</i> Локальная динамика уравнения второго порядка с запаздыванием в производной	111
<i>Назариков С. И.</i> Математическая модель для выявления эпилептических приступов на записи ЭЭГ	113

<i>Оленин С. М., Леванова Т. А., Стасенко С. В.</i> Динамика редуцированной среднеполевой модели нейрон-глиального взаимодействия	116
<i>Радушев Д. О., Догонашева О. А., Захаров Д. Г.</i> Динамические механизмы возникновения слабых гамма-ритмов	118
<i>Семенова Н. И.</i> Влияние шума на работу рекуррентных нейронных сетей	120
<i>Созонов Е. А., Сысоев И. В., Сулейманова Е. М., Виноградова Л. В.</i> Использование эмпирических моделей с радиальными базисными функциями для анализа сигналов распределённых нейросетей	122
<i>Такашвили Л. В., Сысоев И. В., Пономаренко В. И.</i> Реализация радиофизической модели нейрона Фитцхью–Нагумо с аппроксимацией нелинейной функции диодами	124
<i>Фатеев И. С., Полежаев А. А.</i> Влияние нелокальных связей на динамику распространения потенциала действия в одномерной системе взаимодействующих нейронов, описываемых моделью Hindmarsh–Rose	126
<i>Филатов И. Д., Куркин С. А., Мартынова О. В., Сысоева О. В., Портнова Г. В.</i> Исследование особенностей функциональных сетей головного мозга при расстройствах аутистического спектра	128
Новое в прикладной физике	
<i>Елисов М. В.</i> Самоорганизационная динамика в полупроводниковых гетероструктурах при инжекции носителей зарядов.....	130
<i>Зарудная М. А., Аблаева Л. А., Адилова А. Б.</i> Исследование взаимной синхронизации гиротронов с запаздыванием в канале связи.....	132
<i>Колесниченко Е. Е., Ростунцова А. А.</i> Разработка миниатюрных лестничных замедляющих систем субтерагерцового диапазона на основе метаматериалов	134
Прикладные задачи нелинейной теории колебаний и волн	
<i>Бузмаков М. Д., Брацун Д. А.</i> Нелинейная динамика запаздывающего репрессиллятора.....	136
<i>Вахлаева А. М., Ишбулатов Ю. М., Караваев А. С., Прохоров М. Д.</i> Разработка математической модели фотоплетизмограммы для тестирования методов анализа сигналов биологической природы	138

<i>Волкова С. А., Вытовтов К. А., Барабанова Е. А., Иванов М. Г.</i> Поведение оптической волны в нелинейной среде с периодически расположенными проводящими нанопленками	140
<i>Кропотина Ю. А., Петрукович А. А., Быков А. М., Чугунова О. М.</i> Моделирование ионной вейбелевской неустойчивости в бесстолкновительной ударной волне в слабо замагниченной плазме	142
<i>Любченко Д. О., Исаева О. Б.</i> Передача цифрового и аналогового сигнала с помощью генераторов с грубой динамикой.....	144
<i>Митрофанова А. Ю., Сафин А. Р., Никитов С. А.</i> Влияние внешнего магнитного поля на критические токи спинтронного антиферромагнитного осциллятора	146
<i>Мищенко М. А., Матросов В. В.</i> Динамическая модель принятия решений в сети потребителей.....	148
<i>Светлицына Н. А., Тучин В. В., Семенова Н. И.</i> Влияние осмотического давления на рост раковых клеток на поверхности эпидермиса.....	150
<i>Федотов П. Е., Соколов Н. В.</i> Решение нелинейной задачи динамически нагруженного упорного подшипника скольжения.....	152
<i>Федулов Д. Д.</i> Численный анализ аттракторов математической модели дискретной RCL-линии с туннельным диодом	154
<i>Филимонова А. М., Говорухин В. Н.</i> Динамика пассивных частиц жидкости в вихревом паркете	155
<i>Цырульникова Л. А., Сафин А. Р.</i> Взаимная синхронизация двух спинтронных осцилляторов общим током.....	157
<i>Якупов Э. О., Губернов В. В., Полежаев А. А.</i> Моделирование пространственно-временных структур на фронте пламени в редуцированной модели горения водорода.....	159

Термодинамические аналогии в хаотической динамике одномерных дискретных систем

В. М. Аникин

Саратовский национальный исследовательский
государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия

✉ AnikinVM@sgu.ru

Формулировка задачи. Точки траектории хаотического отображения (итерационной по определению процедуры) могут интерпретироваться как выборка значений случайной величины, описываемой некоторым вероятностным распределением (при рассмотрении полученного массива значений в целом). Это распределение называют инвариантным, оно является неподвижной точкой линейного несамосопряженного оператора (Перрона–Фробениуса), ассоциированного с отображением (конкретное представление оператора определяется видом отображения). По своему математическому смыслу оператор Перрона–Фробениуса задает правило пересчета вероятностной плотности при нелинейном преобразовании случайных величин. Инвариантное распределение является, таким образом, решением интегрального функционального уравнения Перрона–Фробениуса с сингулярным ядром.

Ставится задача анализа нестационарного процесса сходимости (по метрике) в функциональном пространстве вероятностных плотностей последовательности плотностей, «рожденной» некоторой исходной (в принципе, произвольной) вероятностной плотности как начального условия итерационного процесса к инвариантному распределению выбранного отображения, а также оценки скорости сходимости произвольно заданного вероятностного распределения к равновесному (инвариантному) в статистическом смысле (в пространстве вероятностных плотностей) распределению под многократным воздействием оператора Перрона–Фробениуса.

Термодинамическая интерпретация. Базовым понятием термодинамики — как классической равновесной, так и современной неравновесной — является понятие равновесного состояния для изолированной системы. Эволюция произвольного состояния к состоянию равновесия происходит в результате необратимых процессов, которые «понуждают» систему эволюционировать к состоянию равновесия. В состоянии равновесия эти процессы прекращаются. Информация, даваемая термодинамикой, имеет ценность вследствие ее общности.

В термодинамических терминах установления равновесного состояния можно трактовать и эволюционные свойства детерминированных дискретных динамических систем (в форме разностных уравнений), демонстрирующих хаотическое поведение. Если траекторные особенности хаотического итерационного процесса на всех его стадиях можно предсказать исключительно в вероятностном ключе, то направление, в котором меняются при итерациях вероятностные свойства (по ансамблю траекторий) сечений процесса можно ожидать в форме первой собственной функции ассоциированного с отображением оператора Перрона–Фробениуса (инвариантной плотности). Образно говоря, оператор Перрона–Фробениуса «перемалывает» текущие (отвечающие шагу итерации) вероятностные распределения в направлении к своей неподвижной точке — инвариантному распределению. Скорость этого «перемалывания» определяется значением собственных чисел оператора. Еще одной «термодинамической» характеристикой в теории детерминированного хаоса может служить энтропия Колмогорова–Синая, определяющая характер режима в динамической системе: ее положительность «сигнализирует» о наличии хаотическом поведении. При нулевом значении энтропии может также наблюдаться хаотическое поведение для *обратимых* динамических систем, к числу которых принадлежит дробно-линейное отображение.

Аналитическое решение задачи. Аналитическое решение задачи об установлении особенностей необратимой релаксации к инвариантной плотности основано на расчетах результатов неоднократного действия оператора Перрона–Фробениуса на функции, обладающие свойством вероятностной плотности. В качестве примеров рассматриваются нестационарные процессы сходимости к инвариантному распределению, задаваемые операторами Перрона–Фробениуса для кусочно-линейных хаотических отображений. Характер сходимости к инвариантному распределению проявляется особенно четко в случае полиномиального представления начальной плотности или при разложении ее в ряд Тейлора. Техническое решение задачи основано на использовании явного вида собственных функций и кратно уменьшающихся собственных чисел операторов Перрона–Фробениуса для рассматриваемых отображений.

В контексте решения задач сходимости вероятностных распределений, а также задач на расщепление корреляций в хаотических системах иллюстрируется значимость решения спектральных задач для оператора Перрона–Фробениуса.

Псевдокумулянты и динамика отклонений от распределения Лоренца в задачах статистической физики*

Д. С. Голдобин^{1,2}

¹Институт механики сплошных сред УрО РАН

²Пермский государственный национальный исследовательский университет

✉ denis.goldobin@gmail.com

Ряд важных классических задач статистической физики и теории самоорганизации точно решен только для случая распределения Лоренца [1–4]. Построение теории возмущений для теоретического описания этих задач в неидеальных ситуациях довольно долго оставалось нерешенной проблемой. Это вполне естественно, поскольку такие системы требуют подходящего формализма — все «традиционные» моменты и кумулянты для таких систем расходятся. Однако, для этих систем остается возможным описание динамики характеристических функций. При построении такого описания для ансамбля квадратичных нейронов–пороговых интеграторов (quadratic integrate-and-fire neurons, QIF) с сетью рекурсивных синаптических связей [4] естественным образом возник формализм «псевдокумулянтов». В рамках данного формализма удалось описать макроскопическую динамику популяции в присутствии эндогенных и экзогенных шумов [5], а также для иных ситуаций, при которых распределение состояний отклоняется от распределения Лоренца и становится неприменимо математическое описание работы [4].

Формализм «псевдокумулянтов» (на основе характеристических функций) может быть введен для работы с возмущенным распределением Лоренца. В общем случае он дает бесконечную (сходящуюся) цепочку среднеполевых уравнений, которая может быть оборвана. Маломодовые среднеполевые модели могут быть получены для макроскопической динамики ансамблей QIF, одномерной локализации Андерсона и некоторых других задач статистической физики. В частности, в рамках маломодовых моделей может быть строго исследована устойчивость многообразий Отта–Антонсена (Ott–Antonsen) [3] или Монтбрио–Пазо–Роксина (Montbrió–Pazó–Roxin) [4]. Маломодовые модели хорошо воспроизводят динамику конечных сетей [5].

Для псевдокумулянтных разложений оказывается справедлив аналог теоремы Марцинкевича [6]: отличным от нуля может быть либо только

*Работы выполнены в рамках бюджетной темы № 121112200078-7.

первый псевдокумулянт, либо бесконечно много. Во многих задачах псевдокумулянтное разложение оказывается особенно удобным формализмом, поскольку старшие псевдокумулянты не влияют на связь наблюдаемых макроскопических величин с первым псевдокумулянтом (в частности, для ансамблей QIF и локализации Андерсона в одномерии). Второй псевдокумулянт имеет прозрачный физический смысл: его вещественная часть аналогична куртозису, а мнимая — определяет наклон (skewness) распределения.

Список литературы

1. *Якубович Е. И.* О динамике процессов в средах с неоднородным уширением линии рабочего вещества // *ЖЭТФ*. 1968. Т. 55. С. 304–311.
2. *Lloyd P.* Exactly solvable model of electronic states in a three-dimensional disordered Hamiltonian: non-existence of localized states // *J. Phys. C: Solid State Phys.* 1969. Vol. 2. P. 1717–1725.
3. *Ott E., Antonsen T. M.* Low dimensional behavior of large systems of globally coupled oscillators // *Chaos*. 2008. Vol. 18. 037113.
4. *Montbrió E., Pazó D., Roxin A.* Macroscopic description for networks of spiking neurons // *Phys. Rev. X*. 2015. Vol. 5. 021028.
5. *Goldobin D. S., di Volo M., Torcini A.* Reduction Methodology for Fluctuation Driven Population Dynamics // *Phys. Rev. Lett.* 2021. Vol. 127, no. 3. 038301.
6. *Marcinkiewicz J.* Sur une propriété de la loi de Gauss // *Mathematische Zeitschrift*. 1939. Vol. 44. P. 612–618.

Границы глобальной устойчивости и скрытые аттракторы в системах фазовой автоподстройки частоты*

Н. В. Кузнецов^{1,2}✉, Е. В. Кудряшова¹, М. Ю. Лобачев¹

¹Санкт-Петербургский государственный университет

²Институт Проблем Машиноведения Российской Академии Наук

✉ nkuznetsov239@gmail.com

Схемы фазовой автоподстройки являются нелинейными системами автоматического регулирования, реализующими принцип синхронизации ведущий-ведомый для фаз периодических сигналов. Первые схемы фазовой автоподстройки частоты (ФАПЧ, phase-locked loops) были реализованы более 100 лет назад для подстройки частоты управляемого генератора электрических колебаний к частоте входного сигнала. Схемы ФАПЧ получили широкое распространение в телекоммуникационном оборудовании, распределенных компьютерных архитектурах, навигационных системах и других приложениях.

В последние десятилетия происходило бурное развитие новых областей применения фазовой автоподстройки и проектирование различных новых модификаций ФАПЧ, а также появились технологические возможности точной реализации предлагаемых математических моделей ФАПЧ на практике. Все это потребовало разработки более полных математических моделей ФАПЧ, уточнения и адаптации основных используемых определений и дальнейшего развития строгого математического аппарата для нелинейного анализа и синтеза ФАПЧ [1–7]. Одной из ключевых задач анализа и синтеза ФАПЧ является определение полосы захвата, соответствующей глобальной устойчивости синхронного режима. Трудности точного определения полосы захвата связаны с необходимостью выявления скрытых участков границы глобальной устойчивости в пространстве параметров и анализа нелокального рождения скрытых аттракторов в фазовом пространстве [8–11].

Список литературы

1. Leonov G., Kuznetsov N., Yuldashev M., Yuldashev R. Hold-in, pull-in, and lock-in ranges of PLL circuits: rigorous mathematical definitions and limitations of classical theory // IEEE Transactions on Circuits and Systems–I: Regular Papers. 2015. Vol. 62, no. 10. P. 2454–2464.

*При поддержке программы Ведущих научных школ РФ (НШ-4196.2022.1.1).

2. *Best R., Kuznetsov N., Leonov G. et al.* Tutorial on dynamic analysis of the Costas loop // *IFAC Annual Reviews in Control*. 2016. Vol. 42. P. 27–49.
3. *Кузнецов Н.В., Лобачев М.Ю., Юлдашев М.В. и др.* Об обобщенной задаче Гарднера для систем фазовой автоподстройки в электрических сетях // *Доклады Академии наук*. 2021. Т. 498, № 1. С. 71–75.
4. *Kuznetsov N., Belyaev Y., Styazhkina A. et al.* Estimation of PLL architecture on MEMS gyroscope performance // *Gyroscopy and Navigation*. 2022. Vol. 13, no. 1. P. 44–52.
5. *Kuznetsov N., Matveev A., Yuldashev M., Yuldashev R.* Nonlinear Analysis of Charge-Pump Phase-Locked Loop: The Hold-In and Pull-In Ranges // *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*. 2021. Vol. 68, no. 10. P. 4049–4061.
6. *Kuznetsov N., Lobachev M., Yuldashev M., Yuldashev R.* The Egan problem on the pull-in range of type 2 PLLs // *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*. 2021. Vol. 68, no. 4. P. 1467–1471.
7. *Kuznetsov N., Lobachev M., Yuldashev M., Yuldashev R., Tavazoei M.* The Gardner problem on the lock-in range of second-order type 2 phase-locked loops // *IEEE Transactions on Automatic Control*. 2023. (in print).
8. *Leonov G., Kuznetsov N.* Hidden attractors in dynamical systems. From hidden oscillations in Hilbert-Kolmogorov, Aizerman, and Kalman problems to hidden chaotic attractors in Chua circuits // *Int. J. of Bifurcation and Chaos*. 2013. Vol. 23, no. 1. art. no. 1330002.
9. *Kuznetsov N., Leonov G., Yuldashev M., Yuldashev R.* Hidden attractors in dynamical models of phase-locked loop circuits: limitations of simulation in MATLAB and SPICE // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2017. Vol. 51. P. 39–49.
10. *Кузнецов Н.В.* Теория скрытых колебаний и устойчивость систем управления // *Известия РАН. Теория и системы управления*. 2020. № 5. С. 5–27.
11. *Кузнецов Н.В., Лобачев М.Ю., Мокаев Т.Н.* Скрытая граница глобальной устойчивости в контрпримере к гипотезе Капранова о полосе захвата // *Доклады РАН*. 2023 (в печати).

Химеры и уединенные состояния в кольце нелокально связанных отображений Эно–Лози*

В. М. Аверьянов[✉], Е. В. Рыбалова, Г. И. Стрелкова

Саратовский национальный исследовательский
государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

✉ vladaveryanov2002@yandex.ru

Ансамбли с различным типом парциальных элементов и топологией связи могут демонстрировать большое разнообразие пространственно-временных структур. На данный момент наиболее изучаемыми структурами являются химеры [2] и уединенные состояния [2]. В данной работе изучается динамика кольца нелокально связанных отображений Эно–Лози [3]. Исследования показали, что в такой системе возможно установление обоих выше приведенных типов режимов, что облегчает их исследование, включая влияние аддитивного шума.

При вариации управляющего параметра отображений Эно–Лози (α) и силы связи между элементами ансамбля (σ) в кольце нелокально связанных отображений может наблюдаться большое разнообразие режимов (рис. 1, *a*), в том числе уединенные состояния (при $\alpha < 1.63$ и $\sigma < 0.3$) и химеры (при $\alpha > 1.63$). Отметим, что на границе областей существования уединенных и химерных состояний возможно наблюдения химер уединенных состояний.

Было проведено исследование влияния аддитивного шума на динамику системы при двух значениях параметра α : 1) в области, где наблюдаются только уединенные состояния при увеличении силы связи и переходе от некогерентной динамики к когерентной (рис. 1, *b*, $\alpha = 1.5$); 2) недалеко от границы между областями существования уединенных и химерных состояний (рис. 1, *в*, $\alpha = 1.6$). В качестве источника шума использовался генератор шума с нормальным распределением ($A\psi_i(n)$). В первом случае аддитивный шум приводит к эффекту, качественно схожему тому, который наблюдался при воздействии шума на кольцо нелокально связанных отображений Лози [4, 5]. Во втором случае, в связи с тем, что при $\alpha = 1.6$ в системе кроме уединенных состояний наблюдаются химерные, на рис. 1, *в* можно выделить две области: левая, в которой наблюдаются уединенные состояния и можно говорить о коли-

*Исследование выполнено при финансовой поддержке РНФ в рамках научного проекта № 20-12-00119.

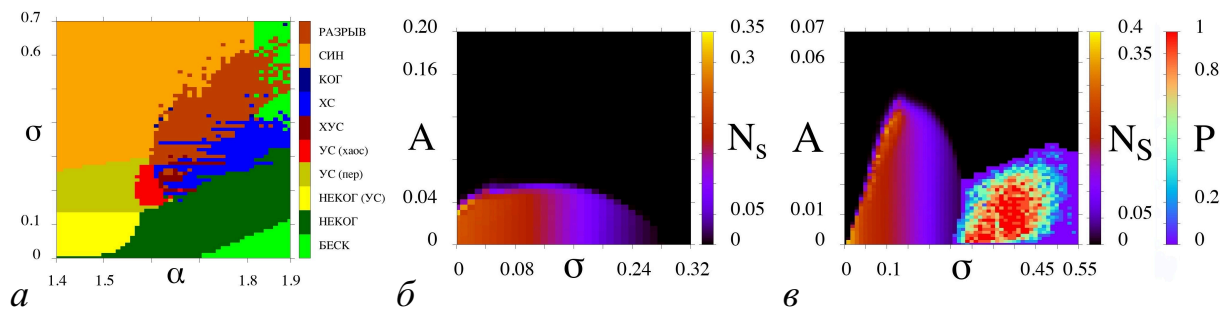


Рис. 1. Динамика кольца нелокально связанных отображений Эно–Лози и влияние аддитивного шума. *a* – Карта режимов без шума. Обозначения: БЕСКОН – уход траекторий системы на бесконечность, НЕКОГ – некогерентная динамика элементов, НЕКОГ (УС) – некогерентный профиль, который представляет собой множество уединенных выбросов, УС (пер) – уединенные состояния с периодической динамикой элементов, УС (хаос) – уединенные состояния с хаотической динамикой элементов, ХУС – химера уединенных состояний, ХС – химерные состояния, КОГ – когерентная динамика элементов, СИН – полная синхронизация всех элементов, РАЗРЫВ – пространственный профиль с разрывами. *б* – Распределение среднего нормированного числа уединенных выбросов N_s на плоскости параметров (σ, A) при $\alpha = 1.5$. *в* – Распределение N_s и вероятности установления химер P при $\alpha = 1.6$. Расчеты проводились для 10 пар реализаций случайно распределенных начальных условий и реализаций шума

честве уединенных выбросов в системе (цветовая шкала N_s) (качественно совпадает с рис. 1, *б* и результатами из работ [4, 5]) и правая, в которой наблюдаются химеры и можно вычислить вероятность их установления (цветовая шкала P). При этом P – вероятность установления химер – достигает максимума только при некотором оптимальном значении интенсивности шума A , то есть наблюдается эффект, подобный резонансу, как в работе [5], где исследовалась динамика зашумленных колец нелокально связанных логистических отображений и отображений Эно.

Список литературы

1. *Omelchenko I., Maistrenko Y., Hövel P., Schöll E.* Loss of coherence in dynamical networks: Spatial chaos and chimera states // *Physical review letters*. 2011. Vol. 106, iss. 23. P. 234102.
2. *Maistrenko Y., Penkovsky B., Rosenblum M.* Solitary state at the edge of synchrony in ensembles with attractive and repulsive interactions // *Physical Review E*. 2014. Vol. 89, iss. 6. P. 060901(R).
3. *Aziz-Alaoui M. A., Robert C., Grebogi C.* Dynamics of a Hénon–Lozi-type map // *Chaos, Solitons & Fractals*. 2001. Vol. 12, iss. 12. P. 2323–2341.
4. *Rybalova E., Strelkova G.* Response of solitary states to noise-modulated parameters in nonlocally coupled networks of Lozi maps // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. 2022. Vol. 32, iss. 2. P. 021101.
5. *Rybalova E., Schöll E., Strelkova G.* Controlling chimera and solitary states by additive noise in networks of chaotic maps // *Journal of Difference Equations and Applications*. 2022. P. 1–22.

**Существование и устойчивость
медленно осциллирующих периодических решений
одного класса дифференциальных уравнений с запаздыванием**

Д. Д. Баин

Ярославский государственный университет имени П. Г. Демидова

✉ danila.bain@yandex.com

Рассмотрим дифференциальное уравнение с запаздыванием:

$$\ddot{u} + b\dot{u} + cu = sc \cdot \text{sign}(u(t-1)), \quad (*)$$

где $b, c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$, и $s = \pm 1$. Для данного уравнения отыскиваются периодические решения, колеблющиеся около нуля.

В случае, когда характеристический многочлен левой части уравнения (*) имеет вещественные корни (при $b^2 - 4c > 0$), обнаруживаются только *медленно осциллирующие решения*, т. е. не пересекающие ноль более одного раза на периоде запаздывания. В этом случае аналитически получены достаточные условия существования устойчивых периодических решений, и численно показано, что данные условия должны являться также и необходимыми.

С целью нахождения *медленно осциллирующих* периодических решений рассматривается следующее множество начальных условий, составленное из начальных функций, к которым в пару поставлена их производная в точке ноль:

$$S_1 = \left\{ \begin{array}{l} (\varphi, \dot{\varphi}(0)) : \varphi \in C([-1, 0]), \quad \varphi(t) < 0 \text{ при } t < 0, \\ \varphi(0) = 0, \quad \dot{\varphi}(0) \in V \end{array} \right\} \subset C[a, b] \times V,$$

где $V \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$ — множество неотрицательных начальных скоростей, выбранное так, что решение, соответствующее начальному условию из множества S_1 не пересекает ноль на интервале $(0, 1]$, но пересекает ноль на интервале $(1, +\infty)$ (в противном случае решение уравнения точно не является медленно осциллирующим).

Далее на множестве S_1 определяется отображение Пуанкаре $\Pi : S_1 \rightarrow C[a, b] \times \mathbb{R}_{\geq 0}$, с сечением $\{(u, \dot{u}) : u = 0\}$. В отображении Π выделяется отображение $p : V \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, переводящее $\dot{\varphi}(0)$ в производную решения в его следующем пересечении нуля. Далее отображение p исследуется на существование и устойчивость неподвижных и периодических точек.

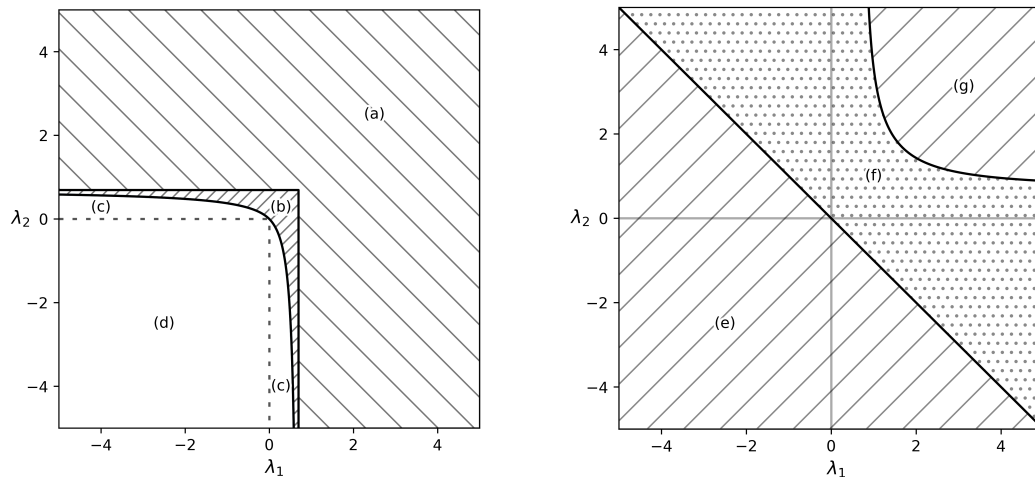


Рис. 1. Пусть λ_1, λ_2 — (вещественные) корни характеристического многочлена левой части дифференциального уравнения (*). На рисунках изображены области параметров в терминах λ_1, λ_2 , отвечающие разным характерам решений уравнения (*) в случаях $s \cdot c < 0$ и $s \cdot c > 0$ соответственно: (a), (b), (e), (g) — уравнение не имеет периодических решений; (c), (d) — уравнение имеет устойчивое периодическое решение; (f) — уравнение имеет только неустойчивое периодическое решение

Доказывается, что условия существования и устойчивости неподвижных и периодических точек для отображений Π и p эквивалентны, в связи с чем получают достаточные условия на коэффициенты уравнения для существования и устойчивости периодических решений исходного уравнения. На приведённых рисунках изображены области в пространстве параметров, отвечающие разным характерам решений уравнения (*).

В случае, когда характеристический многочлен левой части уравнения (*) имеет комплексные корни (при $b^2 - 4c \leq 0$), система (*) имеет сложную динамику, вплоть до возникновения хаотических колебаний. В этом случае численно найдены области параметров, при которых существуют ограниченные осциллирующие около нуля решения. Аналитических результатов о периодичности решений в данном случае получено не было.

Список литературы

1. Каценко С. А. Сравнительный асимптотический анализ динамики автогенераторов с различными нелинейными запаздывающими связями // *Фундамент. и прикл. матем.* 1999. Т. 5, вып. 4. С. 1027–1060.
2. Дмитриев А. С., Каценко С. А. Асимптотика нерегулярных колебаний в модели автогенератора с запаздывающей обратной связью // *Докл. РАН.* 1993. Т. 328, № 2. С. 174–177.

Сценарии рождения аттракторов в кусочно-линейной системе лоренцевского типа*

Д. А. Бакалина¹, Н. В. Барабаш^{1,2}

¹Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского

²Волжский государственный университет водного транспорта

✉ darya.bakalina@gmail.com, ✉ barabash@itmm.unn.ru

В докладе рассматривается трёхмерная кусочно-линейная система, образованная тремя линейными подсистемами A_s , A_l и A_r [2–4]

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= x, & \dot{x} &= -\lambda(x \pm 1) + \omega(z - b), \\
 A_s : \dot{y} &= -\alpha y, & A_{l,r} : \dot{y} &= -\delta(y \pm 1), \\
 \dot{z} &= -\nu z, & \dot{z} &= -\omega(x \pm 1) - \lambda(z - b)
 \end{aligned} \tag{1}$$

где $\alpha, \delta, \nu, \omega, \lambda, b$ — положительные параметры. Системы $A_{s,l,r}$ определены в смежных областях фазового пространства $G_s = \{|x| < 1, y \in \mathbb{R}^1, z < b, \}$, $G_l = \{x \leq -1, z \leq b; x \leq -1, z > b, y \leq 0, x < 1, z > b, y < 0\}$ и $G_r = \mathbb{R}^3 \setminus \{G_s \cup G_l\}$ соответственно.

В докладе показано, что в зависимости от значения параметра ν , играющего роль седлового индекса, в системе (1) наблюдается два различных бифуркационных сценария рождения хаотических аттракторов. А именно, при $\nu < 1$, в системе (1) реализуется типичный сценарий рождения сингулярно-гиперболического аттрактора лоренцевского типа, проходящий через гетероклиническую бифуркацию сепаратрис седла и седловых предельных циклов. Приводится численное сопоставление полученного сценария с бифуркациями в оригинальной системе Лоренца (рис. 1(a),(b)). При $\nu > 1$ переход к хаосу происходит через каскад чередующихся гомоклинических бифуркаций седла и бифуркаций «вилка» устойчивых предельных циклов, приводящих к удвоению периода устойчивых периодических орбит с их последующим раздваиванием. В докладе численно показано (рис. 1(c),(d)), что этот сценарий аналогичен переходу к хаосу в системе Любимова–Закса [5]

$$\dot{x} = -\sigma x + \sigma y + \sigma y D(z - r), \quad \dot{y} = rx - y - xz, \quad \dot{z} = xy - bz.$$

Таким образом, на основании качественно-численного исследования в докладе утверждается, что кусочно-линейная система (1) подобна

*Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования (проект № 0729-2020-0036).

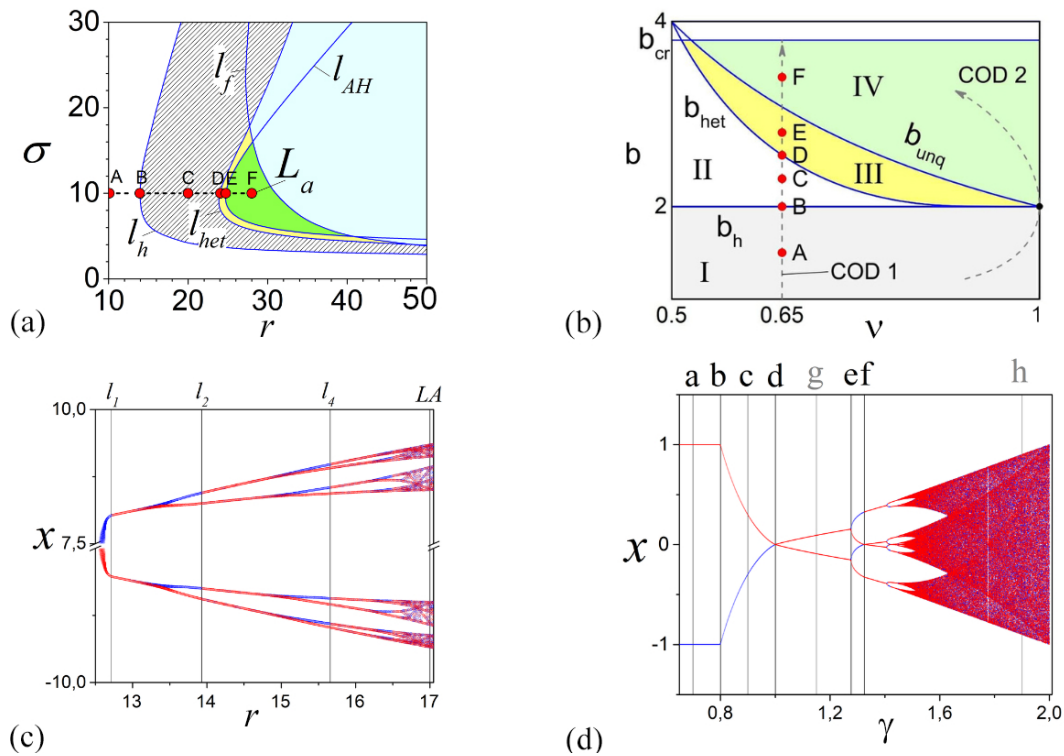


Рис. 1. Численное сравнение бифуркационных сценариев в кусочно-линейной системе (1) при $\nu < 1$ (б) и $\nu > 1$ (г) с аналогичными сценариями в оригинальной системе Лоренца (а) и системы Любимова–Закса (е), соответственно

нелинейным системам лоренцевского типа по набору их основных свойств и сценариям рождения аттракторов. Такое подобие позволит использовать поддающуюся аналитическому исследованию кусочно-линейную систему (1) в более сложных задачах как хорошую модель оригинальных нелинейных неинтегрируемых систем.

Список литературы

1. Belykh V. N., Barabash N. V., Belykh I. V. A Lorenz-type attractor in a piecewise-smooth system: Rigorous results // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. 2019. T. 29, № 10. С. 103108.
2. Belykh V. N., Barabash N. V., Belykh I. V. Bifurcations of chaotic attractors in a piecewise smooth Lorenz-type system // *Automation and Remote Control*. 2020. T. 81, № 8. С. 1385–1393.
3. Belykh V. N., Barabash N. V., Belykh I. V. Sliding homoclinic bifurcations in a Lorenz-type system: Analytic proofs // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. 2021. T. 31, № 4. С. 043117.
4. Lorenz E. N. Deterministic nonperiodic flow // *Journal of atmospheric sciences*. 1963. T. 20, № 2. С. 130–141.
5. Lyubimov D. V., Zaks M. A. Two mechanisms of the transition to chaos in finite-dimensional models of convection // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 1983. T. 9, № 1–2. С. 52–64.

Странные нехаотические аттракторы в слабодиссипативном отображении Эно

В. В. Балаева[✉], А. В. Савин

Саратовский национальный исследовательский
государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

[✉] vkonda2000@mail.ru

Странные нехаотические аттракторы (СНА), как правило, возникают в системах с внешним квазипериодическим воздействием [1] и находятся на границе нехаотической области на карте динамических режимов. В данной работе в отображении Эно (1)–(3) были исследованы величины, вычисленные на основе ряда локальных показателей Ляпунова.

$$x_{n+1} = 1 - ax_n^2 - (1 - \nu)y_n + \varepsilon \cos(2\pi\theta_n), \quad (1)$$

$$y_{n+1} = x_n, \quad (2)$$

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \omega, \pmod{1}, \quad (3)$$

Были рассчитаны различные статистические величины для ряда локальных показателей Ляпунова при варьировании параметров отображения, и наблюдалось их значительное изменение при переходе из области квазипериодических режимов к СНА. Одна из величин была вычислена следующим образом: в «окне» из N первых локальных показателей Ляпунова, вычисленных на участках длиной M , определяются максимальное и минимальное значения, — MaxLLE и MinLLE . Далее были построены зависимости $\text{MaxLLE}(M)$ и $\text{MinLLE}(M)$ (рис. 1).

Характеристики $\text{MaxLLE}(M)$ и $\text{MinLLE}(M)$ качественно напоминают экспоненциальные зависимости, в пределе сходящиеся к показателю Ляпунова. $\text{MaxLLE}(M)$ для СНА пересекают нуль при больших M , чем для квазипериодики (сравниваются близко расположенные точки на плоскости параметров). $M(0)$ зависит не только от кривизны экспоненциальной кривой, но и от старшего показателя Ляпунова, определяющего высоту расположения графика и пересечение им оси абсцисс (при $M = M(0)$). При приближении к области СНА наблюдается сильное возрастание величины $M(0)$. На основании этого наблюдения был создан метод, позволяющий на карте динамических режимов обозначить области СНА и квазипериодики.

Интересно исследовать случай слабой диссипации, когда система совмещает свойства консервативной и диссипативной динамики. Метод

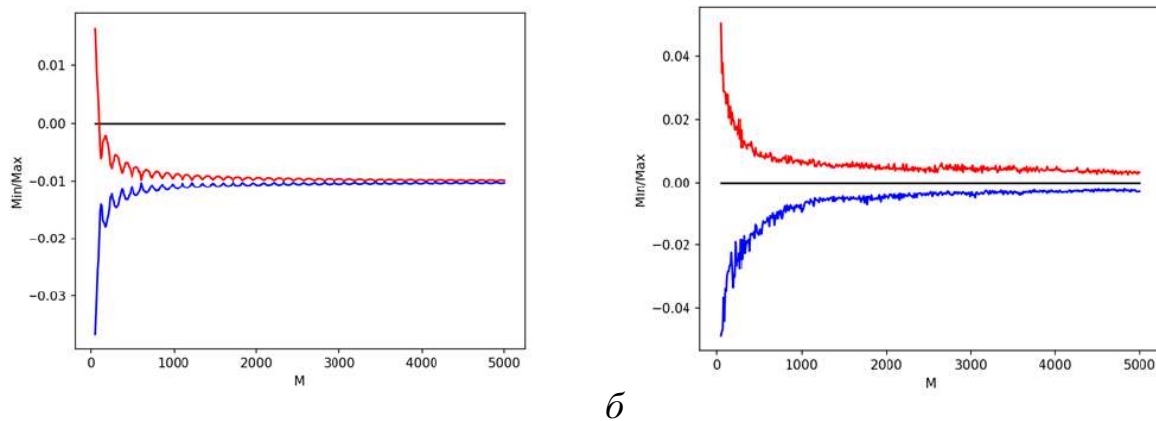


Рис. 1. Графики зависимости максимальных положительных (красный) и отрицательных (синий) отклонений локальных показателей Ляпунова от длины участков траектории $M = \{50..5000, dM = 10\}$ внутри окна из $N = 500$ первых локальных показателей Ляпунова. *a* — квазипериодический режим, $a = 0.1662$, $\varepsilon = 0.558$; *б* — СНА, $a = 0.1662$, $\varepsilon = 0.556$. Слабая диссипации, $\nu = 1.98$

локализации областей на карте режимов был реализован при сильной и слабой диссипации. Также было получено, что при приближении к слабодиссипативному пределу скорости уменьшения площади областей для СНА и для хаотического режима становится подобными и приблизительно экспоненциальными. Помимо результатов метода, различные характеристики локальной неустойчивости для СНА демонстрируют приближение по свойствам к хаотическим при слабой диссипации (например, зависимости доли неустойчивых участков траектории от длины участка траектории M [2]).

Список литературы

1. *Grebogi C., Ott E., Pelikan S. and Yorke L.* Strange Attractors That Are Non Chaotic. *Physica D: Nonlinear Phenomena*. Vol. 13. P. 261–268.
2. *Балаева В.В., Савин А.В.* Странные нехаотические аттракторы в слабодиссипативном отображении Эно // Тез. докл. XV Всероссийской конференции молодых ученых «Наноэлектроника, нанофотоника и нелинейная физика», Саратов, 13–15 сентября, 2022. Саратов: Изд-во «Техно-Декор», 2022. 249 с.

Доказательство существования аттрактора типа двойной спирали (double scroll)*

Н. В. Барабаш^{1,2}✉, В. Н. Белых^{1,2}, И. В. Белых^{1,3}

¹Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского

²Волжский государственный университет водного транспорта

³Государственный университет Джорджии, Атланта, США

✉ barabash@itmm.unn.ru

В докладе проведено доказательство существования аттрактора типа двойной спирали (double scroll) в построенной нами кусочно-линейной системе с гомоклинической петлёй к седло-фокусу. Система образована тремя линейными подсистемами A_0 , A_l и A_r [1]

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= x, & \dot{x} &= -\alpha(x \pm h) - \Omega(z \pm 1), \\
 A_0: \dot{y} &= -\nu y + \omega z, & A_{l,r}: \dot{y} &= -\beta y, \\
 \dot{z} &= -\omega y - \nu z, & \dot{z} &= \Omega(x \pm h) - \alpha(z \pm 1),
 \end{aligned} \tag{1}$$

заданными в областях G_0 , G_l и G_r соответственно, $G_0 = (|x| < h, (y^2 + z^2 \leq r^2) \cap (|z| < 1))$, $G_l = (x \leq -hz, y \in \mathbb{R}^1) \setminus G_0$, $G_r = (x > -hz, y \in \mathbb{R}^1) \setminus G_0$ (рис. 1(a)). Все параметры положительны. Параметр ν играет роль седлового индекса.

Настоящий доклад продолжает серию наших работ [2–4] о методе построения кусочно-гладких аналитически исследуемых систем. С помощью этого метода мы аналитически получили двумерное отображение Пуанкаре T глобальной секущей $D = D_l \cup D_r$ в себя. Его анализ позволил получить глобальную картину бифуркаций в системе (1) и доказать следующую теорему.

Теорема. Пусть выполняются условия:

$$\begin{aligned}
 \nu < 1, \quad \alpha \geq -\frac{2\Omega}{3\pi}h, \quad \beta > \frac{\Omega h + \alpha}{r^2 - 1}, \quad r e^{-\frac{3\pi\beta}{2\Omega}} < \sqrt{r^2 - 1} < \frac{\nu}{\omega}, \\
 0 \leq 1 - \frac{1}{h} e^{-\frac{3\pi\alpha}{2\Omega}} < \frac{\gamma}{1 + \gamma},
 \end{aligned}$$

где $\gamma = \frac{r\omega}{\sqrt{\nu^2 + \omega^2}} e^{-\frac{1}{\omega}(\pi - \sqrt{r^2 - 1} \arctan \frac{\nu/\omega + \sqrt{r^2 - 1}}{1 - \nu/\omega})}$. Тогда в отображении T существует аттрактор, все траектории которого лежат в спиралевидных образах секущей D .

*Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования (проект № 0729-2020-0036).

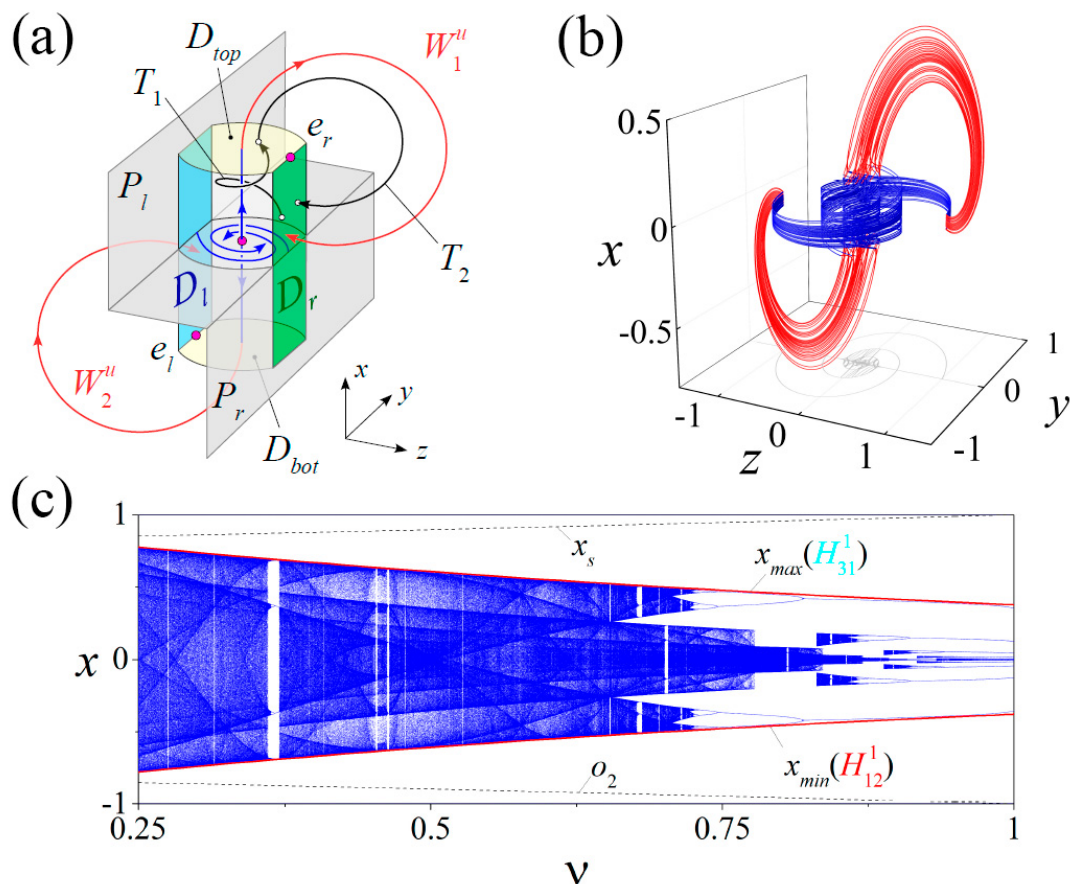


Рис. 1. (a) Построение системы (1). (b) Типичный аттрактор типа двойной спирали в системе (1) при $\Omega = 1$, $\nu = 0.75$, $\omega = 3$, $h = 0.172883$, $\alpha = 0.372452$, $r = 1.01539$, $\beta = 20$. (c) Расширенная бифуркационная диаграмма x от ν для системы (1) для параметров, соответствующих сохранению гомоклинической орбиты к седло-фокусу. Параметр ν есть седловой индекс. Заметим, что аттрактор существует при $\nu < 1/2$.

Типичный аттрактор системы (1) и его расширенная бифуркационная диаграмма приведены на рис. 1(b) и рис. 1(c), соответственно.

Список литературы

1. Belykh V. N., Barabash N. V., Belykh I. V. The hidden complexity of a double-scroll attractor: Analytic proofs from a piecewise-smooth system // *Chaos*. 2023. Т. 33, № 4. С. 043119.
2. Belykh V. N., Barabash N. V., Belykh I. V. A Lorenz-type attractor in a piecewise-smooth system: Rigorous results // *Chaos*. 2019. Т. 29, № 10. С. 103108.
3. Belykh V. N., Barabash N. V., Belykh I. V. Bifurcations of chaotic attractors in a piecewise smooth Lorenz-type system // *Automation and Remote Control*. 2020. Т. 81, № 8. С. 1385–1393.
4. Belykh V. N., Barabash N. V., Belykh I. V. Sliding homoclinic bifurcations in a Lorenz-type system: Analytic proofs // *Chaos*. 2021. Т. 31, № 4. С. 043117.

Оценка меры мультистабильности в однонаправленно связанных хаотических системах с различной топологией аттрактора*

Е. В. Евстифеев[✉], О. И. Москаленко

Саратовский национальный исследовательский
государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

✉ evstifeev@mail.ru

Данная работа посвящена исследованию существования мультистабильности [1] на границе обобщенной синхронизации [2] и оценке её меры в связанных системах, обладающих различной топологией аттрактора [3].

Для исследования была выбрана система Лоренца [4], находящаяся под воздействием со стороны системы Ресслера [5]. Для оценки наличия синхронизации в определенный момент безразмерного времени использовался метод вспомогательной системы [6]. Расчет бассейнов притяжения доказал существование мультистабильности в определенном интервале значений параметра связи: $\varepsilon \in [5, 6.8]$. Далее, была введена в рассмотрение мера мультистабильности как вероятность наблюдения асинхронного режима [7], т. е. как обратная величина вероятности того, что среди всех рассмотренных при различных начальных условиях вспомогательных систем для любой случайной пары из них будет наблюдаться эквивалентность состояний и, соответственно, режим обобщенной синхронизации.

Формула оценки меры мультистабильности $P_a(t)$ представлена в следующем виде:

$$P_a(t) \approx 1 - \sum_{i=1}^M \frac{2n(d^i(t))}{M(M-1)}, \quad (1)$$

где $M \gg 1$ — число ведомых систем с различными начальными условиями, $n(d^i(t))$ — число систем, находящихся в синхронизме с i -м ведомым осциллятором, $d^i = d^i(t)$ — зависимость модуля разности между состояниями двух ведомых систем от безразмерного времени.

Результат оценки усредненного модуля разности между состояниями систем и меры мультистабильности приведен на рис. 1. Из сравнения рис. 1, а и 1, б видно, что мультистабильность ($P_a \in (0; 1)$) наблюдается

*Работа поддержана Советом по грантам Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских ученых, грант № МД-18.2022.1.2.

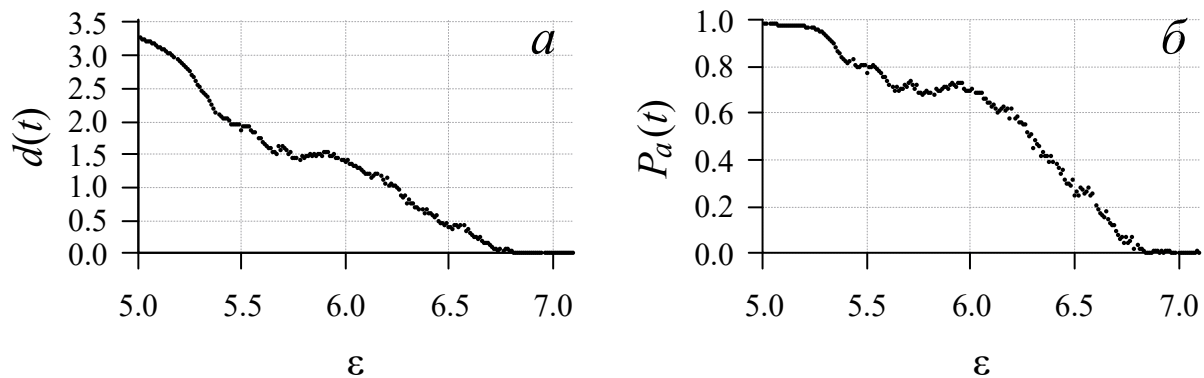


Рис. 1. Зависимость усредненного модуля разности между состояниями ведомых систем с различными начальными условиями (*a*) и меры мультистабильности (*б*) от величины параметра связи

в достаточно большом диапазоне параметра связи, когда метод вспомогательной системы демонстрирует отсутствие синхронизации в среднем. Причем, с увеличением величины параметра связи ε мера стремится к 0, что отлично согласуется с результатами метода вспомогательной системы. Стоит отметить, что мера мультистабильности также является усредненной величиной, а короткие асинхронные колебания могут наблюдаться и при значениях немного больше границы обобщенной синхронизации $\varepsilon = 6.8$, даже при очень близких к 0 значениях указанной меры.

Список литературы

1. *Pisarchik A., Feudel U.* Control of multistability // *Physics Reports*. 2014. Vol. 540, no. 4. P. 167–218.
2. *Rulkov N. F., Sushchik M. M., Tsimring L. S., Abarbanel H. D. I.* Generalized synchronization of chaos in directionally coupled chaotic systems // *Phys. Rev. E*. 1995. Vol. 51, no. 2. P. 980.
3. *Pyragas K.* Weak and strong synchronization of chaos // *Physical Rev E*. 1996. Vol. 54. R4508-R4511.
4. *Lorenz E. N.* Deterministic Nonperiodic Flow // *J. Atmos. Sci.* 1963. Vol. 20, no. 2. P. 130.
5. *Rössler O. E.* An equation for continuous chaos. // *Physics Letters A*. 1976. Vol. 57, Iss. 5. P. 397–398
6. *Abarbanel H. D. I., Rulkov N. F., Sushchik M. M.* Generalized synchronization of chaos: The auxiliary system approach // *Phys Rev E*. 1996. Vol. 53, Iss. 5. P. 4528.
7. *Москаленко О. И., Короновский А. А., Сельский А. О., Евстифеев Е. В.* Метод определения характеристик перемежающейся обобщенной синхронизации, основанный на вычислении вероятности наблюдения синхронного режима 2022. Т. 48, № 2. С. 3–6.

Беспорядочное подавление колебаний в цепочке взаимосвязанных осцилляторов Баутина*

А. А. Емельянова¹✉, О. В. Масленников^{1,2}, В. И. Некоркин^{1,2}

¹Институт прикладной физики РАН

²Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского

✉ emelianova@ipfran.ru

Сети взаимосвязанных осцилляторов широко распространены в природе и технике. Явления, наблюдаемые в таких системах, часто моделируются с использованием фазовых осцилляторов, при этом динамика амплитуд не учитывается. Однако многие интересные эффекты возникают именно из-за фазово-амплитудного характера наблюдаемых колебаний. Ярким примером является эффект подавления колебаний, когда первоначально активные узлы при включении в сеть подавляются или имеют близкую к нулю амплитуду колебаний.

В этой работе мы рассмотрели сети взаимосвязанных осцилляторов Баутина с граничными условиями типа «кольцо» и «цепочка» [1]. Эти сети имеют вид:

$$\begin{aligned} \dot{z}_j &= (\alpha + i\omega_j)z_j + \beta|z_j|^2z_j - z_j|z_j|^4 + c \sum_{k \in S} (z_k - z_j), \quad j = \overline{1, N} \\ z_{N+1} &= z_1 = z_0 \quad \text{или} \quad z_{N+1} = z_N, \quad z_0 = z_1, \end{aligned} \quad (1)$$

Осцилляторы Баутина являются нормальной формой бифуркации Баутина коразмерности два (также известной как обобщенная бифуркация Андронова–Хопфа), которая происходит вблизи состояния равновесия, когда первая ляпуновская величина стремится к нулю, в то время как вторая ляпуновская величина не равна нулю. Они обладают сложной динамикой: при вариации двух контрольных параметров в системе может происходить как суперкритическая, так и субкритическая бифуркация Андронова–Хопфа, а также седло-узловая бифуркация предельных циклов. Кроме того, в системе есть область бистабильности.

Аналитически показано существование и устойчивость решения с беспорядочно распределенными амплитудами колебаний в кольце и цепочке идентичных осцилляторов Баутина. С помощью техники, описанной в [2, 3], была найдена область параметров, в которой в отображении, описывающем амплитуды стационарных состояний в кольце, существует

*Работа поддержана РФФ, грант № 19-12-00338.

подкова Смейла. С помощью подхода дисков Гершгорина мы показали устойчивость неоднородных состояний, соответствующих пространственному хаосу. Теоретические выводы подтверждены численно и распространены на случай неидентичных осцилляторов, собственные частоты которых распределены либо по V-образному распределению, либо по случайному равномерному распределению. Все рассмотренные виды частотной неоднородности, а также два типа граничных условий — «кольцо» и «цепочка» — приводят к эффекту подавления колебаний. При этом с увеличением силы связи появляется большее число узлов с затухающими колебаниями. Обнаружено, что более широкое распределение частот приводит к более быстрому процессу подавления колебаний.

Список литературы

1. *Emelianova A.A., Maslennikov O.V., Nekorkin V.I.* Disordered quenching in arrays of coupled Bautin oscillators. // *Chaos*. 2022. Vol. 32. P. 063126.
2. *Nekorkin V.I., Velarde M.G., et al.* Synergetic phenomena in active lattices: Patterns, Waves, Solitons, Chaos. Springer, 2002.
3. *Afraimovich V.S., Hsu S.-B.* Lectures on chaotic dynamical systems, 28. American Mathematical Soc., 2003.

Мультистабильность на границе индуцированной шумом синхронизации в несвязанных осцилляторах Лоренца*

Е. Д. Илларионова, О. И. Москаленко

Саратовский национальный исследовательский
государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

✉ k3524114@yandex.ru

В современном мире явление синхронизации, принадлежащее к числу фундаментальных понятий теории нелинейной динамики и хаоса, играет немаловажную роль. Этот феномен широко распространен в природе, науке, технике и обществе, см., например, монографию [1].

Одним из типов хаотического синхронного поведения является режим синхронизации, индуцированной шумом. Он подразумевает установление идентичных колебаний в двух или нескольких несвязанных между собой идентичных по управляющим параметрам хаотических системах за счет воздействия на них общего источника шума [2]. Вблизи границы этого режима имеет место перемежающееся поведение, характеристики которого подчиняются тем же самым закономерностям, что и для режима перемежающейся обобщенной синхронизации [3].

Для режима перемежающейся обобщенной синхронизации характерна мультистабильность, подразумевающая в данном контексте существование в один и тот же промежуток времени синхронного поведения у одной пары систем, находящихся под действием общего хаотического сигнала, в то время как у другой пары наблюдается асинхронное поведение [4]. Так как режимы обобщенной синхронизации и синхронизации, индуцированной шумом, по своей сути представляют собой один и тот же режим и отличаются только характером внешнего сигнала, воздействующего на системы, можно ожидать, что вблизи границы синхронизации, индуцированной шумом, будет также иметь место мультистабильность.

В рамках настоящего доклада исследуется возможность существования мультистабильности вблизи границы синхронизации, индуцированной шумом, на примере систем Лоренца, находящихся в хаотическом режиме. С этой целью рассмотрен ансамбль несвязанных систем Лоренца, находящихся под действием общего источника шума с нулевым средним. Для количественной характеристики степени мультистабильности использо-

*Работа поддержана Советом по грантам Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских ученых — докторов наук (проект № МД-18.2022.1.2).

вался подход сравнения систем «каждая с каждой», согласно которому для каждой пары систем Лоренца в каждый момент времени считалась разность их состояний по формуле:

$$D = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}, \quad i, j = 1, \dots, N; \quad i \neq j, \quad (1)$$

после чего по формуле

$$P_a = 1 - \sum_{i=1}^N \frac{n}{N(N-1)} \quad (2)$$

рассчитывалась вероятность обнаружения асинхронного режима. Здесь N — количество рассматриваемых систем, n — число систем, находящихся в одинаковом состоянии с i -ым осциллятором. Кроме того, для анализа изменения степени мультистабильности с увеличением интенсивности шумового воздействия рассчитывалась мера мультистабильности — усредненная по времени вероятность обнаружения турбулентной фазы. Была получена зависимость этой вероятности от интенсивности шумового воздействия для ансамбля из $N = 1000$ осцилляторов Лоренца. Показано, что по мере увеличения интенсивности шума мера мультистабильности плавно уменьшается от 1 до 0, что соответствует переходу от асинхронного состояния к режиму индуцированной шумом синхронизации. Важно отметить, что вблизи границы синхронного режима мера мультистабильности оказывается положительной, что свидетельствует о наличии мультистабильности в режиме перемежающейся синхронизации, индуцированной шумом.

Список литературы

1. *Pikovsky A. S., Rosenblum M. G., Kurths J.* Synchronization: a universal concept in nonlinear sciences // Cambridge University Press, 2001.
2. *Pikovsky A. S.* Synchronization and stochastization of the ensemble of autogenerators by external noise // Radiophys. Quantum Electron. 1984. Vol. 27. P. 576–581.
3. *Москаленко О. И., Короновский А. А., Шурьгина С. А.* Перемежающееся поведение на границе индуцированной шумом синхронизации // Журнал технической физики. 2011. Т. 81, № 9. С. 150-153.
4. *Moskalenko O. I., Koronovskii A. A., Selskii A. O., Evstifeev E. V.* On multistability near the boundary of generalized synchronization in unidirectionally coupled chaotic systems // CHAOS. 2021. Vol. 31. N. 8. P. 083106.

Хаос и гиперхаос в неавтономной модели генератора Анищенко–Астахова*

А. К. Килина[✉], Н. В. Станкевич

НИУ «Высшая школа экономики» — Нижний Новгород

✉ akkilina@edu.hse.ru

Неавтономные системы широко распространены в различных областях науки и техники [1, 2]. Внешнее воздействие может как приводить к эффекту синхронизации, а при определенном выборе параметров внешнего сигнала может развиваться сложная динамика. В особый класс можно выделить случай, когда внешнее воздействие носит характер коротких по длительности, но при этом значительных по амплитуде импульсов. В работах [3, 4] была показана зависимость картины синхронизации от направления действия импульса на примере неавтономной системы Ресслера и генератора Кислова–Дмитриева, развитие сложного поведения. В рамках данной работы проводится исследование модели генератора Анищенко–Астахова [5] в режиме автоколебаний под периодическим импульсным воздействием, особое внимание уделяется возбуждению сложной динамики: хаоса, гиперхаоса и хаоса с дополнительным нулевым показателем Ляпунова.

Модель генератора Анищенко–Астахова под периодическим импульсным воздействием можно записать следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{x} = mx + y - xz \\ \dot{y} = -x + A \sum \delta(t - nT) \\ \dot{z} = -gz + gf(x), \quad f(x) = \begin{cases} x^2, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0, \end{cases} \end{cases} \quad (1)$$

Здесь x, y, z — динамические переменные, автономная система определена в трехмерном полупространстве $z \geq 0$ и содержит три параметра: m — параметр возбуждения генератора, g — параметр инерционности генератора. A — амплитуда внешнего воздействия, T — период следования внешних импульсов, $\delta(s)$ — дельта-функция, с помощью которой определяем внешнее импульсное воздействие, n — номер импульса.

*Работа поддержана Санкт-Петербургским международным математическим институтом имени Леонарда Эйлера при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (соглашение № 075-15-2022-287).

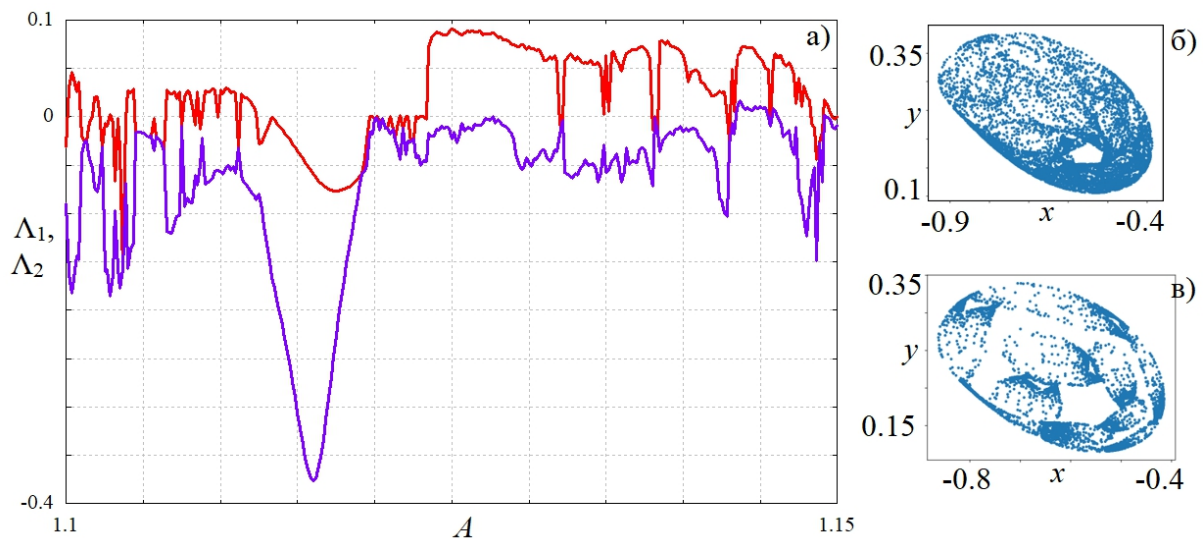


Рис. 1. а) Графики двух старших показателей Ляпунова неавтономной модели генератора Анищенко–Астахова (1), $m = 0.5$, $g = 0.6$, $T = 5$. Отображения Пуанкаре в стробоскопическом сечении хаотических аттракторов, б) $A = 1.14$; в) $A = 1.1491$

Для неавтономной системы в данной работе получены карты динамических режимов, карты показателей Ляпунова, бифуркационные деревья при вариации параметров внешнего воздействия.

Показано, что в такой системе могут возникать нерегулярные колебания: квазипериодические и хаотические. Возможно развитие гиперхаоса. На рис. 1 представлены графики двух старших показателей Ляпунова, на которых можно локализовать области хаоса и гиперхаоса. На рис. 1б и 1в показаны примеры хаотических аттракторов.

Список литературы

1. Kloeden P. E., Rasmussen M. Nonautonomous dynamical systems // American Mathematical Soc., 2011.
2. Stefanovska A. and McClintock P. V. E. Physics of biological oscillators: new insights into non-equilibrium and non-autonomous systems // Springer Nature. 2021. 455 p. ISBN-10: 3030598071.
3. Kuznetsov A. P., Stankevich N. V., and Tyuryukina L. V. Features of Pulsed Synchronization of an Autooscillatory System with a Three-Dimensional Phase Space // Tech. Phys. Lett. 2006. 32.
4. Kuznetsov A. P., Stankevich N. V., and Tyuryukina L. V. Picture of Pulsed Synchronization in the Dmitriev–Kislov Generator // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. 2007. No 4. P. 407–412.
5. Анищенко В. С., Летчфорд Т. Е., Сафонова М. А. Эффекты синхронизации и бифуркации синхронных и квазипериодических колебаний в неавтономном генераторе // Изв. вузов. Радиофизика. 1985. Т. 28, № 9. С. 1112–1125.

Аттракторы и их бассейны притяжения в сети Хопфилда*

В. В. Клиньшов^{1,2}, И. А. Соловьев^{1,2}

¹Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород

²Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского

Сеть Хопфилда [1] — это классическая модель ассоциативной памяти. Сохранение информации в такой сети осуществляется путем формирования матрицы весов по определенному правилу на основе данных, которые необходимо запомнить. При этом в системе формируются аттракторы, соответствующие запоминаемым образам.

При выборе в сети начального состояния, близкого к запомненному образу, система приходит к этому образу в результате своей динамики, что соответствует распознаванию информации входных данных. Помимо «полезных» аттракторов, соответствующих запомненным образам, в фазовом пространстве системы могут существовать и не несущие никакой информации «паразитные» аттракторы. Их наличие ухудшает качество работы сети Хопфилда как системы ассоциативной памяти.

Множество состояний, из которых сеть сходится к определенному аттрактору, называется бассейном притяжения этого аттрактора. Размер и форма бассейнов как полезных, так и паразитных аттракторов, очевидно, влияет на функционирование сети как системы ассоциативной памяти.

В работе проведено детальное исследование полезных и паразитных аттракторов сети Хопфилда. Были изучены бассейны притяжения аттракторов обоих типов, а для паразитных также исследована зависимость их количества и взаимного расположения от количества запомненных образов и размера сети. В качестве характеристик бассейнов притяжения были использованы их относительный размер [2] и порог устойчивости [3] — минимальное расстояние от аттрактора до границы бассейна. Для полезных аттракторов порог устойчивости может быть интерпретирован как минимальное искажение запомненного образа, после которого система перестает гарантированно его распознавать.

*Работа выполнена при поддержке Российского Научного Фонда, грант № 19-72-10114. По теме работы опубликована статья: Соловьев И. А., Клиньшов В. В. Пороги устойчивости аттракторов сети Хопфилда // Известия вузов. ПНД. 2023. Т. 31, вып. 1. С. 75–85. <https://andjournal.sgu.ru/en/articles/stability-thresholds-of-attractors-of-the-hopfield-network>

В работе показано, что пороги устойчивости полезных аттракторов уменьшаются при увеличении числа запомненных образов, тогда как пороги устойчивости паразитных аттракторов, напротив, увеличиваются. Также полученные данные позволили оценить максимальное число образов, которые может хранить сеть без серьезных ошибок при распознавании. Полученная оценка $S^* = 0.15N$ образов качественно согласуется с результатами оригинальной работы [1].

Список литературы

1. *Hopfield J.J.* Neural networks and physical systems with emergent // Collective computational abilities. Proceedings of the national academy of sciences. Vol. 79, no. 8. P. 2554–2558.
2. *Menck P.J., Heitzig J., Marwan N., & Kurths J.* How basin stability complements the linear-stability paradigm // Nature physics. Vol. 9, no. 2. P. 89–92.
3. *Klinshov V.V., Nekorkin V.I., & Kurths J.* Stability threshold approach for complex dynamical systems // New Journal of Physics. Vol. 18, no. 1. P. 013004.

Устойчивость решений квазинормальной формы одной краевой задачи специального вида*

Д. С. Костерин

Ярославский государственный университет имени П. Г. Демидова

✉ kosterin.dim@mail.ru

Рассмотрим систему уравнений

$$\frac{du}{dt} = (A_0 + \varepsilon A_1)u + F_2(u, u) + F_3(u, u, u) + \varepsilon D_0 \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(t, x) dx \quad (1)$$

с периодическим краевым условием

$$u(t, x + 2\pi) \equiv u(t, x). \quad (2)$$

Здесь $u = u(t, x)$, $t \geq 0$, $x \in [0, 2\pi]$, A_0, A_1, D_0 — $n \times n$ -матрицы, $F_2(*, *)$, $F_3(*, *, *)$ — линейные по каждому аргументу вектор-функции. Считаем, что матрица A_0 имеет пару чисто мнимых собственных значений, все её остальные собственные значения имеют отрицательную вещественную часть.

Решение краевой задачи будем искать в виде

$$u(t, x, \varepsilon) = \varepsilon^{1/2} (a\xi(\tau, x) \exp(i\omega t) + \bar{a}\bar{\xi}(\tau, x) \exp(-i\omega t)) + \varepsilon (u_{20} |\xi(\tau, x)|^2 + u_{21} \xi^2(\tau, x) \exp(2i\omega t) + \bar{u}_{21} \bar{\xi}^2(\tau, x) \exp(-2i\omega t)) + \dots, \quad \tau = \varepsilon t.$$

Подставив его в уравнение (1) и приравняв коэффициенты при $\varepsilon^{3/2}$, получим пространственно-распределенное уравнение

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = (1 + i\lambda_0)\xi + (-1 + i\sigma_0)\xi|\xi|^2 + \frac{\gamma}{2\pi} \int_0^{2\pi} \xi(\tau, x) dx, \quad (3)$$

которое в силу условия (2) дополняется периодическим краевым условием

$$\xi(\tau, x + 2\pi) \equiv \xi(\tau, x). \quad (4)$$

Будем называть краевую задачу (3), (4) квазинормальной формой исходной краевой задачи. Решения квазинормальной формы определяют

*Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-11-00209, <https://rscf.ru/project/22-11-00209/>.

динамику решений исходной краевой задачи в некоторой достаточно малой и не зависящей от ε окрестности нулевого решения исходной задачи. В настоящей работе исследуется поведение решений квазинормальной формы, методы исследования опираются на аналогичные, представленные в работах [1–3]. Справедлив следующий результат.

Теорема. Краевая задача (3), (4) при $\gamma > -1$ имеет однородное по x и периодическое по t решение вида

$$\xi(\tau, x) = \pm \sqrt{1 + \gamma} \exp((\lambda_0 + \sigma_0(1 + \gamma))i\tau).$$

Данное решение является орбитально асимптотически устойчивым.

Рассмотрим вопрос о существовании кусочно-постоянных по x решений квазинормальной формы. Представим решение задачи (3), (4) в виде

$$\xi(\tau, x) = \begin{cases} \rho_1, & 0 \leq x < \alpha, \\ \rho_2 e^{i\varphi}, & \alpha \leq x < 2\pi. \end{cases} \quad (5)$$

Подставив его в уравнение (3), получим систему алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} \rho_1 - \rho_1^3 &= -\frac{\gamma}{2\pi} [\alpha \rho_1 + (2\pi - \alpha) \rho_2 \cos \varphi], \\ -\omega \rho_1 + \lambda_0 \rho_1 + \sigma_0 \rho_1^3 &= -\frac{\gamma}{2\pi} (2\pi - \alpha) \rho_2 \sin \varphi, \\ \rho_2 - \rho_2^3 &= -\frac{\gamma}{2\pi} [\alpha \rho_1 \cos \varphi + (2\pi - \alpha) \rho_2], \\ -\omega \rho_2 + \lambda_0 \rho_2 + \sigma_0 \rho_2^3 &= \frac{\gamma}{2\pi} \alpha \rho_1 \sin \varphi, \end{aligned}$$

В работе показано наличие решений этой системы, каждому из которых соответствует кусочно-постоянная функция вида (1).

Список литературы

1. Григорьева Е. В., Кащенко С. А. Медленные и быстрые колебания в модели оптико-электронного осциллятора с запаздыванием // Доклады Академии наук. 2019. Т. 484, № 1. С. 21–25.
2. Глызин С. Д., Кащенко С. А., Толбей А. О. Взаимодействие двух волн в модели Ферми–Паста–Улама // Моделирование и анализ информационных систем. 2016. Т. 23, № 5. С. 548–558.
3. Глызин С. Д., Кащенко С. А., Толбей А. О. Уравнения с нелинейностями дислокаций и Ферми–Пасты–Улама // Известия вузов. ПНД. 2019. Т. 27, № 4. С. 52–70.

Влияние аддитивного шума на вероятность появления химерных состояний*

В. А. Нечаев[✉], Е. В. Рыбалова, Г. И. Стрелкова

Саратовский национальный исследовательский
государственный университет имени Н. Г. Чернышевского
✉ nechaev.vas2021@bk.ru

На данный момент активно исследуются процессы установления различных пространственно-временных структур в ансамблях связанных элементов, ставятся вопросы их возбуждения и подавления. Актуальными являются химерные состояния [1, 2], которые представляют собой сосуществование когерентных и некогерентных кластеров в ансамблях идентичных элементов с симметричной связью.

В данной работе исследуются эффекты, к которым приводит добавление аддитивного шума в кольцо нелокально связанных хаотических отображений: возможность возбуждения и подавления химерных состояний, что является продолжением работ [3, 4]. Кольцо нелокально связанных отображений описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned}
 x_i^{t+1} &= F(x_i^t, y_i^t) + \frac{\sigma}{2R} \sum_{j=i-R}^{i+R} [F(x_j^t, y_j^t) - F(x_i^t, y_i^t)] + A\xi_i(n), & (1) \\
 y_i^{t+1} &= G(x_i^t, y_i^t)
 \end{aligned}$$

где x_i^t, y_i^t — динамические переменные, t — дискретное время, $i = 1, 2, \dots, N = 1000$ — номер элемента, σ — сила связи i -го элемента с R соседями слева и справа. Аддитивный шум задается генератором шума с нормальным распределением ξ и интенсивностью A . Сравнивались динамика трех колец нелокально связанных отображений: логистических отображений ($F(x) = \alpha^L x(1-x)$, $G = 0$), отображений Эно ($F(x, y) = 1 - \alpha^H x^2 + y$, $G(x) = \beta x$) и отображений Рикера ($F(x) = x e^{\alpha^R(1-x/k)}$, $G = 0$) — при различных значениях управляющих параметров отображений α .

Исследования показали, что в этих системах при введении шума наблюдается эффект, подобный резонансу: существует оптимальная интенсивность аддитивного шума, при которой вероятность установления химерных структур стремится к 1, а интервал их существования по силе

*Исследование выполнено при финансовой поддержке РНФ в рамках научного проекта № 20-12-00119.

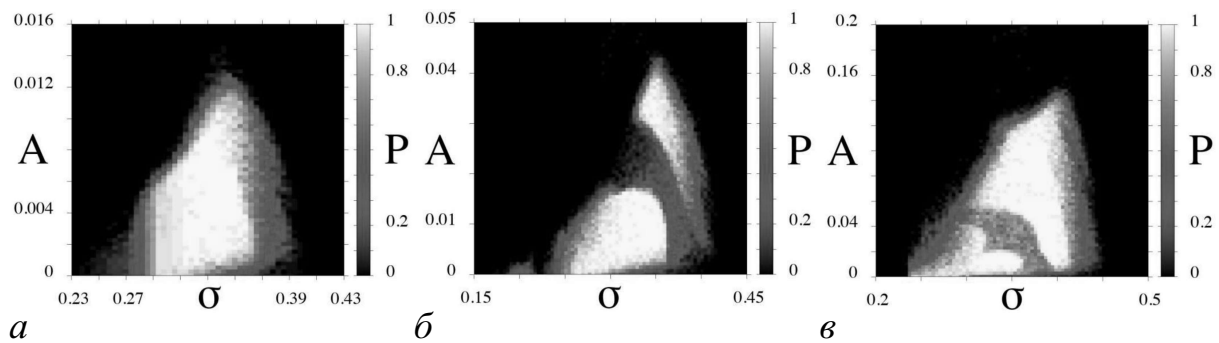


Рис. 1. Карты распределения вероятности установления химерных состояний на плоскости параметров (σ, A) при различных парциальных элементах ансамбля: (а) логистические отображения при $\alpha^L = 3.8$, (б) отображения Эно при $\alpha^H = 1.4$, (в) отображения Рикера при $\alpha^R = 21.0$

связи между элементами максимальный (рис. 1). Для автоматического поиска химерных структур в зашумленной системе рассчитывался коэффициент взаимной корреляции между первым элементом и всеми остальными (см. [3,4]). На рисунке 1 приведены карты распределения вероятности установления химер на плоскости параметров «сила связи σ – интенсивность шума A ». Выявлено, что собственная динамика элементов влияет на область ненулевой вероятности появления химер на плоскости параметров (σ, A) . Так для кольца нелокально связанных отображений Эно существуют две ярко выраженные области с максимальной вероятностью установления химерных состояний (рис. 1, б, в). Увеличение значений параметра отображения Рикера приводит к появлению уединенных состояний в ансамбле, что также видоизменяет распределение вероятности химер. Однако, во всех случаях наблюдается резонансоподобный эффект.

Список литературы

1. Kuramoto Y., Battogtokh D. Coexistence of Coherence and Incoherence in Nonlocally Coupled Phase Oscillators // *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*. 2002. Vol. 5, iss. 4. P. 380–385.
2. Abrams D. M., Strogatz S. H. Chimera states for coupled oscillators // *Phys. Rev. Lett.* 2004. Vol. 93, iss. 17. P. 174102.
3. Нечаев В. А., Рыбалова Е. В., Стрелкова Г. И. Влияние неоднородности параметров на существование химерных структур в кольце нелокально связанных отображений // *Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика*. 2021. Т. 29, вып. 6. С. 943–952.
4. Rybalova E., Schöll E., Strelkova G. Controlling chimera and solitary states by additive noise in networks of chaotic maps // *Journal of Difference Equations and Applications*. 2022. P. 1–22.

Химерные состояния в ансамбле кубических отображений и отображений Рикера при шумовой модуляции параметра связи*

Н. Н. Никишина[✉], Е. В. Рыбалова, Т. Е. Вадивасова

Саратовский национальный исследовательский
государственный университет имени Н. Г. Чернышевского
[✉] nnikishina7@gmail.com

В больших ансамблях нелинейных элементов могут возникать разнообразные сложные пространственно-временные структуры, в том числе химерные состояния [1, 2]. Ранее в работе [3] исследовалась эволюция химер в ансамбле нелокально связанных логистических отображений при модуляции коэффициентов связи цветным гауссовым шумом с независимыми источниками шума и с общим источником. Однако в кольце логистических отображений под любым шумовым воздействием довольно быстро наблюдается уход траектории на бесконечность. В связи с этим мы исследовали эволюцию химерных состояний в ансамбле отображений Рикера, так как оно имеет схожие характеристики с логистическим отображением, но при этом уход на бесконечность наблюдается значительно реже. Кроме того, исследование ансамбля отображений Рикера позволяет обобщить результаты, полученные для ансамбля логических отображений. Вместе с этим был также исследован ансамбль кубических отображений в режиме бистабильности.

Ансамбль нелокально взаимодействующих отображений с независимыми случайными компонентами описывается следующими уравнениями:

$$\begin{aligned}
 x_j(n+1) &= f(x_j(n)) + \frac{1}{2P}(\sigma + D\sqrt{1-\frac{\gamma}{2}}y_j(n)) \sum_{k=j-P}^{j+P} [f(x_k(n)) - f(x_j(n))] \\
 y_j(n+1) &= (1-\gamma)y_j + \sqrt{2\gamma}\xi_j(n),
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

где $j = 1, 2, 3, \dots, N = 1000$ — номер элемента, n — дискретное время. Связь между элементами является нелокальной с силой связи $\sigma = 0.45$ и радиусом связи $P = 100$ для кубического отображения и $\sigma = 0.31$ и радиусом связи $P = 345$ для отображений Рикера. Независимые источники дискретного цветного гауссова шума с одинаковой статистикой задаются коэффициентом $\sqrt{1-\frac{\gamma}{2}}y_j(n)$ с интенсивностью D . Параметр γ

*Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФ в рамках научного проекта № 20-12-00119.

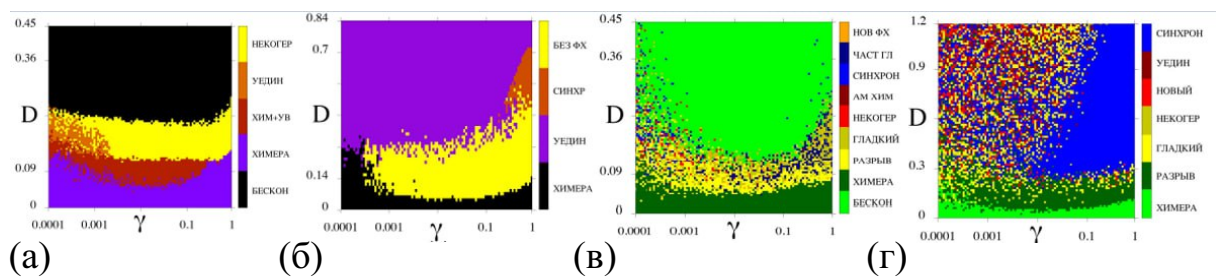


Рис. 1. Карты режимов для системы с независимыми случайными компонентами коэффициентов связи: для кубического отображения (а), для отображения Рикера (б); для системы с общим случайным воздействием на связь: для кубического отображения (в), для отображения Рикера (г)

управляет спектральными свойствами цветного шума, при $\gamma = 1$ источники шума становятся белыми. Система с общим случайным воздействием на связь описывается уравнениями аналогичными ур. (1), но имеем $\sqrt{1 - \frac{\gamma}{2}}y(n)$, т. е. отсутствует зависимость от номера элемента j . В качестве элементов ансамбля используются кубическое отображение: $f(x) = (\alpha x - x^3) \exp(-x^2/10)$, где $\alpha = 2.8$, и модифицированное отображение Рикера: $f(x) = (\alpha)|x| \exp(-x)$, где $\alpha = 18.3$.

В результате исследований было установлено, что с помощью шумовой модуляции параметров связи можно управлять характером пространственной структуры (рис. 1). Однако для подавления кластера некогерентности химерного состояния спектральные свойства шума оказались несущественными. В кольце модифицированных отображений Рикера при независимом шумовом воздействии, наблюдается устойчивость к широкополосному шуму, в то время, как при общем источнике шумового воздействия, наблюдается устойчивость, как к узкополосному шуму, так и широкополосному шуму. Более того, при общем шумовом воздействии на коэффициенты связи в системе наблюдается большее разнообразие режимов, начиная от некогерентности заканчивая явлением полной синхронизации, чем при использовании независимых источников шума, где наблюдается всего пять видов режимов.

Список литературы

1. Kuramoto Y., Battogtokh D. Coexistence of coherence and incoherence in nonlocally coupled phase oscillators // *Nonlinear Phenom. Complex Syst.* 2002. Vol. 4. P. 380–385.
2. Omelchenko I., Maistrenko Y., Hövel P., Schöll E. Loss of coherence in dynamical networks: Spatial chaos and chimera states // *Physical review letters.* 2011. Vol. 106, no. 23. P. 234102.
3. Nikishina N. N., Rybalova E. V., Strelkova G. I., Vadivasova T. E. Destruction of Cluster Structures in an Ensemble of Chaotic Maps with Noise-modulated Nonlocal Coupling // *Regular and Chaotic Dynamics.* 2022. Vol. 27, no. 2. P. 242–251.

Картина режимов в неавтономной системе Хиндмарша–Роуза при изменении направления действия внешних импульсов*

П. Ю. Пантелеева[✉], Н. В. Станкевич

¹Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»

✉ p.y.panteleeva@yandex.ru

Процессы, описываемые системами, находящимися под воздействием внешних периодических импульсов постоянной амплитуды, возникают во многих областях науки. В случае, когда автономная система демонстрирует периодические автоколебания, то наблюдается классическое явление синхронизации.

В настоящей работе рассматривается система Хиндмарша–Роуза

$$\begin{cases} \dot{x} = ax^2 - x^3 - y - z, \\ \dot{y} = (a + \alpha)x^2 - y, \\ \dot{z} = \mu(bx - c - z), \end{cases} \quad (1)$$

где $x, y, z \in \mathbb{R}$ — динамические переменные, $a, b, c, \alpha, \mu \in \mathbb{R}$ — параметры, определяющие динамику системы. Система (1) является одной из эталонных моделей нейрона [1] и демонстрирует типичную колебательную активность нейрона: спайковые колебания и пачечные [2], для различных значений управляющих параметров.

В рамках данной работы мы рассматриваем поведение неавтономной системы Хиндмарша–Роуза. Неавтономная система (1), подвергающаяся периодическому импульсному воздействию, имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{x} = ax^2 - x^3 - y - z + A_x F(t), \\ \dot{y} = (a + \alpha)x^2 - y + A_y F(t), \\ \dot{z} = \mu(bx - c - z) + A_z F(t), \end{cases} \quad (2)$$

где внешнее воздействие $F(t)$ задаётся как

$$F(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT).$$

*Работа поддержана Санкт-Петербургским международным математическим институтом имени Леонарда Эйлера при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (соглашение № 075-15-2022-287).

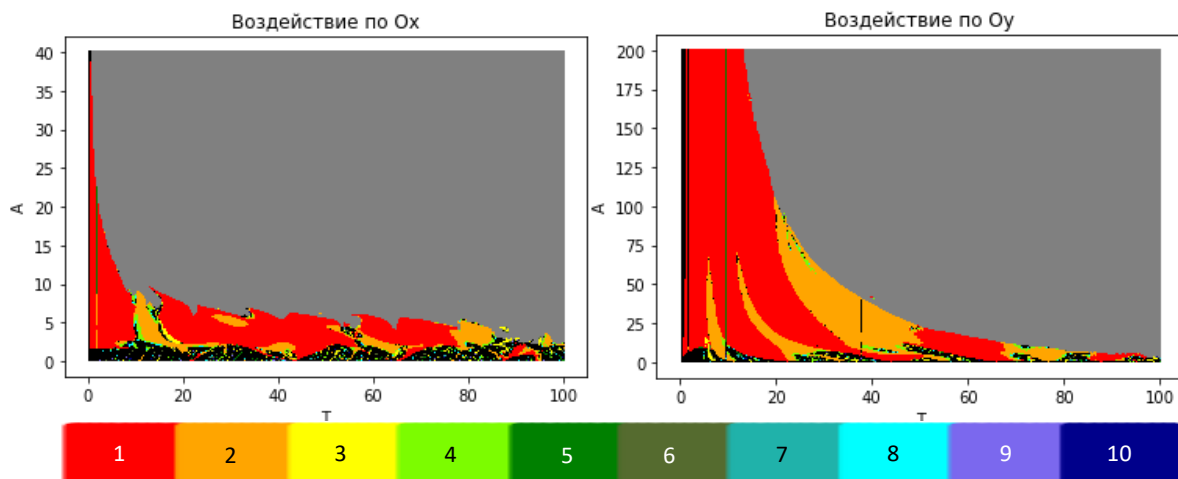


Рис. 1. Карты динамических режимов для системы Хиндмарша–Роуза с внешним импульсным воздействием вдоль оси x , $A_y = A_z = 0$ (слева) и вдоль оси y , $A_x = A_z = 0$ (справа) при значениях параметров $a = 2.8$, $b = 9$, $c = 5$, $\alpha = 1.6$, $\mu = 0.033$

Здесь A_x, A_y, A_z — амплитуда внешнего воздействия, направленного вдоль каждой оси, T — период внешнего воздействия, функция $\delta: \mathbb{R} \rightarrow \{0, 1\}$, $\delta(s) = 1$ при $s = 0$ и $\delta(s) = 0$ при всех ненулевых значениях s , задаёт единичный импульс.

Модель (2) мы будем исследовать с помощью методов численного моделирования. На рис. 1 представлены карты динамических режимов для модели (2) при различных направлениях действия импульсов. Чёрным цветом отмечены области нерегулярной динамики, серым — области убегания траекторий на бесконечность, а цветами — регулярные режимы с разным периодом (см. палитру на рис. 1).

На картах видно, что при малых значениях амплитуды внешнего воздействия наблюдаются нерегулярные колебания, которые трансформируются в периодические с увеличением амплитуды. При высокочастотном воздействии автоколебания сохраняют устойчивость для достаточно больших значений амплитуды внешнего сигнала. В работе будут также проанализированы показатели Ляпунова, позволяющие различить области квазипериодических колебаний и хаотических.

Список литературы

1. Hindmarsh J. L., Rose R. M. A model of neuronal bursting using three coupled first order differential equations // Proceedings of the Royal society of London. Series B. Biological sciences. 1984. Vol. 221, no. 1222. P. 87–102.
2. Izhikevich E. M. Dynamical systems in neuroscience // MIT press. 2007.

Возбуждение автоколебаний в модели ФитцХью–Нагумо: периодическая и хаотическая динамика*

В. В. Семенов, А. В. Бух[✉], Н. И. Семенова

Саратовский национальный исследовательский
государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

✉ buh.andrey@yandex.ru

Стохастическая модель ФитцХью–Нагумо с обратной связью с задержкой по времени часто изучается в возбуждимом режиме для демонстрации управления когерентным резонансом с задержкой по времени. В этой работе мы показываем, что влияние запаздывающей обратной связи в нейроне ФитцХью–Нагумо не ограничивается возможностью контроля регулярности (когерентности) индуцированных шумом колебаний, но также приводит к возбуждению регулярной и хаотической автоколебательной динамики в детерминированной модели. Мы демонстрируем это численно с помощью моделирования, анализа линейной устойчивости, изучения показателей Ляпунова и областей притяжения как для положительной, так и для отрицательной силы с запаздывающей обратной связью. Установлено, что в исследуемой модели можно реализовать переход к хаосу, в котором проявляются особенности сценария Фейгенбаума. Для больших временных задержек мы дополняем изучение временной эволюции интерпретацией динамики как паттернов в виртуальном пространстве.

Была изучена модель ФитцХью–Нагумо с обратной связью с задержкой:

$$\begin{aligned}\varepsilon \dot{x} &= x - x^3/3 - y + \gamma(x_\tau - x), \\ \dot{y} &= x + a,\end{aligned}\tag{1}$$

где $x = x(t)$ — переменная активатора, $y = y(t)$ — переменная ингибитора. Параметр $\varepsilon \ll 1$ задает временной масштаб между переменными, a — пороговый параметр, определяющий поведение отдельного нейрона, τ — время задержки связи, γ — сила связи. В настоящей работе рассматривается возбуждимый режим ($a > 1$ и $\varepsilon > 0$) и исследуется влияние параметров силы и времени задержки при $x_0 = x(t \in [-\tau : 0]) = \text{const}$.

В работе мы показываем, что автоколебательная динамика, вызванная запаздыванием, может быть регулярной и хаотической. В частности, при положительной запаздывающей силе наблюдается бистабильность: стациона-

*Работа поддержана Советом по грантам Президента Российской Федерации (Стипендия Президента РФ СП-749.2022.5 Н.И. Семеновой и Стипендия Президента РФ СП-774.2022.5 А. В. Буха), и Российским Научным Фондом (проект № 22-72-00038 В. В. Семенова).

нарный режим сосуществует с регулярными автоколебаниями. Несмотря на то, что представленный анализ бассейнов притяжения является редуцированным и включает в себя особый вид начальных условий $x_0 = x(t \in [-\tau : 0]) = \text{const}$, он позволяет установить, что как состояние равновесия, так и предельный цикл характеризуются конечными бассейнами притяжения. Таким образом, их можно назвать «аттракторами» в полном смысле.

При большой задержке и силе положительной обратной связи запаздывания индуцированные автоколебания можно интерпретировать как диссипативные солитоны в квазипространстве. В таком случае в пространственно-временной динамике участвуют оба аттрактора, а бистабильность, индуцированная запаздыванием, выражается в способности реализовать определенное количество солитонов в определенные моменты времени.

Для отрицательной силы с запаздывающей обратной связью поведение более сложное: после потери стационарным состоянием устойчивости могут достигаться как регулярные, так и хаотические автоколебания. При длительном запаздывании регулярные и хаотические автоколебания проявляются в квазипространстве в виде волновых картин. При увеличении абсолютной величины силы отрицательной запаздывающей обратной связи, возможно реализовать переход к хаосу через каскад бифуркаций удвоения периода так, что зарегистрированные в численных экспериментах константы Фейгенбаума близки к теоретическому значению $\delta=4.669$. Выявление сценария Фейгенбаума моделью ФитцХью–Нагумо с запаздывающей обратной связью представляется нетривиальным результатом и будет теоретически проанализировано в дальнейших исследованиях.

Полученные результаты находятся в полном соответствии с известными результатами [1–3] и дополняют спектр наблюдаемых в подобных моделях явлений возникновением режима динамического хаоса.

Список литературы

1. Erneux T., Weicker L., Bauer L., Hövel P. Short-time-delay limit of the self-coupled Fitzhugh-Nagumo system // *Phys. Rev. E* 2016. Vol. 93, 022208.
2. Weicker L., Keuninckx L., Friart G., Danckaert J., Erneux T. Control of Self-Organizing Nonlinear Systems // Springer 2016. P. 337–354.
3. Romeira B., Avó R., Figueiredo J. M. L., Barland S., Javaloyes J. Regenerative memory in time-delayed neuromorphic photonic resonators // *Scientific Reports* 2016. Vol. 6, no. 1. P. 19510.

Резонансные режимы в нелинейных системах с затухающими осциллирующими возмущениями

О. А. Султанов

Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, Уфа, Россия

✉ oasultanov@gmail.com

Рассматривается асимптотически автономная система обыкновенных дифференциальных уравнений на плоскости:

$$\frac{dx}{dt} = y + t^{-c}f(x, y, S(t), t), \quad \frac{dy}{dt} = -U'(x) + t^{-c}g(x, y, S(t), t), \quad (1)$$

где $c = a/q > 0$, $S(t) \equiv st^{1+b/q}$, $a, b, q \in \mathbb{Z}_+$, $s \in \mathbb{R}_+$, функции $U(x)$, $f(x, y, S, t)$, $g(x, y, S, t)$ определены для всех $(x, y, S) \in \mathbb{R}^3$ и $t > 0$, являются гладкими и 2π -периодическими по S . Соответствующая предельная система имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = \partial_y H(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = -\partial_x H(x, y) \quad (2)$$

с гамильтонианом $H(x, y) \equiv y^2/2 + U(x)$. Предполагается, что

$$U(x) = \frac{x^{2h}}{2h} + \sum_{i=1}^{2h-1} u_i x^i, \quad h \in \mathbb{Z}, \quad h \geq 2, \quad u_i = \text{const.}$$

В этом случае существует $E_0 > 0$ такое, что для всех $E > E_0$ линии уровня $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : H(x, y) = E\}$ являются замкнутыми кривыми, которым соответствуют $T(E)$ -периодические решения системы (2). Для функций f и g предполагаются асимптотические разложения

$$f \sim \sum_{k=0}^{\infty} t^{-\frac{k}{q}} f_k(x, y, S), \quad g \sim \sum_{k=0}^{\infty} t^{-\frac{k}{q}} g_k(x, y, S)$$

при $t \rightarrow \infty$, где $f_k(x, y, S)$, $g_k(x, y, S)$ являются полиномами по x и y . В работе обсуждается влияние затухающих возмущений на периодические решения предельной системы.

В качестве примера рассмотрим возмущённое уравнения Дуффинга

$$\frac{d^2x}{dt^2} - x + x^3 = Bt^{-\frac{1}{3}} \cos\left(st^{\frac{4}{3}}\right), \quad t \geq 1. \quad (3)$$

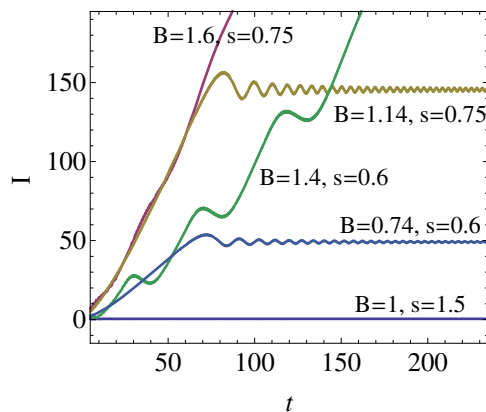


Рис. 1. Эволюция $I(t) = H(x(t), \dot{x}(t))$ для решений уравнения (3) с различными значениями параметров B , s и начальных данных

Заметим, что уравнение (3) в переменных $x, y = \dot{x}$ принимает вид системы (1) с $a = b = 1, q = 3, h = 2, U(x) \equiv x^4/4 - x^2/2, f \equiv 0, g \equiv B \cos S$. Все решения соответствующей предельной системы являются ограниченными, при этом решения $x(t), y(t)$ такие, что $H(x(t), y(t)) \equiv E > 0$ являются периодическими с периодом $T(E) = \mathcal{O}(E^{-1/4})$ при $E \rightarrow \infty$. Численный анализ уравнения с $B \neq 0$ показывает, что затухающие возмущения могут приводить к появлению решений с неограниченно растущей энергией $I(t) \equiv H(x(t), \dot{x}(t))$. При этом, для некоторых значений параметров, решения могут иметь такое же долговременное поведение как и траектории предельной системы $I(t) = \mathcal{O}(1)$ при $t \rightarrow \infty$ (см. рис. 1).

В работе показывается, что в зависимости от структуры и параметров возмущений система может находиться в одном из двух режимов: в режиме синхронизации или в режиме фазового дрейфа. Доказывается, что в первом случае существуют резонансные решения с неограниченно растущей энергией, у которых фаза подстраивается под фазу возмущения. Исследуется устойчивость и асимптотическое поведение таких решений на далеких временах с помощью комбинации техники усреднения и метода функции Ляпунова. Полученные результаты указывают на возможность эффективного использования затухающих со временем возмущений для управления динамикой нелинейных систем.

Список литературы

1. *Sultanov O. A.* Resonances in asymptotically autonomous systems with a decaying chirped-frequency excitation // *Discrete and Continuous Dynamical Systems Series B.* 2023. Vol. 28, no. 3. P. 1719–1749.

Локальное уравнение тетраэдров Замолодчикова и отображения 4-симплекса*

М. А. Чирков

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова

✉ mikhlchirkov@gmail.com

Уравнение 4-симплекса является представителем более широкого семейства уравнений, а именно уравнений n -симплекса. Наиболее известными представителями семейства уравнений является знаменитое уравнение Янга–Бакстера ($n = 2$) и уравнение тетраэдров Замолодчикова ($n = 3$) [6, 7]. Уравнения n -симплекса принадлежат к наиболее фундаментальным уравнениям математической физики и имеют приложения во многих разделах физики и математики, включая статистическую механику, квантовую теорию поля, алгебраическую топологию и теорию интегрируемых систем.

Существует несколько методов, связывающих отображения n -симплекса (теоретико-множественные решения уравнения n -симплекса) с интегрируемыми системами [1, 3–5]. Таким образом, разработка методов построения нетривиальных в некотором смысле отображений n -симплекса является задачей, которая может привести к важным интегрируемым моделям.

Пусть \mathcal{X} — множество. Отображение $S \in \text{End}(\mathcal{X}^4)$, т. е.

$$S : (x, y, z, t) \mapsto (u(x, y, z, t), v(x, y, z, t), w(x, y, z, t), r(x, y, z, t)),$$

называется *отображением 4-симплекса* если оно удовлетворяет *теоретико-множественному уравнению 4-симплекса*

$$S^{1234} \circ S^{1567} \circ S^{2589} \circ S^{368,10} \circ S^{479,10} = S^{479,10} \circ S^{368,10} \circ S^{2589} \circ S^{1567} \circ S^{1234}.$$

Функции $S^{ijkl} \in \text{End}(\mathcal{X}^{10})$, $i, j, k, l = 1, \dots, 10$, $i < j < k < l$ — это отображения, которые действуют как S на i, j, k, l компоненты \mathcal{X}^{10} и тривиально на другие.

Теперь, пусть $L = L(x)$ — квадратная матрица 3×3 , зависящая от переменной $x \in \mathcal{X}$ вида $L(x) = \begin{pmatrix} a(x) & b(x) & c(x) \\ d(x) & e(x) & f(x) \\ k(x) & l(x) & m(x) \end{pmatrix}$, где ее элементы явля-

*Работа выполнена в рамках реализации программы развития регионального научно-образовательного математического центра (ЯрГУ) при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (Соглашение о предоставлении из федерального бюджета субсидии № 075-02-2023-948).

ются функциями от x . Пусть $L_{ijk}^6(x)$, $i, j, k = 1, \dots, 6$, $i < j < k$, — 6×6 расширения матрицы $L(x)$. Например,

$$L_{145}^6(x) = \begin{pmatrix} a(x) & 0 & 0 & b(x) & c(x) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ d(x) & 0 & 0 & e(x) & f(x) & 0 \\ k(x) & 0 & 0 & l(x) & m(x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Мы называем следующую задачу матричной четырехфакторизации

$$L_{123}^6(u)L_{145}^6(v)L_{246}^6(w)L_{356}^6(r) = L_{356}^6(t)L_{246}^6(z)L_{145}^6(y)L_{123}^6(x) \quad (1)$$

локальным уравнением тетраэдров. Локальное уравнение тетраэдров является генератором потенциальных решений уравнения 4-симплекса.

В докладе рассматривается вопрос о том, для каких матриц вида $L(x_{11}, \dots, x_{33}) = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}$ локальное уравнение тетраэдров (1) имеет решение. Для этих матриц мы строим новые отображения 4-симплекса по методам, представленным в [2].

Список литературы

1. *Kassotakis P., Nieszporski M., Papageorgiou V., and Tongas A.* Tetrahedron maps and symmetries of three dimensional integrable discrete equations // J. Math. Phys. 2019. Vol. 60. P. 123503.
2. *Konstantinou-Rizos S.* Birational solutions to the set-theoretical 4-simplex equation. // Physica D: Nonlinear Phenomena. 2023. Vol. 448. P. 133696.
3. *Konstantinou-Rizos S. and Mikhailov A. V.* Darboux transformations, finite reduction groups and related Yang–Baxter maps // J. Phys. A: Math. Theor. 2013. Vol. 46. P. 425201.
4. *Konstantinou-Rizos S. and Papamikos G.* Entwining Yang–Baxter maps related to NLS type equations// J. Phys. A: Math. Theor. 2019. Vol. 52. P. 485201.
5. *Papageorgiou V. G., Tongas A. G., and Veselov A. P.* Yang–Baxter maps and symmetries of integrable equations on quad-graphs // J. Math. Phys. 2006. Vol. 47. P. 083502.
6. *Zamolodchikov A. B.* Tetrahedra equations and integrable systems in three-dimensional space // Sov. Phys. JETP. 1980. Vol. 52. P. 325–336.
7. *Zamolodchikov A. B.* Tetrahedron equations and the relativistic S -matrix of straight strings in (2+1)-dimensions // Commun. Math. Phys. 1981. Vol. 79. P. 489–505.

Топологический анализ данных

Н. Г. Макаренко

Главная (Пулковская) Астрономическая Обсерватория РАН

✉ ng-makar@mail.ru

Топологический анализ данных (ТДА) это вычислительный инструмент для анализа абстрактных форм сложных наборов данных. Примером таких данных могут быть точки, случайно выбранные из окружности. Это *nasty set*: оно не имеет формы. Преобразуем набор точек в некоторый «непрерывный» объект, топологически похожий на окружность. Это удобно сделать используя фильтрацию — последовательное объединение окрестностей соседних точек. Увеличивая их окрестности, мы получим последовательность форм, все более близких к кольцу. При этом, слияние окрестностей уменьшает число отдельных компонент связности до единицы. На этом этапе рождается новое топологическое свойство — дыра, которая постепенно заполнится и даст нам диск. Эпизоды фильтрации удобно кодировать комплексами, которые составлены из симплексов: вершин, ребер и граней. Их можно снабдить наборами топологических инвариантов. Фильтрация сложных данных позволяет получить универсальный язык для описания и диагностики множества процессов и структур из разных областей знания. Интересно, что идеи фильтрации можно вывести из некоторых удивительных свойств нашего зрения. Так, в живописи известен стиль, называемый «пуантилизмом». В 1885 г. его придумал французский художник Жорж Сёра. Он писал картины в «пиксельной» форме, изображая геометрические образы множеством подобранных по цвету точек. Оказывается, наш мозг способен отождествлять такие пиксельные паттерны с знакомыми образами, объединением соседних пикселей, как и в случае кольца. Итальянский астроном Джованни Скиапарелли, в 1877 г., сообщил о сетке каналов, покрывающих планету Марс. Их видели не все астрономы, хотя каналы удавалось получить на фотографиях. Споры об их реальности закончились в 1971 году, когда «Маринер-9» передал снимки планеты с разрешением 1–2 км. Они и доказали, что каналы являются оптической иллюзией. Одно из объяснений основано на следующем эффекте. Большинство людей видят пятна, нанесенные на лист бумаги, как линейные структуры, если смотрят на них на пределе углового разрешения. Математическим аналогом этой иллюзии является ε — связная цепь Кантора. Это последовательность случайных точек, содержащая ребра, образованные парами, разделенными расстоянием $\leq \varepsilon$.

Цепь меняется с изменением ε . В 1998 г., Ванесса Робинс, из университета Colorado, вместе с коллегами, использовала идею этой цепи для вычисления связности фракталов [1], а позднее, описала общий метод извлечения топологии пространства из комплексов, построенных на конечной выборке точек. Замечено, что разные народы соединяли множество звезд, видимых в одинаковых участках неба, похожими пиктограммами. Это сходство объясняется свойствами нашего мозга, который соединяет отдельные звезды в граф, с минимальной суммой всех ребер. В топологии, созвездие, легко обобщить до комплекса, включив в него циклы и грани. Леонард Эйлер, в 1752 году предложил для комплекса целочисленный инвариант, выраженный знакопеременной суммой числа входящих в него клеток разной размерности. Для поверхности, число Эйлера можно записать используя число классов, которые образованы истинными циклами разной размерности. Такие циклы являются границами дыр. Так, для обычного 2D тора класс 0-циклов образуют точки на поверхности тора. Меридианы и параллели тора образуют два разных класса 1-циклов. Поверхность тора также является 2-границей объема дыры внутри тора. Формула Эйлера даст нам $1 - 2 + 1 = 0$. Число классов для циклов разной размерности называют числами Бетти — важными инвариантами TDA. Их использовали в 1993 г. М. Малдун и его коллеги, в работе «Топология из временных рядов» [2], для реконструкции топологии аттрактора из наблюдений. Эта интересная работа является вариантом TDA и обобщением эмбедологии Такенса на гомологии. Настоящая Лекция является эвристическим введением в методы TDA, с примерами некоторых их приложений. Это прогулка по проблеме, цель которой привлечь интерес молодых физиков к вычислительной топологии и облегчить их знакомство с многочисленной специальной литературой (см., например, [3–5]).

Список литературы

1. *Robins V., Meiss J. D., Bradley E.* Computing connectedness: An exercise in computational topology // *Nonlinearity*. 1998. Vol. 11, no. 4. P. 913–925.
2. *Muldoon M. R., MacKay R. S., Huke J. P., Broomhead D. S.* Topology from time series // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 1993. Vol. 65, no. 1–2. P. 1–16.
3. *Kaczynski T., Mishaikow K. M., Mrozek M.* Computational homology. New York: Springer, 2004. 496 с.
4. *Edelsbrunner H., Harer J. L.* Computational topology: an introduction. American Mathematical Society, 2010.
5. *Dey T. K., Wang Y.* Computational topology for data analysis. Cambridge University Press, 2022.

Синхронизация колебаний в пространственно-распределенной модели взаимодействующих популяционных игр*

О. С. Вершинина[✉], М. В. Иванченко

Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского

✉ olya.vershinina@itmm.unn.ru

Синхронизация колебаний является одним из фундаментальных явлений нелинейной динамики [1]. Синхронизация исследуется в различных областях естествознания, например, в радиотехнических и биологических системах, однако, в рамках эволюционной теории игр данный вопрос почти не поднимался. С этой точки зрения в качестве модельной автоколебательной системы рассматривается известная в эволюционной теории игр популяционная игра «Битва полов» [2].

В рассматриваемой игре участвуют особи (игроки, агенты) из двух популяций противоположного пола (самцы и самки), состоящих из N агентов. Каждый игрок придерживается одной из двух конкурирующих стратегий поведения, касающихся размножения и воспитания потомства. Модель игры в нормальной форме представлена на рис. 1, а. Эволюционная динамика заключается в многократно повторяющихся играх между случайно выбранными самцом и самкой. Выбранная пара агентов производит двух потомков — самца и самку, которые наследуют стратегии родителя того же пола и заменяют случайно умерших игроков в популяциях, таким образом, размер популяций сохраняется постоянным на всем протяжении игры. Динамика системы рассматривается до тех пор, пока одна из популяций не достигнет вырождения, то есть когда в ней останутся игроки только с одним типом стратегий.

Состояние системы может быть представлено двумя величинами i и j , $0 \leq i, j \leq N$, которые задают число игроков с первой стратегией в популяциях самцов и самок. Игровая траектория (последовательность изменения величин i и j с течением времени) представляет собой стохастические циклические колебания вокруг значения $\frac{N}{2}$ [3] (рис. 1, б). Особенностью таких колебаний является конечное время жизни: рано или поздно в популяциях полностью вырождается одна из стратегий и динамика прекращается.

Особый интерес представляет обобщение данной модели на случай нескольких взаимодействующих популяционных игр («ареалов популяций»), в каждой из которых играют две популяции противоположного

*Работа поддержана РФФИ, грант № 20-32-90202.

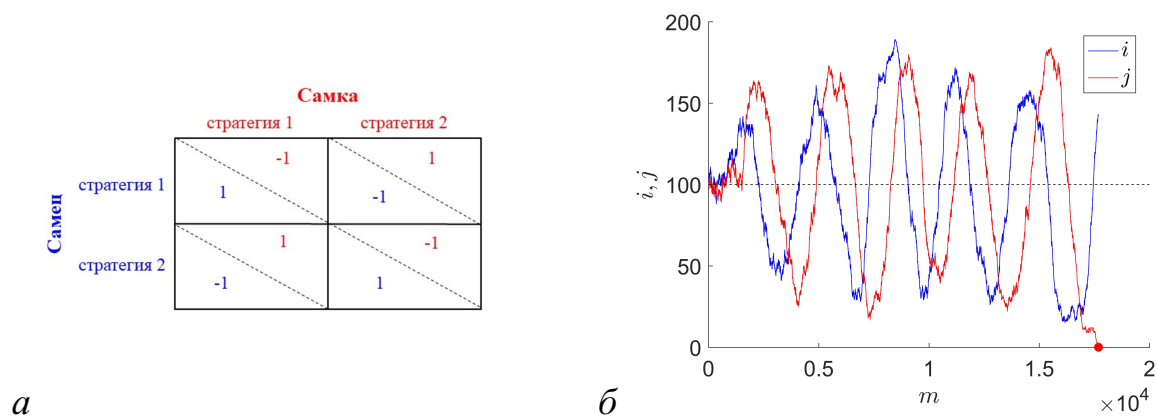


Рис. 1. Игра «Битва полов» в нормальной форме (а). Динамика двух популяций размером $N = 200$ в игре «Битва полов» (б)

пола. Модель, состоящая из нескольких взаимодействующих «ареалов», представляет собой систему связанных стохастических осцилляторов. Рассматривается пространственно-распределенная модель двух и более популяционных игр с взаимодействием диффузионного типа, которое отвечает за миграцию особей между «ареалами». Вводится параметр p , определяющий силу связи (вероятность миграции особей). Например, если $p = 0$, то миграция особей между «ареалами» не будет осуществляться и «ареалы» будут эволюционировать независимо.

В результате исследований в пространственно-распределенной модели продемонстрирована взаимная синхронизация колебаний. Было показано, что при увеличении силы связи, в системе двух связанных идентичных «ареалов» наблюдается синфазная синхронизация. При этом если взаимодействие между «ареалами» сильное, то колебания численности игроков в «ареалах» становятся идентичными и наступает режим полной синхронизации. Подобный результат наблюдался и для ансамбля нескольких идентичных «ареалов», соединенных в кольцо.

Список литературы

1. Пиковский А., Розенблюм М., Куртс Ю. Синхронизация: Фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003. 496 с.
2. Dawkins R. The Selfish Gene. Oxford: Oxford University Press, 1976. 224 p.
3. Denisov S., Verzhinina O., Thingna J., Hänggi P., Ivanchenko M. Quasi-stationary states of game-driven systems: A dynamical approach // Chaos. 2020. Vol. 30, no. 12. 123145.

Математическое моделирование многозадачных режимов в нейроноподобных распознающих системах

А. А. Головина¹, В. Г. Яхно^{1,2}

¹Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского

²Институт прикладной физики им. А. В. Гапонова-Грехова РАН

✉ alinagolovina88@icloud.com

Живая система в норме поражает широким диапазоном и многовариантностью возможных состояний, между которыми происходит динамическое переключение. При этом особенности динамических режимов восприятия и реагирования живых систем при работе с конкретными сенсорными сигналами могут быть описаны с помощью редуцированных базовых моделей распознавания и принятия решений, которые обычно выводятся из моделей, аналогичных схемам П. К. Анохина. Модули разных уровней в иерархических модельных архитектурах собираются в единую функциональную систему таким образом, чтобы можно было достигать поставленные перед системой цели. Кроме того, в живых системах имеются модули управления, которые обеспечивают переключение различными, важными для неё целями (см., например работы [1, 2]).

В данной работе рассмотрена работоспособность редуцированных моделей [1, 2] для адекватного описания выбора возможных вариантов поведения на примере литературного произведения «Унесённые ветром» М. Митчел, из которого взяты отрывки, где можно проследить процессы выбора приоритетов среди мировоззренческих позиций или стереотипов используемых обобщенных средств управления. Для качественного описания механизмов переключения между динамическими режимами функционирования живых систем, в эмоциональных или энергетических условиях предоставляемой этим системам ситуацией в среде, используем наиболее простую базовую модель из двух балансных уравнений [1, 2].

$$\frac{dk_i}{dt} = Y_i(t) \left(\frac{k_i}{\tau_{2k_i}} + \frac{1}{\tau_{1k_i}} F_i[-T_i(M, U, Q, E) + P + \gamma_{ii}k_i - \sum_{i \neq j} \gamma_{ij}k_j] \right). \quad (1)$$

где τ_{1k_i} — характерное время освоения, τ_{2k_i} — характерное время забывания, F_i — пороговая функция, γ_{ij} — весовые коэффициенты, определяющие влияние j -той компоненты на активацию i -ой компоненты. $T_i(M, U, Q, E)$ — порог запуска алгоритмов обучения i -той области деятельности. $Y_i(t)$ — управляющий модуль задан с помощью непрерывных функций.

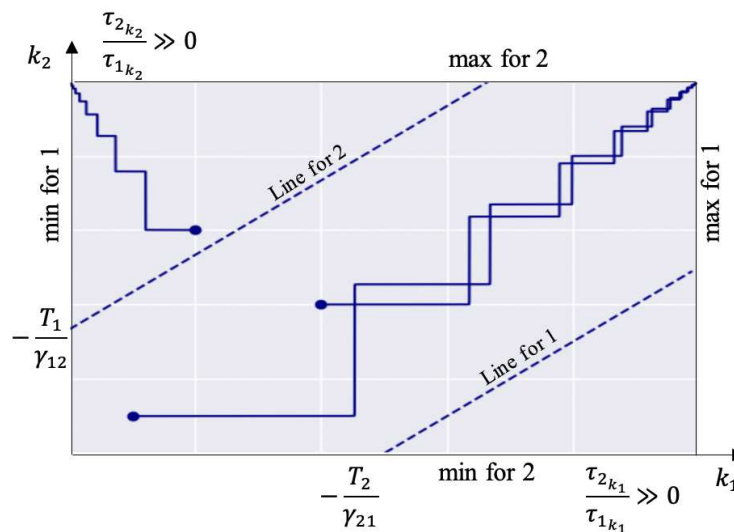


Рис. 1. Примеры изображающей точки (k_1, k_2) в случае T_1 и T_2 меньше нуля. Этапы, связанные с выполнением операций по алгоритмам 1-ой функциональной системы представлены горизонтальными линиями, вертикальные линии демонстрируют изменения состояний системы в соответствии с алгоритмами 2-ой функциональной системы. Пунктирными линиями изображены пороги переключения для k_1 и k_2

Из приведенного на рисунке 1 примера видно, что в зависимости от начального состояния субъекта, его функционирование будет определяться, как минимум, тремя вариантами поведения.


1. Все силы на спасение любимой социальной системы — Старого Юга.
2. Все силы на реализацию собственного эго — счастья в семейной жизни.
3. Процветание Старого Юга и счастье в семейной жизни.

Варьирование положением нуль-изоклин предоставляет возможность описания и предсказания для более широкого спектра режимов поведения.

Список литературы

1. *Vladimir Yakhno, Serge Parin, Sofia Poleyaya, Irina Nuidel and Olga Shemagina* Who Says Formalized Models are Appropriate for Describing Living Systems?: Advances in Neural Computation, Machine Learning, and Cognitive Research: IV Selected Papers from the XXII International Conference on Neuroinformatics, October 12–16, 2020, Moscow, Russia. P. 10–33.
2. *Alexandrova N. Sh., Antonets V.A., Kuzenkov O.A., Nuidel I.V., Shemagina O.V., Yakhno V.G.* : Bilingualism as an Unstable State: Advances in Cognitive Research, Artificial Intelligence and Neuroinformatics, Series: Advances in Intelligent Systems and Computing. Year: 2021, Vol. 1358. P. 359–367. DOI: 10.1007/978-3-030-71637-0_41.

Среднее время поглощения в игровых случайных блужданиях на квадратной решетке*

М. И. Кривонос^{1,2}, *С. Н. Тихомиров*¹

¹Институт системного программирования им. В. П. Иванникова РАН

²Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского

 krivonosov@itmm.unn.ru

В терминах игровой динамики в одномерном пространстве случайные блуждания можно представить в виде игры, в которой два игрока последовательно подкидывают монетку, пока один из них не разорится. Мы рассматриваем ситуацию, когда игра является не полностью случайной, а игроки влияют на вероятности перехода. Данный процесс можно описать в общем в виде как случайное блуждание игрового типа в ограниченном конечномерном пространстве [1].

Рассматриваемая нами игра происходит на квадратной решетке с поглощающей границей. Изначально фишка находится в центре решетки размера $n \times n$, где n — нечетное, и на каждом шаге ее направление зависит от стратегий, выбранных игроками независимо друг от друга. Целью первого игрока является довести фишку до границы за как можно меньшее число ходов (такой игрок «играет за границу»), а цель второго игрока — помешать первому, и пытаться сохранить фишку в пределах границ квадрата как можно дольше (такой игрок «играет за центр»).

Для проведения полевого эксперимента с игроками-людьми было разработано мобильное приложение Random Walk [2]. С его помощью удалось получить 512 реализаций игр P vs P (человек против человека), 528 реализаций P vs B (человек «за границу», бот — «за центр») и 534 реализации B vs P (человек «за центр», бот — «за границу»). Далее, полученные игры были проанализированы и было получено эмпирическое среднее время поглощения.

Описанную игру можно рассмотреть в поглощающих марковских цепях. Всего в решетке $n^2 - 4$ достижимых вершин (углы не являются достижимыми), из которых $r = 4(n - 2)$ соответствуют поглощающим состояниям, а $s = (n - 2)^2$ соответствуют переходным состояниям. Для игры можно составить блочную матрицу переходов [3] $P((i, j) \rightarrow (x, y))$. Поиск среднего времени поглощения можно осуществить с помощью

*Работа поддержана РФФИ, грант № 20-31-90121.

фундаментальной матрицы L . Для этого потребуется умножить ее на вектор-столбец из единиц $\mathbf{1}$ и взять из T нужный элемент.

$$P = \begin{bmatrix} Q & R \\ \mathbf{0} & I_r \end{bmatrix}, L = \sum_{k=0}^{\infty} Q^k = (I_s - Q)^{-1}, T = L\mathbf{1}, \quad (1)$$

где Q — матрица $s \times s$, отвечающая перемещениям по внутренним состояниям, R — ненулевая матрица $s \times r$, отвечающая переходам из внутренних состояний в поглощающие. Так как игра начинается в центре решетки, то ожидаемое время поглощения t_n равно элементу T , соответствующему стартовой позиции $(0, 0)$.

Мы рассмотрели стратегии, которые выбирали игроки-люди и сравнили их с оптимальными стратегиями [4, 5]. По итогам исследования мы составили таблицу средних времен поглощения для различных типов игр, они представлены в Таблице.

Таблица. Количество игр и средние времена поглощения для случаев случайного блуждания, игр P vs B, B vs P и P vs P

Размер поля 17 × 17	Случайное блуждание	P vs B	B vs P	P vs P
Количество игр	—	528	534	500
Эксперимент	—	145.45	71.12	120.60
Модель	75.21	145.85	73.79	116.22

В данной работе мы показали, что экспериментально полученные средние времена поглощения можно достаточно точно воспроизвести, используя модели марковских цепей.


Список литературы

1. И. В. Романовский, “Случайные блуждания игрового типа”, Теория вероятн. и ее примен., 6:4 (1961), 426–429;
2. <https://scigames.ru>
3. Kemeny J.G., Snell J.L. Finite Markov Chains. Springer-Verlag, New York; 1983.
4. М. И. Кривоносов Исследование времени достижения границы в случайных блужданиях на квадратной двумерной решетке, индуцированных игровым конфликтом / М. И. Кривоносов, С. Н. Тихомиров, С. В. Денисов // Труды XXVI научной конференции по радиофизике, посвященной 120-летию М.Т. Греховой : Материалы конференции – С. 445-448.
5. М. И. Кривоносов, С. Н. Тихомиров Стратегии и время поглощения в игровых случайных блужданиях, Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2023. Т. 31, No. 3.

Механизм обучения коллективного классификатора на основе конкуренции, управляемой обучающими примерами*

А. А. Сутягин , *О. И. Канаков*

Нижегородский государственный университет имени Н. И. Лобачевского

 alealesutyagin@gmail.com

Одной из задач машинного обучения является создание обучаемых классификаторов, определяющих принадлежность объекта, представленного наблюдаемым значением некоторого признака, к одному из конечного множества классов (которое далее полагается состоящим из двух классов, обозначаемых «+» и «-»). Данные для обучения представляют собой таблицу соответствия между значением признака и верным ответом (классом объекта) для конечного набора примеров. Существующие подходы к созданию обучаемых классификаторов ориентированы в основном на реализацию на основе универсальных цифровых вычислителей. Интерес представляют, однако, также «коллективные» обучаемые классификаторы [1–3], реализуемые в виде ансамбля элементов ограниченной сложности, в качестве которых могут выступать, например, живые клетки, генетически запрограммированные методами синтетической биологии. Идея обучения коллективного классификатора, предложенная в [1, 2], основана на конкурентной динамике численностей популяций элементов (далее — «типов клеток»), различающихся лишь значением некоторого постоянного параметра. Сами эти численности выступают в качестве «подстроечных» параметров классификатора (понимаемого как ансамбль в целом), изменяющихся в процессе обучения и обеспечивающих оптимизацию его ответа (например, в смысле минимизации вероятности ошибки). Механизм популяционной динамики, предложенный в [1, 2], содержит только конкуренцию за общий ресурс, что приводит к режиму конкуренции с единственным победителем (известному в экологии как принцип Гаузе), и как следствие — к тривиальной предельной структуре ансамбля, состоящей из единственного (наиболее конкурентоспособного) типа клеток. Такая динамика позволяла говорить о приближении классификатора к оптимальному не в пределе обучения, а лишь во время переходного процесса, что подразумевало необходимость прерывания обучения и плохую теоретическую предсказуемость результата. Указанная

*Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект № FSWR-2023-0031).

проблема снимается дополнительным введением «внутривидовой» конкуренции (внутри каждого типа клеток) [3], которую было предложено реализовать с помощью сортировщика клеток. Поскольку сортировщик является внешним устройством по отношению к ансамблю, остаётся открытой проблема обучения коллективного классификатора полностью на основе его собственной динамики.

Для решения этой проблемы предлагается модификация модели конкурентной динамики, ранее предложенной в [3], в виде

$$\dot{n}_i = n_i \left(1 - \frac{1}{N_c} \sum_{k=1}^s n_k \right) - k_i \frac{n_i^2}{N_c}, \quad i = 1 \dots s, \quad (1)$$

где численности типов клеток (нумеруемых индексом i) представлены непрерывными динамическими переменными n_i , s — количество типов, $N_c > 0$ — «ёмкость среды», k_i — параметры конкурентоспособности, динамика которых, в свою очередь, описывается «подсистемой обучения»

$$\dot{k}_i = \begin{cases} -\tau_l^{-1} k_i & \text{вне процесса обучения,} \\ \tau_l^{-1} f_i(x_\alpha) (k^+ - k_i), & \text{если } c_\alpha = +, \\ \tau_l^{-1} f_i(x_\alpha) (k^- - k_i), & \text{если } c_\alpha = -, \end{cases} \quad (2)$$

где τ_l — временной масштаб обучения, k^+ и k^- — константы, $f_i(x)$ — функция отклика i -го типа клеток на значение признака, α — номер предъявляемого в текущий момент времени обучающего примера $\pi_\alpha = (x_\alpha, c_\alpha)$, в котором x_α — значение признака, а $c_\alpha \in \{+, -\}$ — известный класс, к которому принадлежит данный пример.

Мы выявляем допущения, в рамках которых динамика (1), (2) обеспечивает сходимость процесса обучения к требуемому пределу — например, к оптимальному (байесовскому) решающему правилу. Вопрос конкретной реализации классификатора остаётся открытым, однако необходимость во внешнем сортирующем устройстве снимается.

Список литературы

1. *Didovyk A., Kanakov O. I., Ivanchenko M. V., Hasty J., Huerta R., Tsimring L.* Distributed classifier based on genetically engineered bacterial cell cultures // *ACS Synthetic Biology*. 2015. Vol. 4, no. 1. P. 72–82.
2. *Kanakov O., Kotelnikov R., Alsaedi A., Tsimring L., Huerta R., Zaikin A., Ivanchenko M.* Multi-input distributed classifiers for synthetic genetic circuits // *PLoS one*. 2015. Vol. 10, no. 5. P. e0125144.
3. *Сутягин А. А., Канаков О. И.* Метод обучения коллективного классификатора на основе конкуренции в режиме сосуществования // *Известия вузов. ПНД*. 2021. Т. 29, № 2. С. 220–239.

Вихревые конфигурации в жидкости и нелинейные явления**В. Н. Говорухин*

Южный федеральный университет

✉ vngovoruhin@sfedu.ru

Рассматриваются плоские структуры в жидкости, состоящие из конечного набора вихрей в проточных и открытых областях. Для математического моделирования используются нелинейные дифференциальные уравнения, демонстрирующие сложные динамические эффекты. В докладе основное внимание уделяется результатам исследований автора последних лет, которые подробно описаны в работах [1–6].

Простейшей моделью вихревых структур на плоскости являются конфигурации точечных вихрей, которые описываются консервативной системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Эти системы изучаются более столетия, но их анализ до сих пор позволяет обнаруживать новые эффекты в динамике жидкостей. В частности, они являются моделью для изучения переноса частиц в вихревых структурах. В [6] установлено, что перенос качественно зависит от скорости перемещения вихрей по плоскости. При малой скорости в окрестности вихрей возникает обширная область хаотической динамики, которая медленно смещается вместе с конфигурацией. При высокой скорости структура перемещает частицы из окрестности своего начального положения на большие расстояния, и почти не захватывает частиц по пути.

Динамику распределённых вихревых структур описывают уравнения Эйлера, связывающие завихренность ω и функцию тока ψ :

$$\omega_t + \psi_y \omega_x - \psi_x \omega_y = 0, \quad -\Delta\psi = \omega. \quad (1)$$

В (1) нижний индекс обозначает производную по переменной, t — время, x, y — координаты, Δ — оператор Лапласа. Компоненты вектора скорости $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$, $v^{(1)} = -\frac{\partial\psi}{\partial y}$, $v^{(2)} = \frac{\partial\psi}{\partial x}$. Динамика частицы жидкости с координатами (x, y) описывается уравнениями $x_t = v^{(1)}$, $y_t = v^{(2)}$.

Уравнения (1) рассматриваются в различных областях и условиях. В докладе большое внимание уделяется исследованию вихревых структур в канале с контролируемым выходом, который описывается граничными условиями Юдовича. Характерной особенностью этой задачи является наличие невязкой диссипации, связанной с проточностью канала. Задача

*Работа поддержана РНФ, грант № 23-21-00371.

обладает свойствами как диссипативной, так и консервативной динамической системы, т.к. жидкость предполагается идеальной. Основным инструментом исследования является спектрально-вихревой метод [5] на котором базируются инструменты качественного анализа, использующие подходы теории динамических систем [1, 4, 5]. Это включает построение отображения Пуанкаре, поля локальных и асимптотических показателей Ляпунова, спектрального анализа и методов теории устойчивости и др. В силу консервативности возникающих динамических систем для решения задач Коши использовались псевдо-симплектические методы и интеграторы высоких порядков точности.

Обнаружен и изучен ряд нетривиальных нелинейных феноменов. Найдены однопараметрические семейства стационарных режимов с застойными зонами, изучена их устойчивость. Оказалось, что у части режимов малые возмущения не нарастают в расчёте во времени, а у других растут экспоненциально. Описаны бифуркационные сценарии возникновения автоколебаний при росте интенсивности проточности канала. В расчётах обнаружено установление периодических и квазипериодических режимов, что необычно для идеальной жидкости, и является следствием невязкой диссипации. Это приводит к сложному поведению частиц жидкости в проточной зоне канала. Во время движения частицы могут захватываться окрестностями застойных зон течения, в результате чего возникает хаотическое рассеяние частиц от входа к выходу из канала и непредсказуемость времени их пребывания в канале.

Список литературы

1. *Говорухин В.Н.* Численный анализ динамики распределенных вихревых конфигураций // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2016. Т. 56. № 8. С.1491–1505.
2. *Govorukhin V. Zhdanov I.* Steady-State Flows of Inviscid Incompressible Fluid and Related Particle Dynamics in Rectangular Channels // Eur. J. Mech. B-Fluids. 2018. V. 67. Pp. 280–290.
3. *Говорухин В. Н.* О возникновении автоколебаний при протекании идеальной жидкости через канал // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2019. Т. 59. № 6. С. 1024–1036.
4. *Филимонова А. М., Говорухин В. Н.* Анализ структуры вихревых течений и их изменений во времени // Вычислительная механика сплошных сред. 2021. Т. 14. № 4. С. 367–376.
5. *Govorukhin V.N.* An extended and improved particle-spectral method for analysis of unsteady inviscid incompressible flows through a channel of finite length // Int. J. Numer. Meth. Fluids. 2023. V. 95. № 4. pp. 579–602.
6. *Говорухин В. Н.* Перенос пассивных частиц в поле скорости движущегося по плоскости вихревого триполя // Известия вузов. ПНД. 2023. Т. 31, вып. 3.

Бесконечномерные критические случаи в цепочках связанных осцилляторов*

С. А. Кащенко

Региональный научно-образовательный математический центр
«Центр интегрируемых систем» при
Ярославском государственном университете им. П. Г. Демидова
✉ kasch@uniyar.ac.ru

Изучается локальная динамика полносвязных цепочек из большого количества осцилляторов с большим запаздыванием в связях. От дискретной модели, описывающей динамику большого количества связанных осцилляторов осуществлен переход к нелинейному интегро-дифференциальному уравнению, непрерывно зависящему от времени и пространственной переменной. Рассматривается класс полносвязных систем.

Основное предположение заключается в том, что величина запаздывания в связях является достаточно большой. Это предположение открывает путь к использованию специальных асимптотических методов исследования. Выделены параметры, при которых реализуется критический случай в задаче об устойчивости состояния равновесия. Показано, что они имеют бесконечную размерность.

Построены аналоги нормальных форм – нелинейные краевые задачи типа Гинзбурга–Ландау [1]. В ряде случаев эти краевые задачи содержат и интегральные составляющие. Их нелокальная динамика описывает поведение всех решений исходных уравнений в окрестности состояния равновесия [2, 3].

Применительно к рассматриваемым задачам развивается методика построения квазинормальных форм на центральных многообразиях. Разработан алгоритм построения асимптотики решений, основанный на использовании квазинормальных форм для определения медленно меняющихся амплитуд [4].

Построены квазинормальные формы, определяющие динамику исходной краевой задачи. Получены главные члены асимптотических приближений для решений рассматриваемых цепочек. На основе приведенных утверждений выявлен ряд интересных динамических эффектов. Например, бесконечное чередование прямых и обратных бифуркаций при увеличении

*Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 21-71-30011, <https://rscf.ru/project/21-71-30011/>.

коэффициента запаздывания [5]. Их отличительная особенность заключается в том, что они имеют две или три пространственные переменные.

Показано существенное отличие динамики для случаев односторонних и двусторонних связей, полностью связанных систем и систем с диффузионным типом связей.

Список литературы

1. *Kashchenko S. A.* The Ginzburg–Landau equation as a normal form for a second-order difference-differential equation with a large delay // *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 1998. Vol. 38, no. 3. P. 443–451.
2. *Кащенко С. А.* Динамика моделей на основе логистического уравнения с запаздыванием. М.: КРАСАНД, 2020. 576 с. (Синергетика: от прошлого к будущему; 102).
3. *Григорьева Е. В., Кащенко А. А., Кащенко С. А.* Локальный анализ динамики распределенных моделей лазеров. Ярославль : ЯрГУ, 2022. 349 с.
4. *Kashchenko S. A.* Quasinormal Forms for Chains of Coupled Logistic Equations with Delay // *Mathematics*. 2022. Vol. 10, no. 15. P. 2648.
5. *Kashchenko S. A.* Van der Pol Equation with a Large Feedback Delay // *Mathematics*. 2023. Vol. 11, no. 6. P. 1301.

Существование и исследование устойчивости решений в форме дискретной бегущей волны в полностью связанной цепи генераторов Мэки–Гласса*

В. В. Алексеев[✉], В. К. Зеленова, М. М. Преображенская

¹Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова

²Региональный научно-образовательный математический центр
«Центр интегрируемых систем», ЯрГУ им. П. Г. Демидова, Ярославль

✉ v.alekseev1@uniyar.ac.ru

Генератором Мэки–Гласса называют электрический генератор, функционирование которого описывается уравнением Мэки–Гласса [1]

$$\frac{dV}{dt} = -bV + \frac{acV(t - \tau)}{1 + (cV(t - \tau))^\gamma}. \quad (1)$$

Здесь $V(t)$ — это функция напряжения, $a > 0$ — уровень насыщения нелинейности, $b > 0$ — RC -постоянная, $\tau > 0$ — запаздывание по времени, параметр $\gamma > 0$ определяет форму нелинейной функции, $c > 0$ — сила обратной связи.

В работе рассматривается полностью связанная цепь из $m + 1$ генератора Мэки–Гласса ($j = 0, 1, \dots, m$):

$$\frac{dV_j}{dt} = -bV_j + \frac{ac \left(V_j(t - \tau) + \sum_{k=0, k \neq j}^m V_k(t) \right)}{1 + \left(c \left(V_j(t - \tau) + \sum_{k=0, k \neq j}^m V_k(t) \right) \right)^\gamma}. \quad (2)$$

Здесь $V_j(t)$ — напряжения в электронной цепи Мэки–Гласса, параметры a , b , c , γ , τ имеют тот же смысл, что в уравнении (1).

После перенормировки времени и параметров, при $\gamma \rightarrow +\infty$ осуществляется переход к предельной системе

$$\dot{u}_j = -\beta u_j + \alpha \left(u_j(t - 1) + \sum_{k=0, k \neq j}^m u_k(t) \right) F \left(u_j(t - 1) + \sum_{k=0, k \neq j}^m u_k(t) \right), \quad (3)$$

где

$$F(w) = \begin{cases} 1, & 0 < w < 1 \\ \frac{1}{2}, & w = 1, \\ 0, & w > 1. \end{cases} \quad (4)$$

*Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 21-71-30011, <https://rscf.ru/project/21-71-30011/>.

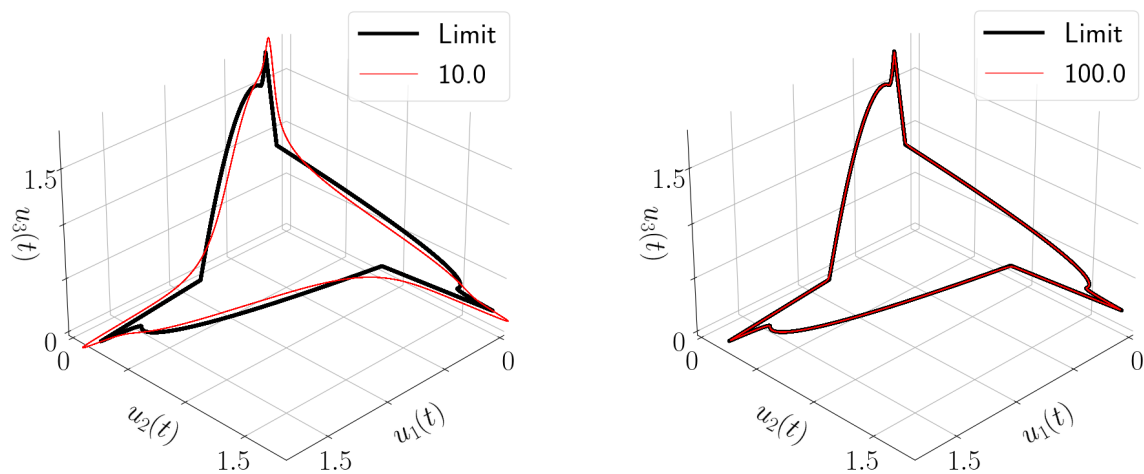


Рис. 1. Иллюстрация периодического решения предельной системы (3) в псевдофазовом пространстве ($m = 2$) в сравнении с решением системы (2) при $\gamma = 10$ (слева) и $\gamma = 100$ (справа). Функция $u_i(t)$ получаются из $V_i(t)$ в результате перенормировки времени и параметров a, b, c

Для предельной системы (3) доказывается, что при некоторых (явных) ограничениях на параметры, существует периодическое решение в форме дискретной бегущей волны [2]

$$u_j(t) = u(t + k_j \Delta), \quad (5)$$

где $\Delta > 0$ – сдвиг решений по времени; k_1, \dots, k_m – перестановка чисел $1, \dots, m$. Проводится исследование орбитальной устойчивости данных решений.

Также в работе приводятся результаты численного моделирования решений системы (2) при $\gamma \gg 1$ в сравнении с решением предельной системы, см. рис. 1.

Список литературы

1. Mackey M. C. and Glass L. Oscillation and chaos in physiological control systems // Science. 1977. Vol. 197, no. 4300. P. 287–289.
2. Глызин С. Д., Колесов А. Ю. Бегущие волны в полносвязных сетях нелинейных осцилляторов // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2022. Т. 61, № 1. С. 71–89.

Генераторы ультракоротких импульсов спиновых волн: теория и эксперимент*

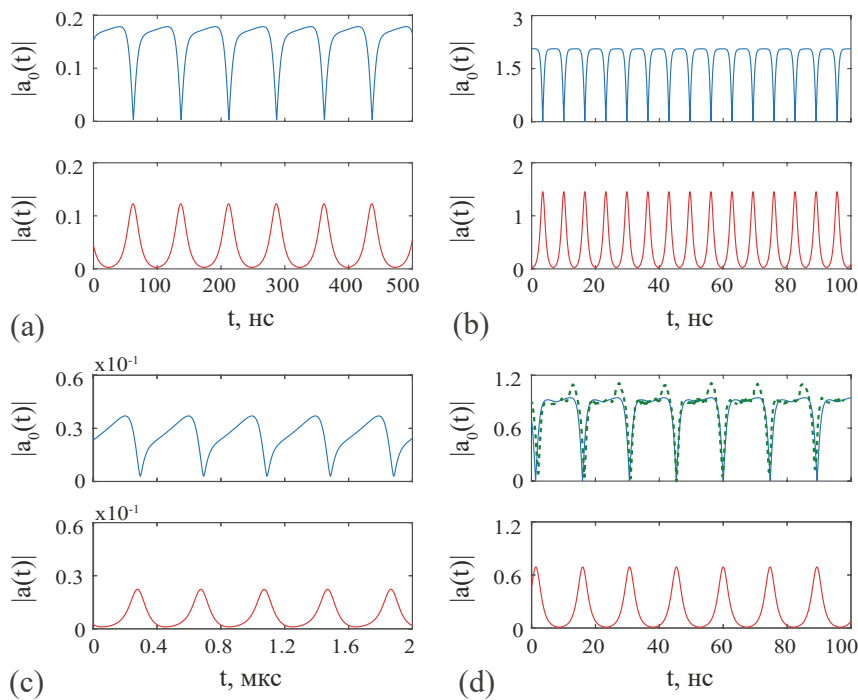
А. С. Бир

Саратовский национальный исследовательский
государственный университет имени Н. Г. Чернышевского
✉ bir.evstegneeva.1997@gmail.com

В последние годы активно проводятся исследования по созданию в микроволновом диапазоне частот автономных источников импульсных сигналов ультракороткой длительности (УКИ). Такие источники представляют собой кольцевые генераторы, в цепи обратной связи которых содержатся либо один нелинейный элемент в виде насыщающегося поглотителя, выполненного, например, из ЛБВ-подавителя [1], либо комбинация из двух нелинейных элементов [2, 3]. В настоящем докладе приводятся теоретические результаты, объясняющие физические механизмы формирования «темных» УКИ в активных кольцевых резонаторах с ферромагнитными волноводами, поддерживающими трехволновый параметрический распад длинноволновой поверхностной магнитостатической волны на коротковолновые спиновые волны. Результаты расчета сравниваются с экспериментальными данными.

Для расчетов используется модифицированная модель Вышкинд–Рабиновича с насыщающимся инкрементом неустойчивой волны, т. е. с уменьшением амплитуды неустойчивой волны он возрастает и достигает максимального значения (насыщается) при малых ее амплитудах. Кроме того, в модели учитывается запаздывание неустойчивой волны в цепи обратной связи. На рис. 1а,б приведены результаты, полученные на основе численного решения модифицированной модели Вышкинд–Рабиновича в отсутствие запаздывания. Из представленных результатов следует, что на неустойчивой волне вместо импульсов огибающей релаксационной формы формируются импульсы огибающей несимметричной формы (см. рис. 1а). При дальнейшем увеличении линейного инкремента (см. рис. 1б) на амплитудном плато неустойчивой волны формируются темные УКИ с длительностями меньше 1 нс. Одновременном с этим на параметрически возбуждаемой волне формируются светлые УКИ с близкими значениями длительности.

*Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-79-30027, <https://rscf.ru/project/23-79-30027/>.



Результаты исследования влияния запаздывающей обратной связи на динамику системы приведены на рис. 1c,d. Видно, что запаздывание неустойчивой волны является причиной увеличения как длительности, так и периода следования темных и светлых УКИ для обоих значений линейного инкремента. Кроме того, если время запаздывания становится больше длительности темных УКИ, то между темными УКИ появляются дополнительные провалы (см. рис. 1d). На рис. 1d пунктирной линией показана последовательность темных УКИ, полученная из радиофизического эксперимента [3]. Видно, что длительность и период следования измеренных и рассчитанных темных УКИ достаточно хорошо согласуются между собой.

Список литературы

1. *Ginzburg N. S. et al.* Nonlinear cyclotron resonance absorber for a microwave subnanosecond pulse generator powered by a helical-waveguide gyrotron traveling-wave tube // *Phys. Rev. Appl.* 2020. Vol. 13, No 4. P. 044033.
2. *Grishin S. V., et al.* Self-generation of chaotic dissipative multisoliton complexes supported by competing nonlinear spin-wave interactions // *Phys. Rev. E.* 2018. Vol. 98, No 2. P. 022209
3. *Бир А. С., Гришин С. В.* Генерация темных многосолитонных комплексов в магнотонном кольцевом резонаторе с управлением дисперсией и конкурирующими нелинейными спин-волновыми взаимодействиями // *Письма в ЖЭТФ.* 2019. Т. 110, № 5. С. 348.

Вязкоупругое обобщение нелинейной модели упругости Мурнагана*

Ф. Е. Гарбузов[✉], Я. М. Бельтюков

Физико-технический институт им. А. Ф. Иоффе РАН

✉ fedor.garbuzov@mail.ioffe.ru

Изучение механически нелинейных материалов, таких как полимеры, биологические ткани или геоматериалы, имеет огромное значение в различных областях науки и техники, ввиду их повсеместного присутствия в окружающем мире.

Наиболее общей моделью изотропного нелинейно-упругого материала в режиме малых, но конечных деформаций является материал Мурнагана, в котором нелинейность учитывается как поправка следующего порядка к линейному закону упругости Гука. В рамках этой модели получены важные результаты для нелинейных волн деформации. В частности, были получены модели длинных продольных волн на основе уравнений типа Буссинеска и Кортвега – де Фриза, имеющих решение в виде объёмных солитонов деформации, а также широко изучено возможное применение солитонов деформации для неразрушающего контроля материалов [1, 2].

Реальные нелинейные материалы как, например, полимеры помимо упругих свойств часто демонстрируют и вязкие свойства. Модели, совмещающие нелинейную упругость с линейной вязкостью, успешно использовались для моделирования нелинейных волн деформации [3, 4], однако эффекты нелинейной вязкости редко упоминаются в этом контексте. В недавних экспериментах по измерению нелинейных модулей упругости Мурнагана в стекловидных полимерах обнаружилась сильная зависимость этих модулей от частоты волны деформации, использовавшейся для их измерения (рис. 1) [5], что свидетельствует о сильных нелинейно-вязкоупругих эффектах в этих полимерах.

В настоящей работе представлена модель, учитывающая как линейные, так и всевозможные нелинейные вязкоупругие эффекты второго порядка. Используя обобщение вязкоупругой модели Максвелла с множеством времён релаксации на нелинейный случай, был получен явный вид частотной зависимости нелинейных модулей. Сравнение полученных результатов с экспериментальными данными позволяет установить параметры модели. На рис. 1 приведено сравнение частотной зависимости нелинейных модулей в полистироле с полученными результатами

*Работа поддержана РНФ, грант № 22-72-10083.

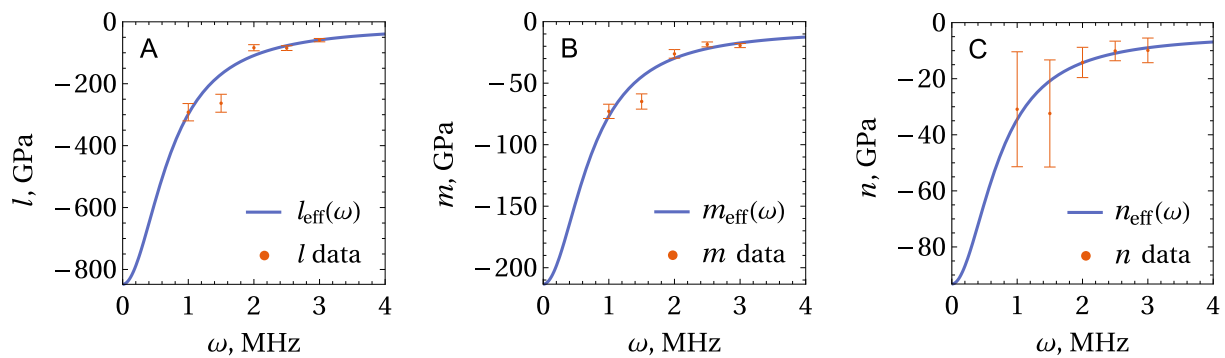


Рис. 1. Зависимость эффективных нелинейных модулей упругости Мурнагана l , m и n от частоты волны деформации. Точками показаны экспериментально измеренные модули в [5], а линиями отмечены подогнанные к экспериментальным данным теоретические зависимости

в приближении одного времени релаксации. Показано, что, наблюдая за генерацией высших гармоник, можно измерить все неизвестные параметры частотно-зависимых динамических модулей.

Полученные результаты важны для изучения нелинейных волн деформации и, в частности, солитонов деформации. Так, например, предсказываемый сильный рост абсолютного значения эффективных нелинейных модулей упругости при уменьшении частоты (рис. 1) может привести к образованию длинных солитонов деформации, поскольку параметр нелинейности в моделях объёмных солитонов деформации пропорционален модулям Мурнагана.

Список литературы

1. *Samsonov A. M., Khusnutdinova K. R.* Fission of a longitudinal strain solitary wave in a delaminated bar // *Phys. Rev. E.* 2008. Vol. 77. P. 066603.
2. *Samsonov A. M., Semenova I. V., Garbuzov F. E.* Nonlinear guided bulk waves in heterogeneous elastic structural elements // *Int. J. Non-Lin. Mech.* 2017. Vol. 94, P. 343–350.
3. *Zabolotskaya E. A., Hamilton M. F., Ilinskii, Y. A., Meegan G. D.* Modeling of nonlinear shear waves in soft solids // *J. Acoust. Soc. Am.* 2004. Vol. 116. P. 2807.
4. *Garbuzov F. E., Belashov A. V., Zhikhoreva A. A., Beltukov Y. M., Semenova I. V.* Shock wave evolution into strain solitary wave in nonlinearly elastic solid bar // *Wave Motion.* 2022. Vol. 114. P. 103022.
5. *Белашов А. В., Жихорева А. А., Бельтюков Я. М., Москалюк О. А., Семенова И. В.* Определение модулей упругости третьего порядка в образцах полистирола, изготовленных по разным технологиям // *ЖТФ.* 2021. Т. 91, № 8. С. 1220–1226.

Влияние накачки на солитоноподобные волны в решетке частиц, связанных нелинейными силами

Р. Д. Елатенцев[✉], *К. С. Сергеев*

Саратовский национальный исследовательский
государственный университет имени Н. Г. Чернышевского
✉ roma.elatentzev@gmail.com

Одно из направлений исследований в области нелинейной динамики сконцентрировано на моделировании поведения решеток и цепочек взаимодействующих элементов (атомов, частиц или осцилляторов).

Обычно при исследовании динамики цепочек используют модели, в которых консервативные или активные элементы связаны нелинейными потенциальными силами [1–4].

В рамках настоящего доклада обсуждаются свойства М-солитонов в двумерной решетке с треугольной симметрией элементарной ячейки. Элементы решетки связаны посредством сил модифицированного потенциала Морзе [5]

$$U(z) = D \left(e^{-2b(z-\sigma)} - 2e^{-b(z-\sigma)} \right) \frac{1}{1 + e^{(z-d)/2v}}, \quad (1)$$

где z — расстояние между частицами, D — глубина потенциальной ямы, b — коэффициент жесткости потенциала, σ — равновесное расстояние между частицами, d и v — параметры «сглаживающего» коэффициента потенциала.

Сами элементы представляют собой частицы под действием нелинейного отрицательного трения

$$\gamma(\dot{x}, t) = -\Gamma(t) \left(1 - \frac{\dot{x}^2}{v_0^2} \right), \quad (2)$$

где v_0 — стационарное значение скорости, а $\Gamma(t) = \gamma_0 H(t + nT) - \gamma_0 H(t - t_{imp} + nT)$ — зависящий от времени коэффициент трения с периодом T и длительностью импульса включения t_{imp} ($H(t)$ — функция Хэвисайда). Трение $\gamma(\dot{x}, t)$ периодически включается и отключается; изменение скважности импульсов включения/отключения трения позволяет постепенно переходить от консервативной решетки к активной и наблюдать изменение свойств солитонов.

Динамика i -той частицы подчиняется уравнению в безразмерных переменных:

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{q}}_i - \mu \left(1 - \frac{|\dot{\vec{q}}_i|^2}{v_0^2} \right) \dot{\vec{q}}_i = \\ = \sum_{|\vec{q}_i^*| < R} \frac{\vec{q}_i^*}{|\vec{q}_i^*|} \left[(e^{b\sigma - |\vec{q}_i^*|} - e^{2(b\sigma - |\vec{q}_i^*|)}) \cdot \frac{1}{1 + e^{\frac{|\vec{q}_i^*|/b-d}{2\nu}}} - \right. \\ \left. - \frac{1}{2b} \frac{e^{2(b\sigma - |\vec{q}_i^*|)} - 2e^{b\sigma - |\vec{q}_i^*|}}{2\nu \left(e^{\frac{|\vec{q}_i^*|/b-d}{2\nu}} + 1 \right)^2} \cdot e^{\frac{|\vec{q}_i^*|/b-d}{2\nu}} \right]. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь используются следующие обозначения: $\vec{q}_i = b\vec{r}_i$ — безразмерная координата (где $\vec{r}_i = \{x_i; y_i\}$ — размерная координата частицы), $\dot{\vec{q}}_i = \frac{\omega_M}{b} \vec{v}_i$ — безразмерная скорость, точками обозначается дифференцирование по безразмерному времени $\tau = \omega_M t$.

Было показано, что при включенном трении длина пробега солитонов уменьшается по сравнению с консервативным случаем. Однако в случае солитона с «бесконечным» фронтом (в решетке с периодическими граничными условиями ширина фронта равна ширине решетки) накачка способна увеличить длину пробега солитона во много раз. Также было установлено, что в некоторых случаях при использовании накачки уменьшается возбуждение фонона в решетке позади солитона.

Список литературы

1. *Schweitzer F.* Brownian agents and active particles: collective dynamics in the natural and social sciences // Springer Science and Business Media, 2007.
2. *Bechinger C., Leonardo R., Lowen H., Reichhardt C., Volpe G.* Active particles in complex and crowded environments // Rev. Mod. Phys. 2016. Vol. 88.
3. *Chetverikov A. P., Dmitriev S. V., Ebeling W., Korznikova E. A., Velarde M. G.* Localized lump-soliton-like excitations in triangular morse lattices // Materials Physics and Mechanics. 2018. Vol. 35. P. 16–20.
4. *Sergeev K. S., Dmitriev S. V., Ebeling W., Korznikova E. A., Chetverikov A. P.* Stationary Modes and Localized Metastable States in a Triangular Lattice of Active Particles // Russian Journal of Nonlinear Dynamics. 2018. Vol. 14, no. 2. P. 195–207.
5. *Chetverikov A. P., Ebeling W., Velarde M. G.* Localized nonlinear, soliton-like waves in two-dimensional anharmonic lattices // Wave Motion. 2011. Vol. 48, no. 8. P. 753–760.

Стохастическое параметрическое возбуждение конвекции Рэлея–Бенара*

Э. В. Пермякова^{1,2}✉, Д. С. Голдобин^{1,2}

¹Институт механики сплошных сред УрО РАН

²Пермский государственный национальный исследовательский университет

✉ evelina.v.permyakova@gmail.com

В работе рассматривается проблема возбуждения тепловой конвекции в горизонтальном слое с изотермическими недеформируемыми свободными границами при случайной модуляции силы тяжести. Для системы получены уравнения стохастической динамики амплитуды малых возмущений поля температуры θ и функции тока ψ :

$$\frac{d}{dt}\psi = -\mathcal{D}\psi - \frac{kRa_0}{\mathcal{D}}\theta - \frac{k\sigma Ra_0}{\mathcal{D}}\xi(t)\theta, \quad (1)$$

$$\frac{d}{dt}\theta = -\frac{sk}{Pr}\psi - \frac{\mathcal{D}}{Pr}\theta, \quad (2)$$

где $\mathcal{D} = \pi^2 + k^2$, Pr — число Прандтля, k — волновое число течения, σ — относительная амплитуда случайных вибраций: зависящее от времени число Рэлея $Ra(t) = Ra_0(1 + \sigma\xi(t))$, Ra_0 — порог конвективной неустойчивости системы в отсутствие вибраций, $s = +1$ при подогреве снизу и -1 — при подогреве сверху.

Для системы стохастических уравнений (1)–(2) выводятся условия роста среднеквадратичных значений, которые используются в качестве критерия возбуждения конвективных движений в системе. Возбуждение течений описано как для случая подогрева снизу ($s = +1$), так и для подогрева сверху ($s = -1$). Проверено, что найденные моды самого быстрого роста среднеквадратичных значений при всех значениях параметров лежат в области фазового пространства, имеющей физический смысл. В противоположность случаю высокочастотных периодических вибраций [1, 2] белый гауссов шум всегда оказывает дестабилизирующее воздействие на состояние механического равновесия рис. 1 [3, 4]. Случаи белого гауссова шума и гармонических высокочастотных вибраций также сопоставлены в общем виде, без привязки к частному виду уравнений тепловой конвекции.

*Работа выполнена в рамках бюджетной темы № 121112200078-7.

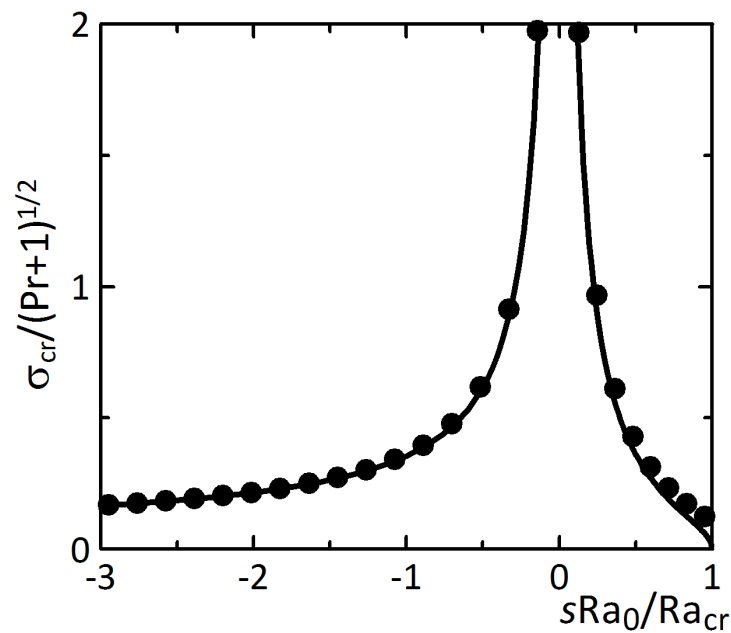


Рис. 1. Конвективные движения возбуждаются выше представленной границы линейной неустойчивости состояния механического равновесия системы (1)–(2)

Список литературы

1. Зеньковская С. М., Симоненко И. Б. О влиянии вибрации высокой частоты на возникновение конвекции // Изв. АН СССР. МЖГ. 1966. № 5. С. 51–55.
2. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Юрков Ю. С. О конвективной устойчивости при наличии периодически меняющегося параметра // Прикладная математика и механика. 1970. Т. 34, № 3. С. 470–483.
3. Пермякова Э. В., Голдобин Д. С. Стохастическое параметрическое возбуждение конвекции Рэлея–Бенара // Вестник Пермского университета. Физика. 2022. № 4. С. 34–44.
4. Permyakova E. V., Goldobin D. S. Stochastic parametric excitation of convective heat transfer // Philosophical Transactions of the Royal Society of London A. 2023. Vol. 381. P. 20220084.

Исследование характера модуляционной неустойчивости при циклотронном резонансном взаимодействии излучения со встречным прямолинейным пучком электронов

А. А. Ростунцова

Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН
Саратовский национальный исследовательский
государственный университет имени Н. Г. Чернышевского
✉ rostuncova@mail.ru

Модуляционная неустойчивость (МН), при которой монохроматическая волна неустойчива относительно медленных пространственно-временных модуляций, является одним из эффектов, приводящих к возникновению сложной динамики в нелинейных средах с дисперсией [1]. Так, наши исследования, представленные в [2], показали, что МН приводит к преобразованию непрерывного микроволнового сигнала в последовательность солитоноподобных импульсов при циклотронном взаимодействии волны со встречным прямолинейным пучком электронов. В численном моделировании было обнаружено, что с увеличением амплитуды или частоты падающей волны нестационарная автомодуляция, которая приводит в том числе к генерации периодических или хаотических последовательностей импульсов, сменяется стационарным прохождением волны. В данной работе показано, что этот эффект вызван сменой характера МН с абсолютного на конвективный.

Для описания электронно-волнового взаимодействия рассматривалась система уравнений, приведенная в работе [2]. Анализ решений в виде монохроматической волны показал, что существует полоса полного циклотронного поглощения (область 1 на рис. 1), которая смещается в область более низких частот с увеличением амплитуды. При этом становится возможным незатухающее распространение волн, сопровождающееся МН. Вблизи частоты отсечки (штрих-пунктирная линия на рис. 1) систему с МН можно приблизительно описывать нелинейным уравнением Шредингера (НУШ). Используя критерий смены характера МН, полученный для НУШ в работе [4], можно сделать предварительную оценку границы между абсолютной и конвективной МН на плоскости параметров входной волны (штриховая линия на рис. 1). Более строгий подход основан на анализе асимптотической формы возмущения, вычисленной методом перевала [3]. Поскольку имеет место МН, то возмущения задавались в виде пары сателлитов, равноотстоящих от несущей частоты. Параметры,

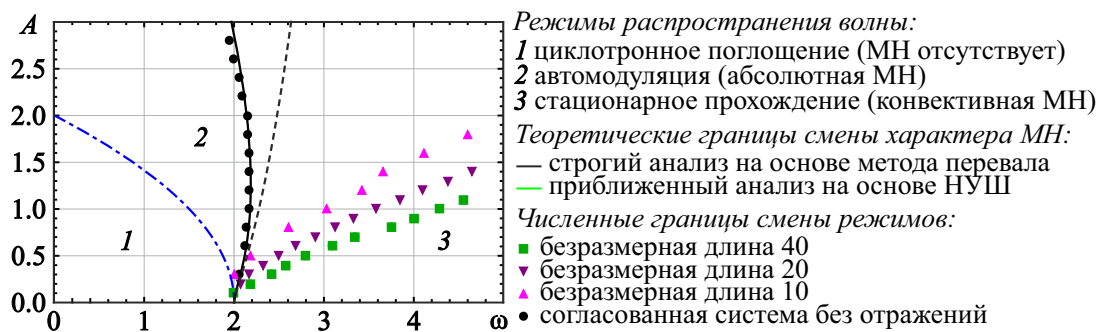


Рис. 1. Области различных режимов на плоскости параметров входной волны. По осям отложены безразмерная амплитуда A и безразмерная частотная отстройка от циклотронного резонанса ω . Численные данные и теоретические кривые изображены точками и сплошными линиями соответственно

при которых МН является абсолютной, определялись по положительному инкременту неустойчивости в точке перевала [3]. Соответствующая граница смены характера МН отмечена сплошной линией на рис. 1. Полученные теоретические границы согласуются друг с другом при небольших амплитудах падающей волны.

Граница перехода от автомодуляционных режимов к стационарному прохождению сигнала, полученная в численном моделировании, зависит от безразмерной длины системы (см. рис. 1), что связано с отражениями от границы, через которую инжектируется прямолинейный пучок электронов. Поскольку при циклотронном резонансном взаимодействии электроны замагничиваются продольным магнитным полем, чтобы уменьшить отражения, был задан согласующий участок, на котором имеет место плавное нарастание магнитного поля в направлении движения электронов. Граница, полученная для согласованной системы (круглые точки на рис. 1), соответствует теоретическим результатам.

Список литературы

1. Zakharov V. E., Ostrovsky L. A. Modulation instability: The beginning // *Physica D*. 2009. Vol. 238, no. 5. P. 540–548.
2. Rostuntsova A. A., Ryskin N. M., Zotova I. V., Ginzburg N. S. Modulation instability of an electromagnetic wave interacting with a counterpropagating electron beam under condition of cyclotron resonance absorption // *Phys. Rev. E*. 2022. Vol. 106. P. 014214.
3. Рыскин Н. М. Колебания и волны в нелинейных активных средах. Издательство Саратовского университета, Саратов, 2017. 102 с.
4. Балякин А. А., Рыскин Н. М. Смена характера модуляционной неустойчивости вблизи критической частоты // *Письма в ЖТФ*. 2004. Т. 30, № 5. С. 6–13.

Влияние периферийной турбулентности в токамаке на низкопороговую параметрическую распадную неустойчивость*

П. В. Третинников[✉], Е. З. Гусаков, А. Ю. Попов

Физико-технический институт им. А. Ф. Иоффе РАН

[✉] tretinnikov@mail.ioffe.ru

Электронно-циклотронный резонансный нагрев (ЭЦРН) является широко используемым методом нагрева плазмы в установках с магнитным удержанием. Он основан на теоретической модели, предсказывающей локализованное выделение энергии микроволнового пучка в плазме в отсутствие нелинейных эффектов. Однако, в последние десятилетия наблюдались различные аномальные эффекты при зондировании плазмы высокомоощными СВЧ пучками: аномальное рассеяние СВЧ волн, ускорение ионов в эксперименте с ЭЦРН в условиях, когда энергообмен между электронами и ионами должен быть очень мал, значительные уширения профиля энергосодержания были обнаружены в экспериментах с ЭЦРН на различных токамаках и интерпретированы как следствие низкомощных пороговых абсолютных параметрических неустойчивостей распада (ПРН), возбуждаемых в присутствии немонотонного профиля плотности. Развитая теория низкопороговой ПРН [1] не только описала известные аномальные эффекты, но и предсказала излучение на субгармониках частоты гиротрона в экспериментах с ЭЦРН, что было подтверждено в эксперимент позже.

В случае неоднородной плазмы с монотонными профилями плотности и магнитного поля пороги возбуждения ПРН для различных сценариев параметрического распада волны накачки были проанализированы и оценены разными авторами более трех десятилетий назад. Результаты этих исследований, обобщенные в [2], предсказывают энергетические пороги неустойчивости, которые намного выше, чем мощность современных гиротронов для термоядерных плазменных установок. Это связано с огромными конвективными потерями энергии дочерних волн из области распада. Между тем, если одна или обе дочерние волны каким-либо образом ограничены в области распада, это подавляет их потери энергии и снижает порог неустойчивости. Результаты этого анализа, обобщенные в [1], предсказывают порог неустойчивости на уровне, который на два-четыре порядка ниже, чем для монотонного профиля плотности, и ниже, чем мощность современных гиротронов, используемых на токамаках и стеллараторах.

*Работа поддержана РФФ, грант № 22-12-00010.

Сценарии низкорогового параметрического распада, приводящего к возбуждению запертой верхнегибридной волны и свободно бегущей необыкновенной волны, а также насыщение этого процесса для различных режимов неустойчивости, анализировались аналитически и численно для гладких гауссовых пучков накачки. Однако анализ распространения микроволнового пучка в турбулентной плазме показал, что характеристики пучка могут существенно изменяться из-за периферийного слоя турбулентности [3–6]. Искажения пучка в среднем приводят к угловому и пространственному уширению, не влияющему на форму — пучок остается гауссовым, тогда как мгновенное случайное распределение поля накачки может быть разбито на несколько подпучков. Это приводит к вопросу, применима ли при этом теория ПРН, разработанная для гладких пучков накачки, характеристики неустойчивости и насколько существенной может быть разница для разных параметров периферийной турбулентности плазмы.

В данной работе численно исследуется низкороговый двухступенчатый процесс параметрического распада для распределения пучка волны накачки, искаженного периферийной турбулентностью. Ключевые характеристики неустойчивости оцениваются и сравниваются с предсказаниями теории для гауссовых пучков. Показано, что средний инкремент ПРН снижается, а порог возбуждения увеличивается, тогда как средний уровень насыщения неустойчивости и уровень аномального поглощения энергии при мощности накачки, существенно превышающей пороговую, практически не зависят от периферийной турбулентности плазмы.

Список литературы

1. *Gusakov E. Z., Popov A. Yu.* Low-power-threshold parametric decay instabilities of powerful microwave beams in toroidal fusion devices // *Phys. Usp.* 2020. Vol. 63. P. 365.
2. *Cohen B. I., Cohen R. H., Nevins W. M., Rognlien T. D.* Theory of free-electron-laser heating and current drive in magnetized plasmas // *Rev. Mod. Phys.* 1991. Vol. 63. P. 949.
3. *Sysoeva E. V., F. da Silva, Gusakov E. Z., Heurax S. and Popov A. Yu.* // *Nucl. Fusion.* 2015. Vol. 55(3). 033016.
4. *Bertelli N., Kramer G. J. and Valeo E. J.* // *Plasma Phys. Control. Fusion.* 2019. Vol. 61. 105018.
5. *Snicker A. et al.* // *Plasma Phys. Control. Fusion.* 2018. Vol. 60. 014020.
6. *Tretinnikov P. V., Gusakov E. Z. and Heurax S.* // *Plasma Phys. and Control. Fusion.* 2021. Vol. 63. 085003.

Точные решения для динамики двухгрупповых состояний ансамблей Отта–Антонсена*

И. В. Тюлькина^{1✉}, *Д. С. Голдобин*^{1,2}, *Л. С. Клименко*^{1,2}, *А. Пиковский*³

¹Институт механики сплошных сред УрО РАН

²Пермский государственный национальный исследовательский университет

³University of Potsdam

✉ irinatiulkina95@gmail.com

В данной работе получено простейшее нетривиальное расширение уравнения Отта–Антонсена [1], соответствующее двухгрупповым состояниям ансамбля [2]. Рассмотрена система идентичных элементов, которые описываются уравнениями вида

$$\varphi = \omega(t) + \text{Im}(2h(t)e^{-i\varphi}), \quad k = 1, \dots, N, \quad (1)$$

где $\omega(t)$ и $h(t)$ — произвольные действительная и комплексная функции времени.

Отт и Антонсен заметили [1], что цепочка уравнений (1) допускает решение вида $a_n(t) = (a_1(t))^n$, для которого можно получить простое уравнение динамики:

$$\dot{a}_1 = i\omega a_1 + h - h^* a_1^2. \quad (2)$$

где $a_1 = \langle e^{i\varphi} \rangle$ является параметром порядка системы.

В терминах круговых кумулянтов [3, 4] решение Отта–Антонсена принимает простой вид:

$$\kappa_1 = a_1, \quad \kappa_{n \geq 2} = 0. \quad (3)$$

Между тем возможны более широкие частные случаи [2, 5], позволяющие получить замкнутые уравнения вместо бесконечной системы. В общем случае, если старшие кумулянты не равны нулю, уравнение для $n = 1$ имеет вид

$$\dot{\kappa}_1 = (i\Omega - \gamma)\kappa_1 + h - h^*(\kappa_2 + \kappa_1^2). \quad (4)$$

В типичных задачах $h = h(\kappa_1, t)$ и отклонение динамики параметра порядка κ_1 от решения ОА требует ненулевого значения κ_2 . Поэтому интерес

*Работа выполнена в рамках бюджетной темы № 121112200078-7.

представляют частные решения с $\kappa_2 \neq 0$. Система уравнений для кумулянтов замыкается, если для некоторых существенных кумулянтов κ_n будут обращаться в ноль κ_{n+1} . При $\kappa_2 \neq 0$ простейшим вариантом для рассмотрения являются решения, для которых равны нулю все нечетные κ_n , кроме первого.

Таким образом в системе можно выделить инвариантное многообразие

$$\kappa_{2j-1} = \kappa_1 \delta_{1j}, \quad \kappa_{2j} = C_j \kappa_2^j, \quad (5)$$

являющееся расширением множества Отта–Антонсена (многообразие ОА соответствует $\kappa_2 = 0$). C_j — константы интегрирования, определяемые начальными условиями; по определению, $C_1 = 1$.

Динамика системы на этом многообразии определяется замкнутой системой двух комплексных уравнений

$$\dot{\kappa}_1 = (i\Omega - \gamma)\kappa_1 + h - h^*(\kappa_2 + \kappa_1^2), \quad (6)$$

$$\dot{\kappa}_2 = 2(i\Omega - \gamma - 2h^*\kappa_1)\kappa_2. \quad (7)$$

Если h зависит не только от первых кумулянтов κ_1 и κ_2 , то система остается замкнутой, поскольку на этом множестве старшие кумулянты выражаются через второй (либо равны нулю).

Список литературы

1. *Ott E., Antonsen T. M.* Low dimensional behavior of large systems of globally coupled oscillators // *Chaos*. 2008. Vol. 18, no. 3. P. 037113.
2. *Тюлькина И. В., Голдобин Д. С., Клименко Л. С., Пиковский А.* Двухгрупповые решения для динамики ансамблей фазовых систем типа Отта–Антонсена // *Известия Вузов. Радиофизика*. 2018. Том 61. № 8–9. С. 718–728.
3. *Tyulkina I. V., Goldobin D. S., Klimenko L. S., Pikovsky A.* Dynamics of noisy oscillator populations beyond the Ott-Antonsen ansatz // *Physical Review Letters*. 2018. Vol. 120, no. 26. P. 264101.
4. *Goldobin D. S., Tyulkina I. V., Klimenko L. S., Pikovsky A.* Collective mode reductions for populations of coupled noisy oscillators // *Chaos*. 2018. Vol. 28, no. 10. P. 101101.
5. *Cestnik R., Pikovsky A.* Hierarchy of Exact Low-Dimensional Reductions for Populations of Coupled Oscillators // *Phys. Rev. Lett.* 2022. Vol. 128. P. 054101.

**Методы и приемы исследования систем
сингулярно возмущенных уравнений с запаздыванием
и связью различных типов***

С. Д. Глызин¹, С. Д. Глызин¹✉, А. Ю. Колесов^{1,2}

¹Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова

✉ glyzin.s@gmail.com

Одним из основополагающих принципов построения математических моделей нейронных систем является гипотеза об эквивалентности. Суть этой гипотезы в том, что мы а priori предполагаем эквивалентность биологического нейрона некоторому физическому генератору с сосредоточенными параметрами. В свою очередь, этот генератор моделируется нелинейной системой обыкновенных дифференциальных уравнений или системой с запаздыванием. А поскольку колебания мембранного потенциала носят заведомо релаксационный характер, то соответствующая система оказывается сингулярно возмущенной.

В настоящей работе, придерживаясь гипотезы об эквивалентности, в качестве модели отдельного нейрона мы используем скалярное нелинейное дифференциальное уравнение с запаздыванием вида

$$\dot{u} = \lambda f(u(t-1))u \quad (1)$$

для мембранного потенциала $u = u(t) > 0$. Здесь параметр $\lambda > 0$, характеризующий скорость протекания электрических процессов в нейроне, предполагается большим, точка – дифференцирование по t , а функция $f(u) \in C^2(\mathbb{R}_+)$, $\mathbb{R}_+ = \{u \in \mathbb{R} : u \geq 0\}$, обладает свойствами: $f(0)=1$, $f(u) + a = O(u^{-1})$, $uf'(u) = O(u^{-1})$, $u^2 f''(u) = O(u^{-1})$ при $u \rightarrow +\infty$, где $a = \text{const} > 0$.

Рассмотрим теперь вопрос о моделировании химических синапсов и напомним, что соответствующая попытка уже предпринималась ранее в статье [1], где был предложен некоторый подход к указанной проблеме, в основе которого лежала модифицированная идея быстрой пороговой модуляции. Предположим теперь, что имеется однонаправленно химически связанная сеть из m , $m \geq 2$ нейронов, объединенных в кольцо. Если допустить, что каждый отдельно взятый нейрон моделируется уравнением (1),

*Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-11-00209, <https://rscf.ru/project/22-11-00209/>

то мы можем, руководствуясь методикой быстрой пороговой модуляции, перейти от (1) к системе (см. [1], [6])

$$\dot{u}_j = \lambda[f(u_j(t-1)) + b g(u_{j-1})h(u_j/u_{j-1})]u_j, \quad j = 1, \dots, m, \quad u_0 = u_m, \quad (2)$$

в которой $b = \text{const} > 0$, $u_* = \exp(\sigma\lambda)$, $\sigma = \text{const} \in \mathbb{R}$, а функции $g(u), h(u) \in C^2(\mathbb{R}_+)$ такова, что $g(u) > 0 \forall u > 0$, $g(0) = 0$; $h(u) > 0$ при $0 \leq u < 1$, $h(u) < 0$ при $u > 1$, $h(1) = 0$, $h'(1) < 1$, $h(0) = 1$, $g(u) = 1 + O(u^{-1})$, $ug'(u) = O(u^{-1})$, $u^2g''(u) = O(u^{-1})$, $h(u) = -c + O(u^{-1})$, $uh'(u) = O(u^{-1})$, $u^2h''(u) = O(u^{-1})$ при $u \rightarrow +\infty$.

Данная система и есть интересующая нас новая математическая модель химических синапсов, ее характерной особенностью является то обстоятельство, что после замен $x_j = \varepsilon \ln u_j$, $j = 1, 2, \dots, m$, $\varepsilon = 1/\lambda \ll 1$ и последующего стремления параметра ε к нулю она допускает предельный объект, т. е. переходит в релейную систему

$$\dot{x}_j = 1 - (a+1)H(x_j(t-1)) + b H(x_{j-1})[1 - (c+1)H(x_j - x_{j-1})], \quad (3)$$

где $x_0 = x_m$, $1 \leq j \leq m$, а $H(x)$ — функция Хевисайда. Наличие предельного объекта (3) облегчает отыскание аттракторов системы (2) и позволяет, в частности, применить к ней общие результаты из [3] о соответствии между грубыми циклами релейной и релаксационной систем. Эти результаты используются для нахождения специальных периодических движений — так называемых бегущих волн, которыми будем называть специальное периодическое решение системы (3), допускающее представление $x_j = x(t + (j-1)\Delta)$, где $j = 1, 2, \dots, m$, $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq m-1$ — номер волны, $\Delta = \text{const} > 0$ — некоторый фазовый сдвиг, а функция $x(t)$ — периодическое решение вспомогательного уравнения

$$\dot{x} = 1 - (a+1)H(x(t-1)) + b H(x(t-\Delta))[1 - (c+1)H(x - x(t-\Delta))]. \quad (4)$$

Как оказывается, при подходящем выборе параметров бегущие волны релейной системы (3) могут быть найдены явно. Для того чтобы проанализировать их устойчивость применяются численные методы.

Список литературы

1. Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х. Об одном способе математического моделирования химических синапсов // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49, № 10. С. 1227–1244.
2. Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х. Об одном способе математического моделирования электрических синапсов // Дифференц. уравнения // 2022. Т. 58, № 7. С. 867–881.
3. Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х. Релаксационные автоколебания в сетях импульсных нейронов // УМН. 2015, Т. 70, № 3(423). С. 3–76.

Модели нейронных масс нового поколения*

В. В. Клиньшов, С. Ю. Кириллов, В. И. Некоркин

Институт прикладной физики им. А. В. Гапонова-Грехова РАН

✉ vladimir.klinshov@ipfran.ru

Исследование коллективной динамики крупномасштабных нейронных сетей является одним из ключевых направлений современной нелинейной науки. Работы в этом направлении необходимы для расширения и углубления понимания принципов функционирования мозга и обработки в нем информации. Развитие компьютерных технологий открывает возможности для прямого численного моделирования огромных сетей (миллионы нейронов и миллиарды синапсов) с высокой детализацией внутренней структуры (мульти-компаратментные модели клеток, сложная кинетика синапсов). Однако такие исследования все же остаются весьма затратными с точки зрения вычислительных ресурсов, также они проблематичны с точки зрения интерпретации получаемых результатов. В связи с указанными недостатками высокодетализированного моделирования все большую популярность приобретает другой подход, в котором поведение средне- и крупномасштабных нейронных популяций сводится к низко-размерным редуцированным динамическим системам для усредненных переменных, таких как средний мембранный потенциал или средняя частота возбуждения. Такие системы называются «среднеполевыми системами» или «моделями нейронных масс».

Модели нейронных масс имеют давнюю историю, восходящую к классической модели Вилсона-Кована [1]. Однако в последние годы бурно развиваются так называемые модели «нового поколения» [2], имеющие ряд ключевых отличительных черт. Во-первых, в отличие от феноменологических моделей прошлого, модели нового поколения могут быть выведены из уравнений для микроскопической динамики нейронной популяции. Во-вторых, помимо описания активности нейронов они способны также описывать и степень их синхронизации, что принципиально важно при моделировании колебательной динамики и генерации мозговых ритмов. Начало развитию среднеполевых моделей нового поколения положила работа Монтбрио, Пазо и Роксина [3], в последующих работах модель МПР была использована для исследования многих биологически важных задач, а также обобщена и усовершенствована в целом ряде аспектов.

*Работа выполнена при поддержке Российского Научного Фонда (грант 19-72-10114).

Так, был предложен метод описания сетей с реалистичной, а не модельной формой неоднородности [4], а также описано влияние эффектов конечного размера на их коллективную динамику [5].

Список литературы

1. *Wilson H.R., Cowan J.D.* Excitatory and inhibitory interactions in localized populations of model neurons // *Biophysical Journal*. 1972. Vol. 12, no. 1. P. 1–24.
2. *Coombes S., Byrne A.* Next Generation Neural Mass Models // *Nonlinear dynamics in computational neuroscience*. 2019. P. 1–16.
3. *Montbrió E., Pazó D., Roxin A.* Macroscopic description for networks of spiking neurons // *Physical Review X*. 2015. Vol. 5. P. 021028.
4. *Klinshov V., Kirillov S., Nekorkin V.* Reduction of the collective dynamics of neural populations with realistic forms of heterogeneity // *Physical Review E*. 2021. Vol. 103, no. 4. P. L040302.
5. *Klinshov V., Kirillov S.* Shot noise in next-generation neural mass models for finite-size networks // *Physical Review E*. 2022. Vol. 106, no. 6. P. L062302.

Особенности электрической активности головного мозга у новорожденных разного гестационного возраста*

*А. С. Акимова¹, А. Е. Руннова², М. А. Симонян²,
О. С. Панина², М. О. Журавлев^{1,2}*

¹Саратовский национальный исследовательский

государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

²Саратовский государственный медицинский университет имени В. И. Разумовского

✉ superlesenok@inbox.ru

В настоящее время изучение внешне нормальной несудорожной активности мозга у новорожденных продолжает привлекать значительное внимание исследователей, главным образом из-за необходимости разработки надежных систем для определения состояния сна/бодрствования и поиска точных критериев раннего выявления неврологических нарушений развития у новорожденных [1, 2]. В первые дни после родов мать и новорожденный, находясь в условиях родильного отделения, более равнодушно реагировали бы на безопасную и безболезненную процедуру регистрации различных сигналов физиологической активности [3]. Наше исследование включает изучение появления и первичной динамики маркеров глубокого сна у новорожденных разного гестационного возраста в первую неделю их жизни с точки зрения традиционного частотно-временного анализа.

Для изучения частотно-временных характеристик электроэнцефалографии было использовано традиционное непрерывное вейвлет-преобразование [4], которое позволило оценить динамику мощности колебательной активности в разных частотных диапазонах с хорошим временным разрешением. Мы представляем результаты численного анализа различной колебательной активности, выявленной с помощью мониторинга ЭЭГ, зарегистрированного у доношенных и позднедоношенных новорожденных, распределенных между двумя группами в зависимости от их гестационного возраста. В I и II группы вошли новорожденные с гестационным возрастом 38–41 недель и 34–36 недель, соответственно. Мониторинг включал в себя четырёхчасовую запись 12 каналов ЭЭГ, ЭОГ, ЭКГ, дыхательной функции и ЭМГ на руке и ноге ребенка. На основе визуального анализа показателей сердцебиения и т. д. определялся тип активности ребенка в данный момент времени, например, спокойное бодрствование, беспокойство,

*Исследование проведено в рамках финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 22–22–00517).

вокализация, активное сосание, движения, полифазные стадии сна и бодрствования. После чего, была выполнена оценка динамика электрической активности головного мозга новорожденных во время периодов сна и бодрствования в стандартных для современной электрофизиологии диапазонах частот (Δf_{δ} [0, 5; 4, 5] Гц, Δf_{θ} [4; 8] Гц, Δf_{α} [8; 12] Гц, Δf_{β_1} [12; 14] Гц, Δf_{β_2} [14; 20] Гц, Δf_{γ} [20; 30] Гц) [5]. При этом, было установлено, что в I группе правое полушарие характеризовалось равномерной активностью в частотных диапазонах Δf_{θ} , Δf_{α} , Δf_{β_1} и Δf_{γ} , т. е. средняя амплитуда активности для этих колебательных режимов была одинаковой во время активного бодрствования и активного сна. Активность левого полушария была значительно менее однородной и более вариабельной для группы II, а колебательная активность правого полушария во II группе была более однородной. Аналогичная ситуация могла наблюдаться и в состоянии спокойного сна, с той разницей, что вариабельность была в целом выше, а максимальная энергия колебательных мод приходилась на диапазоны Δf_{β_1} и Δf_{β_2} . Кроме того, активность левого полушария головного мозга на ЭЭГ в состоянии бодрствования в группе II была очень похожа на таковую у новорожденных группы I. Однако, состояния спокойного сна и активного сна позволили легко различать группы I и II по колебательной активности ЭЭГ в частотном диапазоне Δf_{θ} и Δf_{β_2} .

Таким образом, анализ электрической активности мозга может в дальнейшем стать одним из объективных критериев оценки успешности развития центральной нервной системы у недоношенных детей.

Список литературы

1. *Koolen N., Oberdorfer L., Rona Z., Giordano V., Werther T., Klebermass-Schrehof K., Stevenson N., Vanhatalo S.* Automated classification of neonatal sleep states using EEG // *Clinical Neurophysiology*. 2017. Vol. 128, no. 6. P. 1100.
2. *Pillay K., Dereymaeker A., Jansen K., Naulaers G., Van Huffel S., De Vos M.* Automated EEG sleep staging in the term-age baby using a generative modelling approach // *Journal of neural engineering*. 2018. Vol. 15, no. 3. P. 036004.
3. *Boksa P., Krishnamurthy A., Sharma S.* Hippocampal and hypothalamic type I corticosteroid receptor affinities are reduced in adult rats born by a caesarean procedure with or without an added period of anoxia // *Neuroendocrinology*. 1996. Vol. 64, no. 1. P. 25.
4. *Hramov A.E., Koronovskii A.A., Makarov V.A., Pavlov A.N., Sitnikova E.* Wavelets in neuroscience. Springer Berlin Heidelberg, 2015.
5. *Garcia-Losarcos N., Vuppala A., Loparo K.* Continuous EEG Monitoring and Quantitative EEG Techniques. Springer Berlin Heidelberg. 2020.

Особенности внедрения, обучения и функционирования искусственной нейронной сети, состоящей из моделей биологических нейронов*

*Т. Р. Богатенко[✉], К. С. Сергеев, А. В. Слепнев,
Г. И. Стрелкова, Н. И. Семенова*

Саратовский национальный исследовательский
государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

✉ trbogatenko@gmail.com

Основная цель данной работы — показать возможность создания искусственной нейронной сети, состоящей из математических моделей биологических нейронов. В качестве примера была выбрана система ФитцХью–Нагумо (ФХН) [1, 2]. Система ФХН — это хорошо известная концептуальная модель биологического нейрона, которая демонстрирует динамику спайков при определенных условиях. Она часто используется для моделирования базовой нейронной активности.

Поставленная задача позволяет приблизить искусственные нейронные сети к биологическим и показать, как биологические нейроны могут быть встроены в искусственную нейронную сеть. В качестве первого шага была использована топология уже обученной нейронной сети, с помощью которой можно распознавать изображения рукописных цифр (база данных MNIST [3]). Эта нейронная сеть состояла из трех слоев: первый слой отвечал за считывание входного сигнала, последний — за создание выходного сигнала. Средний слой являлся скрытым слоем, состоящим из искусственных нейронов с нелинейной функцией активации типа «сигмоида».

Далее решалась задача внедрения систем ФитцХью–Нагумо на место искусственных нейронов. Сигнал с первого входного слоя X умножается на матрицу связей W^{in} и затем посылается на каждую из 100 систем ФХН в скрытом слое сети. На этом этапе решается задача поиска способов внедрения систем, чтобы нейронная сеть продолжала функционировать и могла принимать входной сигнал и выдавать правильный выходной сигнал. Было показано, что полученный входной сигнал должен быть умножен на дополнительный множитель γ , что позволяет контролировать амплитуду входного сигнала ФХН более точно. Таким образом уравнение

*Работа поддержана стипендией Президента РФ СП-749.2022.5 и грантом РНФ № 20-12-00119.

для каждой i -ой системы ФХН в скрытом слое может быть записано следующим образом:

$$\begin{aligned}\varepsilon \dot{x}_i &= x_i - \frac{x_i^3}{3} - y_i \\ \dot{y}_i &= x_i + a + \gamma \cdot \tanh(\{\mathbf{X} \cdot \mathbf{W}^{\text{in}}\}_i),\end{aligned}\quad (1)$$

где ε , a — параметры системы ФХН, γ — параметр, управляющий амплитудой входного сигнала, X — входной сигнал, задающий изображение, \mathbf{W}^{in} — матрица, связывающая входной слой со скрытым.

Было показано, что только отрицательные значения γ приводят к адекватной точности. Кроме того, было установлено, что наиболее эффективным является случай, когда входной сигнал может управлять возбуждением системы. Таким образом нам удалось найти условия, при которых полученная нейронная сеть демонстрирует хорошую точность порядка 90%.

Следующий шаг усложнения задачи — рассмотреть процесс обучения сети, в которую уже внедрены системы ФХН. Для обучения сети была изменена топология сети и добавлен один дополнительный слой. Полученная нейронная сеть продемонстрировала увеличение точности работы на $\approx 12\%$ по сравнению с первоначально обученной ИНС, в которую впоследствии были введены системы ФХН. Этот подход открывает большие возможности в направлении аналоговых нейронных сетей, в которых искусственные нейроны могут быть заменены на более подходящие биологические.

Результаты исследований частично изложены в статье [4].

Список литературы

1. *FitzHugh R.* Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane // *Biophys. J.* 1961. Vol. 1, no. 6. P. 445–466.
2. *Nagumo J., Arimoto S., Yoshizawa S.* An active pulse transmission line simulating nerve axon // *Proc. of the IRE.* 1962. Vol. 50, no. 10. P. 2061–2070.
3. *LeCun, Y.* The MNIST database of handwritten digits. 1998. <http://yann.lecun.com/exdb/mnist/>
4. *Bogatenko T., Sergeev K., Slepnev A., Kurths J., Semenova N.* Symbiosis of an artificial neural network and models of biological neurons: training and testing // *arXiv preprint.* 2023. arXiv:2302.01636.

Квантование данных для нейронных сетей в задаче предсказания экстремальных событий по данным временного ряда*

Н. В. Громов[✉], Т. А. Леванова

Национальный исследовательский
Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского
[✉] gromov@itmm.unn.ru

Экстремальные события — это редкие, повторяющиеся и сильные отклонения от типичного поведения наблюдаемой переменной в биологических и инженерных системах, которые существенным образом влияют на их динамику [1]. Примером такого поведения могут быть эпилептические припадки [2]. Раннее предсказание появления экстремального события (припадка) является желаемой целью в эпилептологии, что может открыть путь новым методам лечения для контроля и предотвращения эпилептических припадков.

Цель работы — исследовать применимость метода квантования данных в задаче предсказания временных рядов, демонстрирующих хаотическую динамику и экстремальные события. Исследование проведено на примере искусственных данных, а также данных пациентов с эпилепсией, взятых из открытого репозитория PhysioNet. Искусственные данные получены с помощью расчета длинных временных рядов для системы двух пачечных нейронов Хидмарш–Роуза со взаимной химической связью:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = y_i + bx_i^2 - ax_i^3 - z_i + I - k_i(x_i - v_s)\Gamma(x_j), \\ \dot{y}_i = c - dx_i^2 - y_i, \\ \dot{z}_i = r[s(x_i - x_R) - z_i], \\ i, j = 1, 2 (i \neq j). \end{cases} \quad (1)$$

Здесь химическая синаптическая связь описывается сигмоидной функцией вида:

$$\Gamma(x) = \frac{1}{1 + \exp^{-\lambda(x-\Theta)}}. \quad (2)$$

Квантование данных было исследовано для следующих архитектур нейронных сетей: (i) резервуарные вычисления (RC), (ii) сети долгой краткосрочной памяти (LSTM), (iii) трансформеры [3], (iv) сверточная сеть вокодер WaveNet [4].

*Работа поддержана РФФ, грант № 19-72-10128.

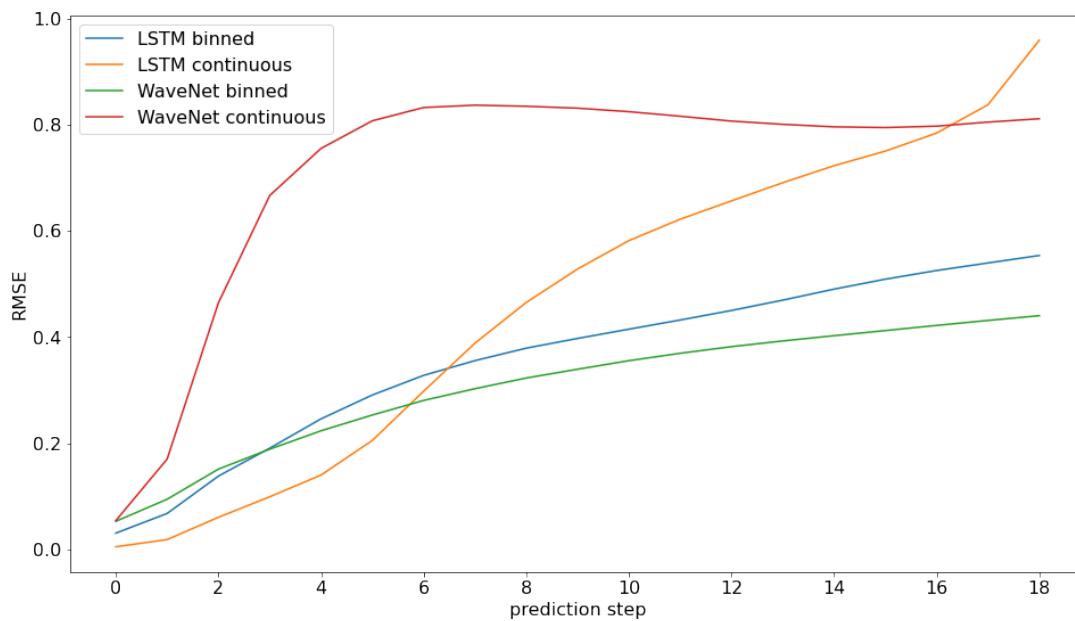


Рис. 1. Зависимость величины среднеквадратичной ошибки (RMSE) от количества шагов вперед, на которое мы строим предсказание. Из приведенного графика видно, что начиная с предсказания на 7 шагов вперед, квантование демонстрирует лучшие значения метрики качества

Экспериментально были выявлены архитектуры, позволяющие получить лучшие значения метрики среднеквадратичной ошибки: LSTM и WaveNet. Было продемонстрировано, что указанные сети на данных с применением квантования позволяют улучшить значение метрики качества предсказания в случае предсказания на достаточно большое число шагов вперед, см. рис. 1.

Отметим, что такое представление данных может быть также использовано для генерации временного ряда в режиме семплирования без априорных предположений о распределении о каждом временном отсчете. Благодаря такому моделированию можно делать предположения о ряде статистик на длительном временном интервале.

Список литературы

1. *Lehnertz K.* Epilepsy: Extreme events in the human brain. // *Extreme events in nature and society.* 2006. P. 123–143.
2. *Frolov N. S., et al.* Statistical properties and predictability of extreme epileptic events. // *Scientific reports.* 2019. Vol. 9(1). P. 7243.
3. *Vaswani A., et al.* Attention is all you need. // *Advances in neural information processing systems.* 2017. Vol. 30.
4. *Oord A. v. d., et al.* Wavenet: A generative model for raw audio. // *arXiv preprint arXiv:1609.03499.* 2016.

Нелинейность в основе особенностей частотно-временной организации пик-волновой активности*

А. Ю. Долинина^{1,2,3}✉, М. В. Сысоева^{1,2}, И. В. Сысоев^{1,3}

¹Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН

²Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю. А.

³Саратовский национальный исследовательский
государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

✉ dolinina13nastya@yandex.ru

Спонтанно возникающие высокоамплитудные пик-волновые разряды характерны для такого заболевания как эпилепсия [1]. Различного рода изменения частотно-временной структуры рассматриваются чаще только в определенном диапазоне, соответствующем основной (первой) гармонике. Однако, спектральное представление структур основной и высших гармоник обычно имеют идентичную организацию.

В данной работе была исследована частотно-временная динамика пик-волновых разрядов для первой и второй гармоник сигнала.

В качестве исследуемых данных выступали временные ряды локальных потенциалов мозга крыс с признаками абсансной эпилепсии, полученных с области лобной и теменной коры [2]. Для анализа были использованы 200 с интервалы сигнала включающих как разряды, так и фоновую динамику. Всего было рассмотрено 240 интервалов.

Данные сигналы видоизменялись с помощью оконного преобразования Фурье с окном Ханна, длина которого составила $\Delta T = 1$ с, что соответствовало приемлемому компромиссу между частотным разрешением Δf . Далее выделялись диапазоны основной $[7\Delta f; 12\Delta f]$ и второй $[14\Delta f; 24\Delta f]$ гармоник. На основе полученных частотных и временных характеристик строились скелетоны, над которыми затем была произведена фильтрация (сглаживание) во временной области с временем отсечки 0.1 с. Затем скелетоны двух гармоник совмещались, а для дальнейшего анализа значения частот, соответствующих второй гармонике, делились пополам.

В итоге для подавляющего большинства рассмотренных разрядов структура второй гармоник повторяла структуру первой с погрешностью не более 1 Гц. В фоновых участках скелетоны двух гармоник выглядели достаточно независимо. В местах размеченных разрядов отметки метода

*Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 19-72-10030-П, <https://rscf.ru/project/19-72-10030/>

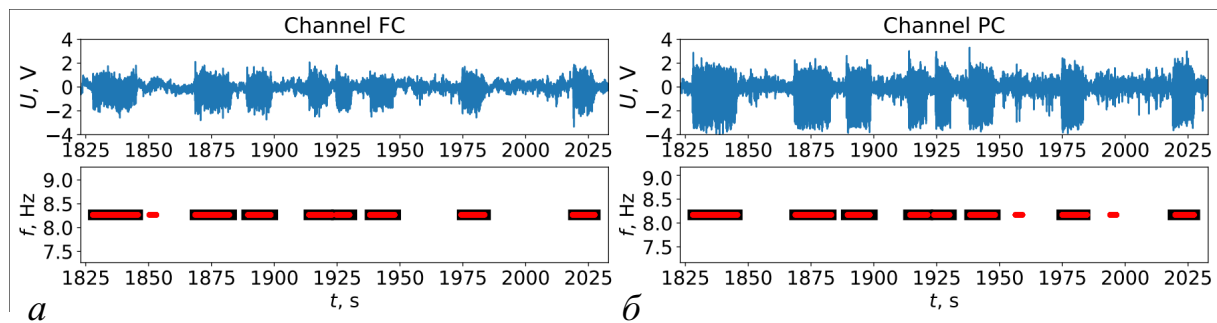


Рис. 1. Графики сигналов с лобного (а) и теменного (б) отведений. На них первый график сверху — временной ряд локальных потенциалов мозга, содержащий 8 эпилептических разрядов, идущих друг за другом, второй — частотно-временная структура данного отрезка сигнала после фильтрации. Чёрными линиями отмечены разряды в соответствии с разметкой энцефалографа, красными точками — моменты времени, когда разница приведённых частот двух гармоник была меньше или равна 1 Гц. По горизонтальной оси указано время в секундах, по вертикальной — частота в Гц

формируют сплошную линию без разрывов. Между разрядами отметки были эпизодическими и неупорядоченными, что может означать, что они случайны или краткосрочны. Для их исключения была проведена дополнительная фильтрация временных рядов.

Результат работы метода представлен на рис. 1. После фильтрации остались только те ряды моментов времени, когда данные частоты изменялись синхронно, что было свойственно для большинства исследуемых интервалов.

Оценка динамики эволюции частоты двух гармоник показала, что частоты в рассмотренных диапазонах прочно связаны во время разряда, то есть обладают синхронизацией. Во время фоновой динамики синхронность двух гармоник отсутствовала. Это свидетельствует о том, что пик-волновой разряд является нелинейным процессом.

Список литературы

1. Авакян Г. Н., Блинов Д. В., Лебедева А. В., Бурд С. Г., Авакян Г. Г. Классификация эпилепсии Международной противэпилептической лиги: пересмотр и обновление 2017 года. Классификация эпилепсии // Эпилепсия и пароксизмальные состояния. 2017. № 1. С. 6–25.
2. Van rijn C. M., Gaetani S., Santolini I., Badura A., Gabova A., Fu J., et al. WAG/Rij rats show a reduced expression of CB1 receptors in thalamic nuclei and respond to the CB1 receptor agonist, R(+)-WIN55,212-2, with a reduced incidence of spike-wave discharges // Epilepsia. 2010. Vol. 51, no. 8. P. 1511–1512.

**Кольцевой контур из осцилляторов ФитцХью–Нагумо,
как фундамент для радиотехнической модели
лимбической эпилепсии***

Н. М. Егоров^{1,2}✉, В. И. Пономаренко^{2,3}, И. В. Сысоев^{2,3}, М. В. Сысоева^{1,2}

¹Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю. А.

²Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН

³Саратовский национальный исследовательский государственный университет
имени Н. Г. Чернышевского

✉ egorov.n.m.omnis@gmail.com

В настоящее время знания закономерностях устройства головного мозга далеки от законченных точных во всех деталях представлений. Уже имеется ряд различных моделей, как самого мозга, так и отдельных его клеток, описывающие в разной степени достоверно динамику и поведение реальных нейронов или целых структур. В данной работе была разработана и реализована радиотехническая модель, свойства которой в будущем позволят воспроизводить поведение нейронных структур мозга в патологическом состоянии при приступе эпилепсии.

На первом этапе развития данной модели она представляет собой замкнутое кольцо из заданного числа элементов. В качестве элемента кольца выступает модель ФитцХью–Нагумо [1], представляющая собой безразмерный вариант модели Ходжкина–Хаксли [2]. Эффект передачи сигнала между нейронами через синапс осуществляется при помощи математической функции гиперболического тангенса со сдвигом и задержкой, таким образом система нейрон-синапс описывается следующим уравнениями:

$$\varepsilon \dot{u}_i(t) = u_i(t) - 0.33u_i^3(t) - v_i + \sum k_{ij}h(u_j(t - \tau)), \quad (1)$$

$$\dot{v}_i(t) = u_i(t) + a_i - b_iv_i(t), \quad (2)$$

$$h(u) = \frac{1 + \tanh(u)}{2}, \quad (3)$$

где u — безразмерная быстрая функция, соответствующая трансмембранному потенциалу; v — безразмерная медленная функция, аналогичная току восстановления; t — безразмерное время; ε — параметр релаксационности; a и b — безразмерные параметры, управляющие собственной динамикой нейрона, k — коэффициент силы связи.

*Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, проект № 19-72-10030.

Радиотехническая модель является таковой по той причине, что она строится по принципам аналоговой схемотехники. Каждый нейрон представляет собой схему генератора на операционных усилителях и аналоговых четырёхквadrантных умножителях. Отдельным модулем является аналог синапса, гиперболический тангенс реализован в виде транзисторного моста и дифференциального усилителя на выходе, а имитация задержки происходит фильтром Бесселя второго порядка с изменяемой частотой среза, данный фильтр был выбран за наиболее пологую характеристику группового времени запаздывания, однако стоит учитывать, что искажения в сигнал всё равно привносятся. В результате в симуляторе электрических цепей была разработана модель [3], состоящая из 25 нейронов, замкнутых в кольцо. В работе были получены частотные зависимости от количества нейронов и величины задержки сигнала в синапсе. Частотные зависимости спадают до определённого значения, после которого резким скачком возвращаются на максимальное значение частоты, после чего при дальнейшем увеличении задержки или числа нейронов продолжает снижаться, подобно операции остатка от деления. В данном случае всю цепочку нейронов можно представить линией задержки, а добавление каждого нейрона в кольцо, как увеличение задержки на определённую величину. На настоящий момент реализовано кольцо из 8 нейронов, замкнутых в кольцо, тем не менее уже при данном количестве наблюдается схожая динамика и поведение, что и в симуляторе цепей.

Список литературы

1. *FitzHugh R.* Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane // *Biophysical Journal*. 1961. Vol. 1. P. 445–466.
2. *Hodgkin A. L., Huxley A. F.* A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve // *The Journal of Physiology*. 1952. Vol. 117, no. 4. P. 500–544. DOI: 10.1113/jphysiol.1952.sp004764.
3. *Sysoeva M. V., Egorov N. M., Ponomarenko V. I., Sysoev I. V.* Ring generator of neuron-like activity with tunable frequency // *Izvestiya VUZ. Prikladnaya Nelineynaya*. 2023. Vol. 31, iss. 1. P. 103–120.

Разметка стадий быстрого и медленного сна с помощью рекуррентного анализа*

Е. П. Емельянова[✉], А. О. Сельский

Саратовский национальный исследовательский
государственный университет имени Н. Г. Чернышевского
[✉] meretari@yandex.ru

Различные заболевания часто оказываются связаны с расстройствами сна [1]. Для исследования качества сна часто используется полисомнография с последующим построением гипнограмм (разметки сна на стадии) [2]. Для профессиональных сомнологов разметка является весьма трудоемким процессом [3]. В настоящей работе представлен метод распознавания быстрых и медленных стадий сна на основе рекуррентного анализа [4].

Рекуррентный анализ нашел применение в широком диапазоне задач обработки сложных сигналов различной природы [4]. Сам алгоритм расчета отличается простотой. Рассмотрим сигнал $x(t)$, значения которого известны в моменты времени t_i , где $i = 1, \dots, n$. Для него можно построить рекуррентную матрицу по следующему правилу:

$$R_{ij} = \theta(\varepsilon - \|x(t_i) - x(t_j)\|), \quad (1)$$

где R_{ij} — элемент рекуррентной матрицы для сигнала x , t_i и t_j моменты времени t , ε — эмпирически определенное пороговое значение, обеспечивающее необходимую точность метода, θ — функция Хевисайда, которая принимает нулевое значение для отрицательных аргументов и единичное при неотрицательных.

Для оценки количества повторов в сигнале, используется рекуррентный показатель, являющийся суммой всех ненулевых значений рекуррентной матрицы, нормированной на ее размер. Такой показатель может быть рассчитан для каждого анализируемого сигнала x по всей длине временного ряда или по небольшому временному фрагменту. Из-за очень большого объема данных в сигналах полисомнографии рекуррентный показатель стоит рассчитывать для временных фрагментов равных 30 секундам, что соответствует 15000 точек в сигнале. Такой размер фрагмента был выбран неслучайно, так как полученная от специалистов гипнограмма оценивала стадии сна также на интервалах в 30 секунд.

*Работа поддержана Российским научным фондом, проект № 22-72-10061.

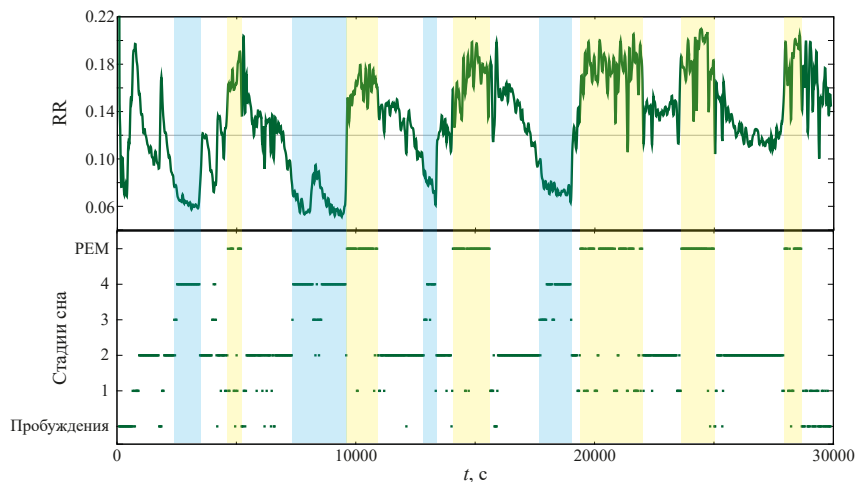


Рис. 1. Диаграмма изменения рекуррентного показателя от времени и гипнограмма для одного из испытуемых. Синим цветом отмечены стадии глубокого сна, желтым стадии быстрого сна

На рисунке 1 изображены зависимость от времени рекуррентного показателя и соответствующая гипнограмма одного из пациентов. Серым цветом на рисунке отмечена линия среднего за всю ночную запись рекуррентного показателя. Видно, что для стадии быстрого сна рекуррентный показатель возрастает, а для медленной уменьшается. Считая промежуточные значения рекуррентного показателя случаями стадий сна 1 и 2, можно различать фазы быстрого и медленного сна. Применение данного метода распознавания на условно здоровых испытуемых, пациентах с болезнью Паркинсона и пациентах с апноэ дали точность метода соответственно 72.46%, 67.81% и 77.902%.

Список литературы

1. Zhuravlev M., Runnova A., Smirnov K., Sitnikova E. Spike-Wave Seizures, NREM Sleep and Micro-Arousals in WAG/Rij Rats with Genetic Predisposition to Absence Epilepsy: Developmental Aspects // *Life*. 2022. Vol. 12, no. 4. 576.
2. Mullins A. E., Kam K., Parekh A., Bubu O. M., Osorio R. S., Varga, A. W. Obstructive Sleep Apnea and Its Treatment in Aging: Effects on Alzheimer's disease Biomarkers, Cognition, Brain Structure and Neurophysiology // *Neurobiology of disease*. 2020. Vol. 145. 105054.
3. Fell J., Roschke J., Mann K., Schaffner C. Discrimination of sleep stages: a comparison between spectral and nonlinear EEG measures // *Electroencephalography and clinical neurophysiology*. 1996. Vol. 98, no. 5. 401–410.
4. Acharya U. R., Sree S. V., Chattopadhyay S., Yu W., Ang P. C. Application of recurrence quantification analysis for the automated identification of epileptic EEG signals // *International journal of neural systems*. 2011. Vol. 21, no. 3. 199–211.

Анализ связности между полушариями мозга у крыс–фармакологических моделей абсансной эпилепсии с помощью функции взаимной информации*

*А. С. Ершова^{1,2}✉, А. А. Грищенко^{1,2}, Е. М. Сулейманова³,
Л. В. Виноградова³, И. В. Сысоев^{1,2}*

¹Саратовский национальный исследовательский

государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

²Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН

³Институт Высшей Нервной Деятельности и Нейрофизиологии РАН

✉ anshova2002@gmail.com

Функция взаимной информации (MI) является популярной мерой выявления связности биологических рядов. В данной работе она использовалась, чтобы выявить возможную асимметрию в связях в мозге крыс при генерализованных эпилептических приступах, вызванных пентилентетразола. Рассматривались всего девять животных. Разряды были поделены на симметричные и несимметричные, используя алгоритм автоматической разметки [1]. Цель работы — проверить гипотезу, что асимметрия в протекании разрядов вызвана различными изменением связанности в мозге.

Для расчёта функции взаимной информации существует несколько методов, в этой работе был применён подход, основанный на учёте ближайших соседей и предъявляющий наименьшие требования к объёму данных [2]. В связи с тем, что данный метод имеет большую вычислительную сложность, был использован алгоритм сортировки [3]. Анализировались результаты только для шести крыс из 9, представленных в [1]: №1, 3, 5, 7, 8 и 9, поскольку у них наблюдалось достаточно большое количество как симметричных, так и несимметричных разрядов.

Ранее отмечалось, что значение MI для фоновой динамики как правило значительно меньше, чем для разряда. Поскольку в случае несимметричных разрядов в одном из полушарий эпилептиформная динамика визуально не фиксировалась, было принято решение рассчитать значения функции взаимной информации для отрезков фона тех же животных. Результаты представлены в таблице 1. Значения для крысы под номером 1 неестественно высокие, что обусловлено наличием интериктальной эпилептической активности. В целом, полученные значения свидетельствуют о том, что для большинства животных фоновая динамика имеет значения MI значительно меньшие, чем во время разряда.

*Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда №19-72-10030-Р, <https://rscf.ru/project/19-72-10030/>.

Таблица 1. Среднее MI и доверительная вероятность p при тестировании на значимость в паре разряд/фон

№	MI _{mean}		p	
	разряд	фон	Манна–Уитни	Колмогорова–Смирнова
1	1.167	1.425	0.105	0.283
3	1.268	0.782	0.0002	$1.1 \cdot 10^{-5}$
5	1.206	0.714	$< 10^{-5}$	$< 10^{-5}$
7	1.101	0.687	$< 10^{-5}$	$< 10^{-5}$
8	1.118	0.883	0.0002	$9.8 \cdot 10^{-5}$
9	0.916	0.814	0.016	0.009

Таблица 2. Среднее MI и доверительная вероятность p при тестировании на значимость в паре симметричный/несимметричный разряд

№	MI _{mean}		p	
	симметричный	несимметричный	Манна–Уитни	Колмогорова–Смирнова
1	1.167	1.286	0.343	0.771
3	1.268	1.218	0.548	0.873
5	1.206	1.136	0.127	0.138
7	1.101	1.094	0.375	0.123
8	1.118	1.151	0.280	0.275

Результаты сопоставления средних значений MI для симметричных и несимметричных разрядов представлены в Таблице 2. Видно, что даже на уровне значимости $p = 0.05$ отличий нет. Это может означать как то, что функция взаимной информации недостаточно чувствительна, так и то, что в действительности уровень связанности не отличается и асимметрия в протекании разряда вызвана какими-то внутренними факторами данной области мозга.

Список литературы

1. Ершова А. С., Сулейманова Е. М., Грищенко А. А., Виноградова Л. В., Сысоев И. В. Межполушарная симметрия и асимметрия пик-волновых разрядов абсансного типа, вызванных системным введением пентилентетразола // Российский физиологический журнал им. И.М. Сеченова. Т. 109, № 2. С. 241–251.
2. Kraskov A., Stogbauer H., and Grassberger P. Estimating mutual information // Physical Review E. 2004. Vol. 69. P. 1–3.
3. Сысоев И. В. Сравнение численных реализаций алгоритма расчёта взаимной информации на основе учёта ближайших соседей. // Известия вузов. ПНД. 2016, Т. 24, № 4.

**Компенсаторные механизмы снижения
межполушарной синхронизации ЭЭГ активности
во время сна у пациентов с апноэ***

*М. О. Журавлев^{1,2}, М. В. Агальцов¹, А. Р. Киселев¹, М. А. Симонян^{2,3},
М. Ю. Новиков²✉, О. М. Драпкина¹, А. Е. Руннова^{1,3}*

¹Национальный медицинский исследовательский центр терапии и профилактической медицины

²Саратовский государственный медицинский университет имени В. И. Разумовского

³Саратовский национальный исследовательский
государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

✉ mynder@mail.ru

Исследование динамики электрической активности головного мозга у пациентов с нарушением сна, в частности с синдромом обструктивного апноэ (СОАС), является одной из задач современной медицины и нейронауки. Нейровизуализационные и функциональные исследования показывают, что головной мозг пациентов с СОАС характеризуется уменьшением объема серого вещества, нарушением целостности белого вещества и активности в покое [1, 2], а также устойчивыми изменениями нейрофизиологических коррелятов на электроэнцефалограммах (ЭЭГ) [3].

В настоящей работе мы анализировали динамику связанности ЭЭГ сигналов у пациентов с СОАС по сравнению со здоровыми людьми на основе полисомнографических записей 25 пациентов. Анализ проводился на основе полной записи ночного сна без деления на стадии с регистрацией 6 классических каналов ЭЭГ с расположением электродов по схеме 10/20.

В качестве математического аппарата для исследования динамики связанности различных пространственных зон регистрации ЭЭГ был использован метод вейвлетной бикогерентности, хорошо зарекомендовавший себя в подобных исследованиях [4, 5]. Анализ проводился для каждой пары из 6 каналов в 7 частотных диапазонах: Δf_1 [0, 5; 4, 5] Гц, Δf_2 [4; 8] Гц, Δf_3 [8; 12] Гц, Δf_4 [12; 14] Гц, Δf_5 [14; 20] Гц, Δf_6 [20; 30] Гц, Δf_7 [30; 40] Гц.

Проведенный анализ показал, что наблюдаемое при СОАС разрушение симметричных билатеральных связей сочетается с выборочным повышением уровня синхронизации внутрислошарных связей между

*Исследование проведено в рамках научной работы «Разработка алгоритмов распознавания маркеров нарушений дыхания во сне у пациентов с различными формами сердечно-сосудистой патологии», выполняемой в ФГБУ «НМИЦ ТПМ» Минздрава России в соответствии с государственным заданием Минздрава России на 2022–2024 гг.

ЭЭГ каналами, что можно расценивать как компенсаторный механизм, особенно выраженный в правом полушарии. При этом «перекрестная» динамика, связывающая разноименные отведения двух полушарий оказывается весьма сложной и меняется в различных диапазонах частот. В «коротких» связях (O1–C4, O2–C3) синхронизация у пациентов с СОАС снижена лишь на низких частотах, в то время как быстрые процессы у них напротив синхронизируются лучше; в связях (Fp1–C4, Fp2–C3) вне зависимости от частоты синхронизация у пациентов с СОАС снижена. В «длинных» связях (O1–Fp2, O2–Fp1) у пациентов с СОАС выявлено повышение синхронизации на высоких частотах.

Таким образом, наши результаты расширяют представления о падении уровня синхронизации симметричных межполушарных связей и компенсаторном росте внутрислошарных и перекрестных связей у пациентов с СОАС подробным анализом изменений уровней синхронизации «быстрых» и «медленных» процессов, присутствующих в фронтальных, центральных и затылочных каналах ЭЭГ.

Список литературы

1. *Kumar R., Chavez A. S., Macey P. M., Woo M. A., Yan-Go F. L., Harper R. M.* Altered global and regional brain mean diffusivity in patients with obstructive sleep apnea // *J. Neurosci. Res.* 2012. Vol. 90, no. 10. P. 2043–2052.
2. *Macey P. M., Kumar R., Woo M. A., Valladares E. M., Yan-Go F. L., Harper R. M.* Brain structural changes in obstructive sleep apnea // *Sleep.* 2008. Vol. 31, no. 7. P. 967–977.
3. *Kang J. M., Kim S. T., Mariani S., Cho S. E., Winkelman J. W., Park K. H., Kang S. G.* Difference in spectral power density of sleep EEG between patients with simple snoring and those with obstructive sleep apnoea // *Sci. Rep.* 2020. Vol. 10, no. 1. P. 6135.
4. *Schiecke K., Wacker M., Benninger F., Feucht M., Leistritz L., Witte H.* Matching pursuit-based time-variant bispectral analysis and its application to biomedical signals // *IEEE. Trans. Biomed. Eng.* 2015. Vol. 62, no. 8. P. 1937–1948.
5. *Makarov V. V., Zhuravlev M. O., Runnova A. E., Protasov P., Maksimenko V. A., Frolov N. S., Pisarchik A. N., Hramov A. E.* Betweenness centrality in multiplex brain network during mental task evaluation // *Phys. Rev. E.* 2018. Vol. 98, no 6. P. 062413.

Релейная модель замиряющего нейрона*

В. К. Зеленова

Региональный научно-образовательный математический центр «Центр интегрируемых систем»,
Ярославский государственный университет имени П. Г. Демидова

✉ verzelenowa12@gmail.com

В качестве модели одного нейрона рассматривается уравнение

$$\dot{R} = \lambda \left[\mathcal{F}(R(t-h)) + \mathcal{H}(X_*(t)) \right] R(t), \quad (1)$$

предложенное в статье [1]. Здесь $R(t)$ — нормированный мембранный потенциал, $\lambda > 0$ — скорость электрических процессов в нервной клетке, \mathcal{F} — пороговая функция, характеризующая внутреннее поведение нейрона

$$\mathcal{F}(u) = \begin{cases} 1, & 0 < u \leq 1, \\ -\alpha, & u > 1, \end{cases}$$

$$\mathcal{H}(u) = \begin{cases} -\eta, & 0 < u \leq \theta, \\ \xi, & u > \theta, \end{cases}$$

$X_*(t) = e^{\lambda x_*(t)}$, $x_*(t)$ — периодическая функция с периодом T_*

$$x_*(t) = \begin{cases} 0, & t = 0, \\ > 0, & 0 < t < t_*, \\ 0, & t = t_*, \\ < 0, & t_* < t < T_*, \end{cases}$$

$\eta, \xi, \alpha, \theta$ — положительные параметры, $h > 0$ — запаздывание.

Уравнение (1) — это модификация уравнения

$$\dot{u} = \lambda f(u(t-h))u, \quad (2)$$

предложенного в статье [2]. Здесь $u = u(t) \geq 0$, $\lambda \gg 1$, функция $f(x)$ бесконечно дифференцируема на полуоси $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ и такая, что $f(0) = 1$, $f(x) \rightarrow -\alpha$ при $x \rightarrow +\infty$. Данное уравнение лежит в основе ряда феноменологических нейромоделей.

*Работа выполнена в рамках реализации программы развития регионального научно-образовательного математического центра (ЯрГУ) при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (Соглашение о предоставлении из федерального бюджета субсидии № 075-02-2023-948).

В уравнении (1) сделаем экспоненциальную подстановку $R(t) = e^{\lambda r(t)}$. Получим релейное уравнение:

$$\begin{aligned} \dot{r} &= F(r(t-h)) + H(x_*(t)), \\ F(x) &= \mathcal{F}(e^{\lambda x}) = \begin{cases} 1, & x \leq 0, \\ -\alpha, & x > 0, \end{cases} \\ H(x) &= \mathcal{H}(e^{\lambda x}) = \begin{cases} -\eta, & x \leq 0, \\ \xi, & x > 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (3)$$

В настоящей работе получено обобщение результатов работы [1] и найдена более широкая область существования параметров. Доказано существование области параметров с плавным переходом от высоких всплесков к малым колебаниям.

Для уравнения (3) доказано существование решения: периодического с положительными и отрицательными значениями на периоде до некоторой точки, после чего значение функции убывает и с некоторого момента устанавливается периодическое решение с только отрицательными значениями.

Для уравнения (1) это эквивалентно существованию режимов специального вида: решений, обладающих любым наперед заданным количеством одинакового высоких всплесков, после которых происходит постепенное затухание всплесков и устанавливаются колебания с малой амплитудой.

Список литературы

1. *Preobrazhenskaia M. M.* Relay System of Differential Equations with Delay as a Perceptron Model. In: Kryzhanovsky, B., Dunin-Barkowski, W., Redko, V., Tiumentsev, Y. (eds) *Advances in Neural Computation, Machine Learning, and Cognitive Research VI. NEUROINFORMATICS 2022. Studies in Computational Intelligence*, vol. 1064. Springer, Cham, 2023.
2. *Колесов А. Ю., Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х.* Об одной модификации уравнения Хатчинсона // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2010. Т. 50, № 12. С. 2099–2112; *Comput. Math. Math. Phys.* 2010. Vol. 50, no. 12. P. 1990–2002.

Сетевая модель эпилептиформной активности с использованием модельных нейронов Моррис–Лекара*

А. А. Капустников^{1,2}✉, И. В. Сысоев^{1,2}, М. В. Сысоева^{1,3}

¹Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН

²Саратовский национальный исследовательский
государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

³Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю. А.

✉ anton.kapustnikov.02@mail.ru

На данный момент существует несколько подходов при моделировании абсансной эпилепсии, которые описывают начало и конец эпилептического приступа: инициация и завершение эпилептического разряда в результате бифуркационного перехода одного из параметров нейронов в сети [1]; возникновение и прекращение такого разряда в результате перехода системы от аттрактора, моделирующего нормальную активность, к аттрактору, моделирующему патологическую активность, и обратно [2]; моделирование эпилептиформной активности с использованием переходных процессов [3]. В данной работе представлен последний вариант, поскольку для моделирования абсансной эпилепсии он имеет ряд преимуществ по сравнению с остальными. Также здесь рассматривается полный класс математических моделей таламо-кортикальной сети, представленный ранее в [4].

Для модели отдельного узла было принято решение рассмотреть модель Моррис–Лекара (1) из [5] (упрощенную версию физиологически корректной модели Ходжкина–Хаксли), а функции связи между нейроциллаторами рассматривались двух видов: линейная и нелинейная (тангенциальная).

$$\begin{aligned}
 C \frac{du_i}{dt} &= I_{\text{ext}} - g_L(u_i - u_L) - \\
 &\quad - g_{Ca} M_\infty(u_i)(u_i - u_{Ca}) - \\
 &\quad - g_K n_i(u_i - u_K) + W_i(\mathbf{u}), \\
 \frac{dn_i}{dt} &= \frac{n_\infty(u_i) - n_i}{\tau_n(u_i)},
 \end{aligned} \tag{1}$$

где u_i обозначает мембранный потенциал в мВ, измеренный по потенциалу

*Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 19-72-10030-П, <https://rscf.ru/project/19-72-10030/>.

покоя; n — переменная активации калиевого канала; $W_i(\mathbf{u})$ — функция связи, где $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_D)$ вектор состояния из $D = 14$ скалярных переменных. Члены в правой части первого уравнения (1) определяют, соответственно, внешний ток, ток утечки, токи кальция и калия, протекающие через мембрану.

Функции $M_\infty(u_i)$, $n_\infty(u_i)$, $\tau_n(u_i)$ имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} M_\infty(u_i) &= 0.5 \left[1 + \tanh \left(\frac{u_i - v_1}{v_2} \right) \right], \\ n_\infty(u_i) &= 0.5 \left[1 + \tanh \left(\frac{u_i - v_3}{v_4} \right) \right], \\ \tau_n(u_i) &= \left[0.008 \cosh \left(\frac{u_i - v_3}{2v_4} \right) \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (2)$$

В результате данной работы было продемонстрировано:

- 1) возможность получения переходных процессов, за счет описанных ранее механизмов [3], на более сложной модели нейроосциллятора;
- 2) возможность получения переходных процессов определенной длины на одних и тех же таламо-кортикальных сетях-представителях класса вне зависимости от вида связи нейроосцилляторов;
- 3) относительная простота получения переходных процессов в ответ на внешний стимул.

Список литературы

1. *Velazquez J. L. P., Cortez M. A., Snead O. C., Wennberg R. A.* Dynamical regimes underlying epileptiform events: role of instabilities and bifurcations in brain activity // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 2003. Vol. 186, no. 3. P. 205–220.
2. *Suffczynski P., Kalitzin S., F. Lopes Da Silva.* Dynamics of non-convulsive epileptic phenomena modeled by a bistable neuronal network, *Neuroscience*. 2004. Vol. 126. P. 467–484.
3. *Kapustnikov A. A., Sysoeva M. V., Sysoev I. V.* Modeling Spike–Wave Discharges in the Brain with Small Neurooscillator Networks // *Mathematical Biology and Bioinformatics*. 2020. P. 139–146.
4. *Kapustnikov A. A., Sysoeva M. V., Sysoev I. V.* Transient dynamics in a class of mathematical models of epileptic seizures // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2022. Vol. 109. 106284.
5. *Morris C., Lecar H.* Voltage oscillations in the barnacle giant muscle fiber // *Biophys. J.* 1981. Vol. 35, no. 1. P. 193–213.

Гибкая модель рабочей памяти нейронной сети с двумя типами пластичности*

Н. С. Ковалева[✉], М. А. Мищенко, В. В. Матросов

Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского

✉ nat.azh29@yandex.ru

Рабочая память позволяет временно хранить информацию для обработки целей, играя ключевую роль в выполнении широкого спектра когнитивных задач. В парадигме с отсроченным ответом, кратко представляемый стимул животному должен сохраняться в течение нескольких секунд до выполнения задачи. Усиленная, стимульно-специфическая импульсная активность наблюдается в течение этого периода задержки и считается нейрональным коррелятом рабочей памяти [1].

Большинство моделей рабочей памяти не учитывают гибкость и содержат заранее сформированные содержательно-специфические структуры нейронов для загрузки в память конкретных объектов. Гибкость позволяет рабочей памяти поддерживать любые входные данные, а связи между нейронами не настраиваются заранее по отношению к хранимому объекту. Объект сохраняется за счет формирования пространственно-временных структур или кластеров нейронной активности, которые формируются за счет коллективной динамики взаимодействующих нейронов.

В синаптической теории рабочей памяти предполагается, что образ поддерживается рабочей памятью за счет кратковременного усиления связей внутри нейронной сети, активированной стимулом. Усиление связей вызвано повышенным уровнем остаточного кальция в пресинаптических терминалях нейронов, которые кодируют этот элемент. При этом, запоминаемые элементы сохраняются в виде кратковременных потенцированных связей в выборочной популяции нейронов [1–3].

В данной работе показано, что такие популяции могут формироваться за счет механизмов пластичности, зависящей от времени спайка (STDP) — фазовой зависимости, связанной с соотношением времен импульсов взаимодействующих нейронов [4, 5]. Предложена гибкая модель рабочей памяти, учитывающая два типа пластичности: краткосрочную пластичность и STDP. Продемонстрировано, что кластеры нейронов, кодирующие элементы в синаптической модели рабочей памяти, могут формироваться

*Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект № FSWR-2023-0031)

за счет внешней стимуляции группы нейронов и механизмов STDP. После загрузки в память образы удерживаются и реактивируются за счет механизмов кратковременной пластичности. Таким образом, предложенная модель рабочей памяти может поддерживать любой входной объект благодаря механизму STDP.

Проведено математическое моделирование импульсной нейронной сети, динамика которой демонстрирует эффекты предложенной гибкой модели рабочей памяти. Сеть состоит из возбуждающих и тормозных нейронов-пороговых интеграторов, связанных случайным образом. Все элементы сети находятся в возбуждимом режиме. Связи между нейронами описаны феноменологическими моделями кратковременной пластичности и STDP.

Список литературы

1. *Mongillo G., Barak O., Tsodyks M.* Synaptic Theory of Working Memory // *Science*. 2008. Vol. 319, no. 5869. P. 1543–1546.
2. *Mi Y., Katkov M., Tsodyks M.* Synaptic Correlates of Working Memory Capacity // *Neuron*. 2017. Vol. 93, no. 2. P. 323–330.
3. *Ковалева Н. С., Матросов В. В., Мищенко М. А.* Емкость рабочей памяти: роль параметров импульсной нейронной сети // *Известия вузов. ПНД*. 2023. Т. 31, № 1. С. 86–102.
4. *Gerstner W., Kempter R., Van Hemmen J. L., Wagner H.* A neuronal learning rule for sub-millisecond temporal coding // *Nature*. 1996. Vol. 383. P. 76–78.
5. *Kempter R., Gerstner W., Van Hemmen J. L.* Hebbian learning and spiking neurons // *Physical Review E*. 1999. Vol. 59, no. 4. P. 4498–4514.

Динамика направленной межполушарной связанности в мозге крыс после прохождения волны распространяющейся депрессии*

*Д. А. Лачинова^{1,2}✉, И. В. Сысоев^{1,2},
Е. М. Сулейманова¹, Л. В. Виноградова¹*

¹Институт высшей нервной деятельности и нейрофизиологии РАН

²Саратовский национальный исследовательский
государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

✉ lachinova-dasha@yandex.ru

Реакция нервной ткани в виде кратковременной обратимой самораспространяющейся интенсивной клеточной деполяризации называется распространяющейся депрессией (РД) [1]. В период после острого повреждения головного мозга (инсульт, черепно-мозговая травма) может возникать волна РД. Амплитуда волны РД отражает число нейронов, участвующих в деполяризации, а её длительность — скорость реполяризации клеточных мембран. При фокальном возникновении РД распространяется относительно медленно (2–6 мм/мин) по серому веществу мозга.

Электрофизиологический эксперимент для определения изменения в связанности между двумя полушариями в кортико-лимбической системе (неокортексе) головного мозга крыс проводился на взрослых крысах-самцах линии Wistar. За две недели до начала эксперимента крысам были имплантированы электроды для регистрации электрокортикограммы (ЭКоГ) и направляющие канюли для проведения фокального микроповреждения нервной ткани.

В нашем распоряжении имелись записи ЭКоГ, полученные в условиях свободного поведения у восьми бодрствующих крыс (по одной записи от каждого животного). Появление РД в областях регистрации определялось по характерным медленным сдвигам внеклеточного потенциала.

Анализировались 600-секундные эпохи записи ЭКоГ фронтальной коры обоих полушарий до и после одностороннего повреждения. Записи ректифицировались методом скользящего среднего, удалялись низкочастотные тренды, подвергались полосовой фильтрации (50 Гц). Сегменты были разделены на 20-секундные неперекрывающиеся последовательные интервалы. Для каждого интервала были вычислены: мера похожести — функция взаимной информации по методу, предложенному в [2], энтропия переноса — функция для определения направленной связанности [3].

*Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-15-00327, <https://rscf.ru/project/22-15-00327/>.

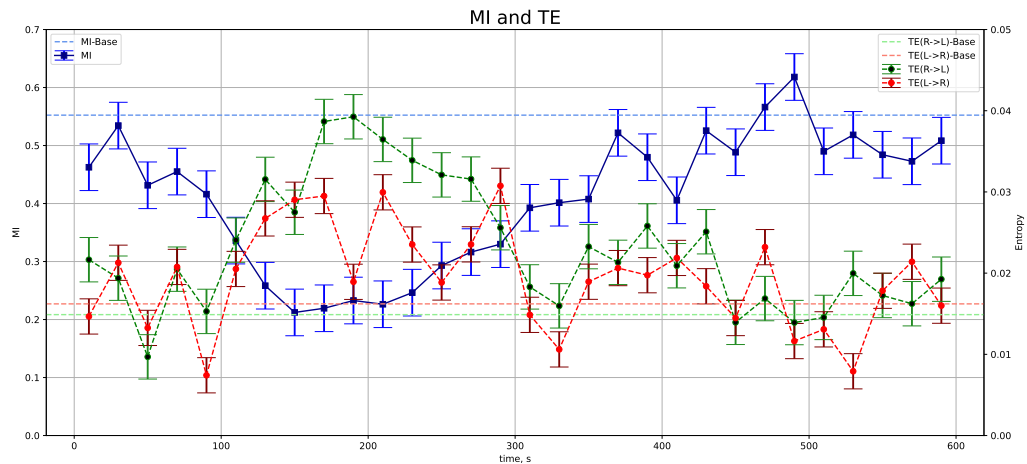


Рис. 1. Усредненные значения функции взаимной информации (MI) и двунаправленной энтропии (TE) с планками погрешностей для 8 животных, посчитанные для прокола. Пунктирными горизонтальными линиями изображены усредненные значения, соответствующие фону представленных мер

Анализ межполушарной функциональной связности в сигнале в целом с использованием функции взаимной информации (нелинейная, частотно неразрешённая мера ненаправленного взаимодействия) показал значительное изменение межполушарной связности после возникновения РД (рис. 1). Оказалось, что после возвращения прежней мощности корковых осцилляций односторонняя волна РД вызывает существенное (в 2–5 раз) уменьшение функционального сходства сигналов, в то время как энтропия достигает своего максимального значения. Минимум взаимной информации достигается после прохождения РД волны, в среднем через 100 секунд после начала снижения. Восстановление связности до фонового уровня занимает ещё 100–200 с.

Список литературы

1. Vinogradova L. V., Suleymanova E. M., Medvedeva T. M. Transient loss of inter-hemispheric functional connectivity following unilateral cortical spreading depression in awake rats // *Cephalalgia*. 2021. Vol. 41, no. 3. P. 353–365.
2. Kraskov A., Stogbauer H., Grassberger P. Estimating mutual information // *Physical Rev. E*. 2004. Vol. 69. P. 66138.
3. Lindner M., Vicente R., Priesemann V., Wibral M. TRENTOOL: A Matlab open source toolbox to analyse information flow in time series data with transfer entropy // *BMC Neuroscience*. 2011. Vol. 12. P. 119.

Синхронизация в нейрон-астроцитарных ансамблях гиппокампа*

С. Ю. Маковкин¹✉, М. В. Иванченко¹, С. Ю. Гордлеева^{1,2}

¹Национальный исследовательский

Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского

²Балтийский федеральный университет имени Иммануила Канта

✉ makovkin@neuro.nnov.ru

В результате исследования влияния астроцит-опосредованной модуляции синаптической передачи на формирование локальной и глобальной синхронизации в нейронной сети была разработана модель нейронной сети с учетом нейрон-астроцитарного взаимодействия, на основе упрощенного феноменологического подхода астроцитарной регуляции синаптической передачи [1]. Для исследования влияния астроцитов на синхронизацию в нейронной сети в качестве основы была выбрана биологически-обоснованная модель ансамбля тормозных нейронов, демонстрирующего когерентные колебания сетевой активности на частоте 20 Гц, что соответствует нижней границы гамма ритма [2]. Разработанная модель нейрон-астроцитарной сети состоит из двух взаимодействующих между собой нейронной и астроцитарной сети, топологически представляющих собой кольца из 200-та элементов каждая. Нейронная сеть состоит из нейронов Ходжкина–Хаксли случайно синаптически связанных со своими 100 ближайшими соседями с вероятностью 0.5. Синаптическая связь рассматривается химическая, тормозная. Архитектура нейронной сети была выбрана в соответствии с результатами анатомического анализа функциональных связей между тормозными нейронами в области СА1 гиппокампа [3]. В качестве модели для описания динамики мембранного потенциала была выбрана более биологически релевантная модель Ходжкина–Хаксли с модификацией Майнана для нейронов млекопитающих [4]. Каждый нейрон в сети находится под воздействием возбуждающего постсинаптического тока, поступающего от пирамидальных нейронов, активность которых в свою очередь индуцируется случайным Пуассоновским процессом с заданной средней частотой. Генерация потенциалов действия пирамидальными нейронами также описывается с помощью модели Ходжкина–Хаксли.

Астроциты образуют сеть за счет диффузионной связи со своими двумя ближайшими соседями. Динамика внутриклеточной концентрации кальция в астроцитах описывается с помощью биофизической модели

*Работа поддержана Российским научным фондом, грант № 22-12-00216.

Уллаха [5]. Рассматривались два типа астроцитарной модуляции синаптической передачи: (i) модуляция тормозной синаптической передачи в нейронной сети и (ii) модуляция возбуждающей синаптической передачи от пирамидальных нейронов к тормозным нейронам.

Было исследовано, как синхронизация в сети тормозных нейронов может регулироваться влиянием астроцитов (i) на тормозную передачу в сети тормозных нейронов и (ii) на возбуждающие синаптические входы от пирамидальных нейронов к тормозным.

Численные эксперименты проводились на суперкомпьютерах Лобачевский (Нижегородский университет), Ломоносов (Московский государственный университет) и МВС-10П (Объединенный суперкомпьютерный центр РАН).

Исследование проводилось в рамках научной программы Национального физико-математического центра (проект «Искусственный интеллект и большие данные в технических, промышленных, природных и социальных системах»).

Список литературы

1. *Gordleeva S. Y., Stasenko S. V., Semyanov A. V., Dityatev A. E., & Kazantsev V. B.* Bi-directional astrocytic regulation of neuronal activity within a network // *Frontiers in computational neuroscience*. 2012, 6, 92.
2. *Bartos M., Vida I., Frotscher M., Meyer A., Monyer H., Geiger J. R., & Jonas P.* Fast synaptic inhibition promotes synchronized gamma oscillations in hippocampal interneuron networks // *Proceedings of the National Academy of Sciences*. 2002. Vol. 99, no. 20. P. 13222–13227.
3. *Pawelzik H., Hughes D. I., & Thomson A. M.* Physiological and morphological diversity of immunocytochemically defined parvalbumin- and cholecystokinin-positive interneurons in CA1 of the adult rat hippocampus // *Journal of Comparative Neurology*. 2002. Vol. 443, no. 4. P. 346–367.
4. *Mainen Z. F., Joerges J., Huguenard J. R., & Sejnowski T. J.* A model of spike initiation in neocortical pyramidal neurons // *Neuron*. 1995. Vol. 15, no. 6. P. 1427–1439.
5. *Ullah G., Jung P., & Cornell-Bell A. H.* Anti-phase calcium oscillations in astrocytes via inositol (1, 4, 5)-trisphosphate regeneration // *Cell calcium*. 2006. Vol. 39, no. 3. P. 197–208.

Оптимизация биоморфной системы визуальной навигации

Ю. А. Малышев¹✉, В. Г. Яхно^{1,2}

¹Национальный исследовательский университет им. Н. И. Лобачевского

²ФИЦ Институт прикладной физики РАН им. А. В. Гапонова-Грехова

✉ smmalisheva@gmail.com

Цель настоящей работы состоит в создании модифицированной программно-аппаратной системы визуальной навигации окружающего пространства и построения карты (Simultaneous Localization And Mapping, SLAM). Были реализованы и отлажены алгоритмы, в том числе и биоморфные, позволяющие определять текущее местоположение системы в пространстве относительно окружения. Данные алгоритмы принимают на вход информацию, получаемую от различных сенсоров, установленных на системе (изображение, скорость, ускорение и т. д.), а на выходе выдают оценку местоположения на карте окружающего пространства. В работе рассматриваются модификации двух вариантов системы, работающие со входными данными в виде последовательности изображений: RatSLAM [1, 2] и Orb-SLAM2 [3, 4], имеющие несколько различающиеся схемы выполняемых операций. Система RatSLAM является биорелевантной моделью визуальной навигации, основанной на данных о процессах в гиппокампе грызунов. Для интеграции пути используются сети клеток позы — слои аттракторных нейронных сетей, функционально подобных сетям решетчатых нейронов и нейронов направления головы в мозге грызунов. Данные сети организованы в виде куба, координаты точек которого соответствуют двум координатам (x, y) в плоскости передвижения и углу ориентации. Текущему местоположению соответствует группа наиболее активных в данный момент клеток позы. Замыкание циклов выполняется путем создания коллекции локальных видов — изображений, «привязанных» к точкам пространства, в которых они были получены, при помощи возбуждающих связей с сетью клеток позы. В случае, если полученное изображение похоже на одно из изображений из коллекции, возбуждающая связь активирует группу клеток позы, связанную с данным изображением. Система RatSLAM принимает на вход информацию от внешнего модуля одометрии, оценивающего движения субъекта по изменению профиля интенсивности изображения, из-за чего, по-видимому, точность одометрической информации оказывается не очень высокой. Однако нейронная фильтрация системы, строящая гипотезы о местоположении путем накоп-

ления данных, позволяет ей функционировать даже при неоднозначности внешних сигналов. Система Orb-SLAM2 представляет из себя техническую систему одновременного определения местоположения и составления карты, работающую по принципу выделения и отслеживания изменений положения особых точек на изображении [3, 4]. В этой системе одометрическая информация получается путем вычисления изменений положения точки наблюдения между ближайшими по времени изображениями, приводящая к наблюдаемому изменению положения особых точек. Интеграция пути выполняется путем суммирования одометрической информации, а замыкание цикла происходит при наличии на наблюдаемом изображении определенных особых точек в положении, соответствующем предыдущему местоположению. Система Orb-SLAM2 имеет точность одометрии выше, чем модуль визуальной одометрии в RatSLAM, что связано с субпиксельной точностью определения особых точек. Была также проверена работоспособность новой системы визуальной навигации, в которой модуль визуальной одометрии использовал алгоритмы Orb-SLAM2, а модуль интеграции пути и замыкания циклов был реализован на основе алгоритмов RatSLAM. Это позволило сочетать точность локализации систем, работающих по принципу отслеживания особых точек, и преимущества нейроноподобной фильтрации. Для проверки работоспособности систем привлекались данные из интернет-ресурсов (KITTI) и вновь полученные данные. Для этого использовались метрики несоответствия траекторий. Были рассмотрены некоторые варианты управления параметрами системы для оптимизации выполняемых операций.

Список литературы

1. *Milford M. J., Wyeth G. F., Prasser D.* RatSLAM: a hippocampal model for simultaneous localization and mapping // IEEE International Conference on Robotics and Automation, 2004. Proceedings. ICRA '04. 2004, New Orleans, LA, USA, pp. 403-408 Vol.1
2. *Ball D., Heath S., Wiles J., Wyeth G., Corke P., Milford M.* OpenRatSLAM: an open source brain-based SLAM system // Autonomous Robots. 2013. Vol. 34, no. 3. P. 149–176.
3. *Mur-Artal R., Montiel J. M. M., Tardós J. D.* ORB-SLAM: A Versatile and Accurate Monocular SLAM System // IEEE Transactions on Robotics. 2015. Vol. 31, no. 5. P. 1147–1163.
4. *Mur-Artal R., Tardós J. D.* ORB-SLAM2: an Open-Source SLAM System for Monocular, Stereo and RGB-D Cameras // IEEE Transactions on Robotics. 2017. Vol. 33, no. 5. P. 1255–1262.

Локальная динамика уравнения второго порядка с запаздыванием в производной*

И. Н. Маслеников

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова

✉ igor.maslenikov16@yandex.ru

Рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка с запаздывающей обратной связью:

$$\varepsilon \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + \delta y = F \left(\frac{dy}{dt}(t - \tau) \right). \quad (1)$$

здесь ε и δ — малые и пропорциональные параметры $0 < \varepsilon \ll 1$, $\delta = k\varepsilon$, τ — параметр запаздывания, вещественный и положительный. Функция F достаточно гладкая, не ограничивая общности можно считать, что $F(0) = 0$. Таким образом, уравнение (1) имеет нулевое состояние равновесия. Изучим локальную динамику вблизи состояния равновесия в фазовом пространстве $C_{[-1,0]}^1$. Отметим, что рассматриваемая задача является сингулярно возмущенной.

Характеристический квазиполином линеаризованной в нуле уравнения (1) имеет вид:

$$\varepsilon \lambda^2 + \lambda + k\varepsilon = \lambda \beta_1 e^{-\lambda}. \quad (2)$$

Показано, что при $|\beta_1| < 1$ нулевое состояние равновесия устойчиво, а при $|\beta_1| > 1$ — неустойчиво. В критических случаях $\beta_1 = \pm 1$ характеристическое уравнение имеет бесконечное количество корней, стремящихся к мнимой оси при $\varepsilon \rightarrow 0$. Таким образом критические случаи имеют бесконечную размерность.

Для исследования поведения решений в случае $\beta_1 = \pm 1$ построены квазинормальные формы — специальные нелинейные уравнения параболического типа, не содержащие малых параметров, решения которых дают главную часть асимптотических по невязке равномерно по $t \geq 0$ решений уравнения (1).

*Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 21-71-30011, <https://rscf.ru/project/21-71-30011/>.

При исследовании поведения решения при β_1 близком к -1 , решение задачи (1) в рассматриваемом случае сводится к уравнению в частных производных (3) с краевыми условиями (4):

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - \frac{k^2}{2} J(J(\xi)) + (k + \beta)\xi - (2\beta_2^2 + 3\beta_3)\xi \int_0^1 \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 dt, \quad (3)$$

$$\xi(t + 1, \tau) = -\xi(t, \tau). \quad (4)$$

Здесь $J(X)$ обозначает первообразную по времени t функцию $X = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi(2n+1)it} X_n$ с нулевым средним значением:

$$J(X(t)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{\pi(2n+1)it} X_n}{\pi(2n+1)i}, \quad \frac{dJ(X(t))}{dt} = X.$$

Задача (3), (4) является аналогом нормальной формы. Его решение определяет основные свойства асимптотической аппроксимации для решения (1). Отметим, что коэффициенты краевой задачи (3), (4) не зависят от малого параметра ε .

Теорема 1. Пусть $\xi_*(t, \tau) = \sum_n e^{\pi(2n+1)it} \xi_n(\tau)$ периодическое решение уравнения (3) с краевыми условиями (4). Тогда существуют такие периодические по t и почти периодические по s функции $U_1(t, s, \tau)$ и $U_2(t, s, \tau)$, такие что

$$y_*(t) = \varepsilon \sum_n e^{(\pi(2n+1)i + \varepsilon \lambda_{n1} + \varepsilon^2 \text{Im} \lambda_{n2})t} \xi_n(\varepsilon^2 t) + \varepsilon \frac{\beta_2}{k} \sum_n \pi^2 (2n+1)^2 \xi_n^2(\varepsilon^2 t) + \\ + \varepsilon^2 U_1(t, \varepsilon t, \varepsilon^2 t) + \varepsilon^3 U_2(t, \varepsilon t, \varepsilon^2 t),$$

является асимптотическим по невязке с точностью $O(\varepsilon^4)$ равномерно по $t \geq 0$ решением (1).

Математическая модель для выявления эпилептических приступов на записи ЭЭГ*

С. И. Назариков

Балтийский федеральный университет имени Иммануила Канта

✉ snazarikov@gmail.com

Эпилепсия — это хроническое неврологическое расстройство, проявляющееся в форме повторяющихся приступов, вызванных аномальной активностью нейронов в мозге. По состоянию на 2016 год более 50 миллионов человек по всему миру страдало эпилепсией [1], однако стоит отметить, что при своевременном выявлении и надлежащем лечении до 70% пациентов могут избавиться от приступов [2, 3].

Электроэнцефалограмма (ЭЭГ) — основной инструмент для выявления эпилептических приступов. Наиболее распространенным подходом к анализу ЭЭГ является визуальный анализ, который проводится врачом-неврологом. Данный подход является трудоемким и дорогостоящим процессом т. к. специалисту необходимо проанализировать огромный объем данных [4]. Поэтому, наличие автоматизированного инструмента для выявления эпилептических приступов могло бы ускорить процесс скрининга и освободить врача от кропотливой работы.

В работе используются данные предоставленные Национальным медико-хирургическим центром имени Н. И. Пирогова. Набор данных включает анонимизированные данные 83 пациентов собранные в период с 2017 по 2019 год. У каждого пациента за время наблюдения было зафиксировано от одного до пяти эпилептических приступов. Сигналы ЭЭГ регистрировали с частотой дискретизации 128 Гц по 25 каналам согласно международной системе 10–20.

Анализ сигналов выполнялся при помощи непрерывного вейвлет-преобразования [5, 6]. В качестве базисных функций были взяты Морле вейвлеты и рассматривалась мощность полученного спектра в диапазоне частот 1–40 Гц:

$$W_n(n, t) = |w_n(f, t)|, \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad (1)$$

где N — количество каналов в ЭЭГ записи, f — частота, t — время,

*Работа поддержана программой «Приоритет-2030» Балтийского федерального университета имени Иммануила Канта Министерства образования и науки РФ. Также выражаю благодарность А. Е. Храмову и С. А. Куркину за помощь в получении доступа к данным и проведении экспериментов.

$w_n(f, t)$ — коэффициенты вейвлет преобразования. Выявление эпилептических приступов на записи ЭЭГ было сведено к задаче классификации непересекающихся 10 секундных отрезков ЭЭГ записи после вейвлет-преобразования.

В качестве математической модели была выбрана нейронная сеть архитектуры ResNet-18 [7]. Для улучшения результатов работы сети использовались техники аугментации и подход MixUp [8]. Обучение сети проводилось на данных 34 пациентов, тестирование на данных 45 пациентов и 4 записи были исключены из рассмотрения т.к. в них были выявлены недочеты. После получения предсказаний сети было замечено большое количество ложно положительных срабатываний сети лишь на одном последовательном отрезке в 10 секунд. Учитывая то, что средняя продолжительность приступа во всем наборе данных составляет 112 секунд, было решено применить к полученным предсказаниям медианную фильтрацию с размером ядра $k = 7$.

Для оценки качества работы модели использовались стандартные метрики качества в задаче классификации — $precision(P)$, $recall(R)$ и F_1 . Средние значения метрик на тестовом множестве для предложенной модели представлены в Таблице.

$$P = \frac{TP}{TP + FP}, \quad R = \frac{TP}{TP + FN}, \quad F_1 = \frac{2PR}{P + R}, \quad (2)$$

Таблица 1. Результаты классификации

Модель	$precision$	$recall$	F_1
ResNet-18	0.1903	0.7199	0.2495
ResNet-18 медиан. фильтр. $k = 7$	0.4196	0.7308	0.4382

Исходя из результатов, представленных в Таблице, видно, что предложенная модель неплохо справляется с выявлением отрезков, содержащих приступ, но в то же время присутствуют сложности с ложно положительными срабатываниями, что объясняется сложностью исходного сигнала — большой вариативностью как в рамках записи одного пациента, так и между записями нескольких пациентов. Однако стоит отметить, что среди всех приступов всех пациентов модель отметила как минимум один отрезок как эпилептический, а значит, при просмотре врачом таких «подозрительных» отрезков ни один приступ не будет упущен, что является ключевым критерием применимости модели в качестве системы поддержки принятия врачебных решений (СППВР). Общее улучшение качества работы

и, в частности, уменьшение числа ложно положительных срабатываний будут основными направлениями дальнейших исследований.

Список литературы

1. *Megiddo, Colson A, Chisholm D, Dua T, Nandi A, and Laxminarayan R.* Health and economic benefits of public financing of epilepsy treatment in india: An agent-based simulation model // *Epilepsia Official Journal of the International League Against Epilepsy.* 2016. 055502.
2. *Sander J.W.* The use of antiepileptic drugs-principles and practice // *Epilepsia.* 2004. Vol. 45. P. 28–34.
3. *Ghosh S., Sinha J.K., T. Khan, K.S. Devaraju, P. Singh, K. Vaibhav, P. Gaur* Pharmacological and therapeutic approaches in the treatment of epilepsy // *Biomedicines.* 2021. Vol. 9, no. 5. P. 470.
4. *Tatum W. O., Mani J., Jin K., Halford J. J., Gloss, D., Fahoum, F., Maillard, L., Mothersill, I., Beniczky, S.* Minimum standards for inpatient long-term video-EEG monitoring: A clinical practice guideline of the International League Against Epilepsy and International Federation of Clinical Neurophysiology // *Clinical Neurophysiology.* 2022. Vol. 134. P. 111–128.
5. *A.Grossmann, J.F.Morlet* Decomposition of Hardy Functions into Square Integrable Wavelets Constant Shape // *J. Math. Anal.* 1984. Vol. 15. P. 723–736.
6. *Hramov A. E., Koronovskii A. A., Makarov V.A., Maximenko V. A., Pavlov A. N., Sitnikova E.* Wavelets in Neuroscience // Springer. 2021.
7. *He K., Zhang X., Ren S., Sun J.* Deep residual learning for image recognition // *IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, CVPR,* 2016.
8. *Hongyi Zhang, Moustapha Cissé, Yann N. Dauphin, David Lopez-Paz* mixup: Beyond Empirical Risk Minimization // *The International Conference on Learning Representations, ICLR (Poster)* 2018.

Динамика редуцированной среднеполевой модели нейрон-глиального взаимодействия*

С. М. Оленин, Т. А. Леванова[✉], С. В. Стасенко[✉]

Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, Россия

✉ tatiana.levanova@itmm.unn.ru, ✉ stasenko@neuro.nnov.ru

Исследование синхронизации популяционной активности в мозге является одним из ключевых направлений современной нейробиологии. При создании соответствующих математических моделей важно учитывать астроцитарную модуляцию популяционной активности [1].

В данной работе мы предлагаем новую феноменологическую модель, которая описывает популяционную активность группы нейронов. Предлагаемая модель основана на модели Цодыкса–Маркрама [2] и учитывает особенности нейрон-астроцитарного взаимодействия через трехчастный синапс. Модель является упрощением ранее предложенной модели [3] и имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \tau \dot{E} = -E + \alpha \ln \left(1 + \exp \frac{Ju(Y)xE + I_0}{\alpha} \right), \\ \dot{x} = \frac{1-x}{\tau_D} - u(Y)xE, \\ \dot{y} = \frac{-y}{\tau_Y} + \beta \sigma_y(X). \end{cases} \quad (1)$$

Здесь $E(t)$ — средняя нейронная активность возбуждающей популяции. Переменная $x(t)$ моделирует количество доступного нейротрансмиттера, а $y(t)$ описывает концентрацию глиотрансмиттера, высвобождаемого в результате биохимических реакций при нейрон-астроцитарном взаимодействии. Изменение вероятности высвобождения нейротрансмиттера в присутствии глиотрансмиттера описывается функцией:

$$u(y) = u_0 + \frac{\Delta u_0}{1 + \exp -50(y - y_{thr})}. \quad (2)$$

Здесь u_0 — вероятность высвобождения нейротрансмиттера в отсутствие астроцитарного влияния; Δu_0 — изменение вероятности высвобождения за счет действия глиотрансмиттера на пресинаптическую терминаль, y_{thr} — пороговое значение, определяющее изменение вероятности высвобождения нейротрансмиттера за счет воздействия глиотрансмиттера. Влияние

*Работа поддержана РНФ, грант № 19-72-10128.

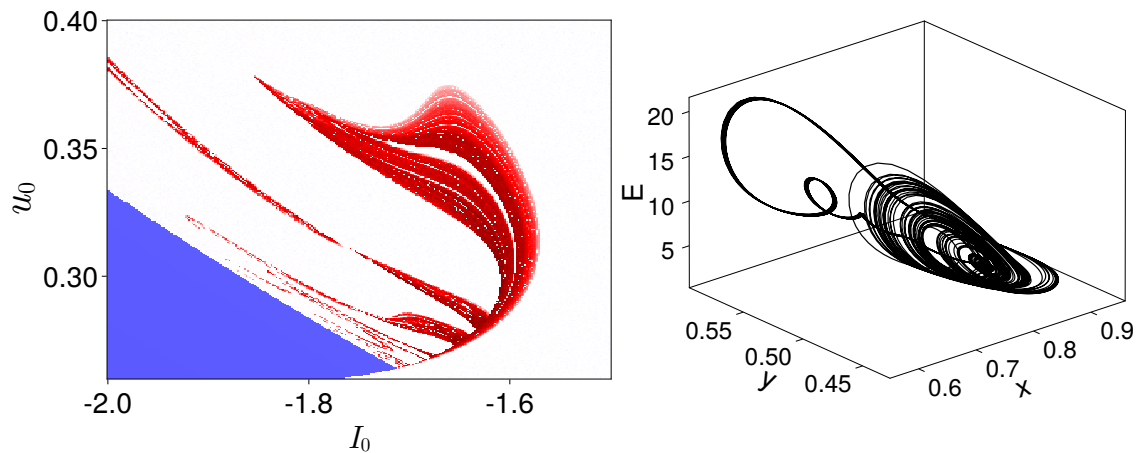


Рис. 1. Карта старшего Ляпуновского показателя Λ на плоскости параметров (I_0, u_0) , $I_0 \in [-1.5; -2.0]$, $u_0 \in [0.4; 0.26]$. Красным маркером отмечены области, где $\Lambda > 0$, белым маркером — области $\Lambda = 0$, синим маркером — области $\Lambda < 0$

нейротрансмиттера на концентрацию глиотрансмиттера описывается функцией:

$$\sigma_y(x) = \frac{1}{1 + e^{-20(x-x_{thr})}}, \quad (3)$$

где x_{thr} — порог активации астроцитов.

В данной работе в качестве управляющих параметров были выбраны параметры I_0 и u_0 . Значения остальных параметров были зафиксированы следующим образом: $\tau = 0.013$, $\tau_D = 0.08$, $\alpha = 1.58$, $J = 3.07$. Параметры изменения концентрации нейротрансмиттера и глиотрансмиттера: $\Delta u_0 = 0.305$, $\tau_y = 3.3$, $\beta = 0.3$, $x_{thr} = 0.75$, $y_{thr} = 0.4$.

В работе изучены сценарии возникновения сложных паттернов популяционной активности. Показано, что в зависимости от значений управляющих параметров в системе могут наблюдаться различные сложные паттерны популяционной активности, в том числе спайковые, пачечные и хаотические. Показано, что возникновение хаотической активности в системе может быть связано как со сценарием удвоения периода, так и с дальнейшим развитием хаоса, в результате чего в системе появляется гомоклинический аттрактор по сценарию Шильникова.

Список литературы

1. Cortes J. M., et al. // PNAS. 2013. Vol. 110. no. 41. P. 16610–16615.
2. Mongillo G., et al. // Science. 2008. Vol. 319. no. 5869. P. 1543–1546.
3. Barabash N., et al. // EPJ ST. 2023. P. 1–6.

Динамические механизмы возникновения слабых гамма-ритмов*

Д. О. Радушев¹✉, О. А. Догонашева^{1,2}, Д. Г. Захаров¹

¹Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»,
Центр нейроэкономики и когнитивных исследований

²École Normale Supérieure PSL* University, Paris, France

✉ doradushev@edu.hse.ru

На протяжении долгого времени гамма-ритмы — макроскопические осцилляции частоты более 30 Гц, наблюдаемые в коре головного мозга и различных областях гиппокампа — привлекают интерес исследователей. Все больше экспериментальных и теоретических работ показывают роль гамма-ритмов в обработке информации, например, при кодировании речи [1].

Двумя общепринятыми моделями гамма-ритмов являются ING (Interneuron Network Gamma) и PING (Pyramidal Interneuron Network Gamma) [2]. Они возникают в нейронных сетях, состоящих из двух подсетей: сети тормозных интернейронов и сети возбуждающих пирамидных нейронов. Модель PING характеризуется тем, что пирамидные клетки играют активную роль в формировании ритмов; в модели ING пирамидные нейроны выступают скорее передатчиком сигнала.

Объектом нашего исследования являются динамические механизмы возникновения в двусоставной интернейронно-пирамидной системе слабого гамма-ритма — такого, при котором пирамидные нейроны не генерируют спайки с характерной для гамма-ритма частотой; такой гамма-ритм обнаруживает себя в коллективной динамике нейронов, например, за счет поочередной активности синхронных кластеров. В экспериментах, слабый гамма-ритм зачастую проявляет нерегулярность и «разреженность». Мы предполагаем, что одним из возможных источников явления могут быть химерные состояния нейронных систем. В этом случае, за счет некогерентного кластера химерных состояний, популяционные осцилляции приобретут основные экспериментальные признаки слабого ритма.

На данный момент произведены вычисления для случая модели ING: при различных значениях параметров показано поведение кольцевой сети интернейронов с нелокальными связями. Найдены основные количественные характеристики систем, построены визуализации отдельных моделей

*Данная работа была поддержана Российским научным фондом (грант 23-22-00418). Исследование выполнено с использованием суперкомпьютерного комплекса НИУ ВШЭ.

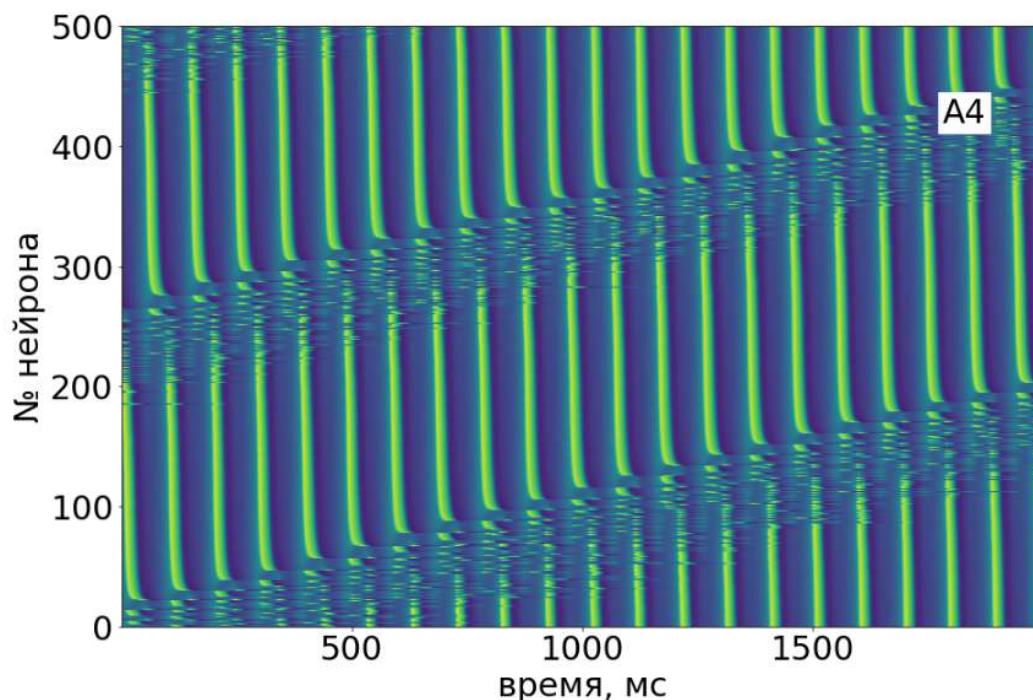


Рис. 1. Химерное состояние кольца из 500 интернейронов

и глобальные карты динамических режимов. Используя меру синхронизации АСМ [3], мы автоматизируем идентификацию динамических режимов сети. Отдельно рассматривается вопрос мультистабильности: определив предварительно область существования аттрактора состояния, мы уточняем границы бассейна его притяжения.

Проведя те же вычисления для взаимодействующих колец интернейронов и пирамидных клеток (модель PING), мы перейдем к детальному сравнению полученных результатов и гамма-ритмов, наблюдаемых в мозге экспериментально. Тем самым, мы проясним связь данного физиологического явления и концепции химерного состояния.

Список литературы

1. *Giraud A. L., Poeppel D.* Cortical oscillations and speech processing: emerging computational principles and operations // *Nat Neurosci.* 2012. 15. P. 511–517.
2. *Whittington M. A., Cunningham M. O., LeBeau F.E.N., Racca C. and Traub R. D.* Multiple origins of the cortical gamma rhythm // *Devel Neurobio.* 2011. Vol. 71. P. 92–106.
3. *Dogonasheva O., Kasatkin D., Gutkin B., Zakharov D.* Robust universal approach to identify travelling chimeras and synchronized clusters in spiking networks // *Chaos, Solitons & Fractals.* 2021. Vol. 153, Part 1. 111541.

Влияние шума на работу рекуррентных нейронных сетей*

Н. И. Семенова

¹Саратовский национальный исследовательский
государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

✉ semenovani@sgu.ru

За последние несколько лет искусственные нейронные сети (ИНС) нашли свое применение в решении многих задач от распознавания образов до предсказания климатических явлений.

С точки зрения вычислений, моделирование ИНС является очень ресурсоемкой задачей. Несмотря на существование высокомоощных вычислительных кластеров с возможностью распараллеливания вычислений, моделирование нейронной сети на цифровом оборудовании является узким горлышком в масштабировании сети, скорости получения, обработки информации и энергоэффективности. В последние годы все больше исследователей в области нейронных сетей заинтересованы в создании аппаратных сетей, в которых нейроны и связь между ними представляют собой реальное устройство, способное обучаться и решать задачи. Это сопровождается экспоненциальным ростом количества работ с аппаратными ИНС, в основе которых лежат лазеры, мемристоры, спин-трансферные осцилляторы и т. д. [1,2].

На данный момент существует не только множество топологий сетей, эффективных для тех или иных задач, но и множество алгоритмов обучения. К настоящему времени нейронные сети достигают сверхчеловеческой производительности в вычислительных задачах, ранее считавшихся неразрешимыми компьютерами [3]. В зависимости от структуры связей внутри них выделяют два типа, основанных на принципиально разных характерах связи: глубокие нейронные сети (deep neural networks, feedforward neural networks) и рекуррентные нейронные сети (recurrent neural networks).

Глубокие ИНС, как правило, имеют многослойную структуру. В них входной сигнал преобразуется, проходя через сеть и множество скрытых слоев, формируя выходной сигнал. Такие сети часто применяют в компьютерном зрении, распознавании речи и машинном переводе. Рекуррентные сети обладают свойством памяти, благодаря чему могут обрабатывать серии событий во времени или предсказывать их. Часть нейронов рекуррентной сети обладают запаздывающей обратной связью, что позволяет

*Работа поддержана РНФ, грант № 21-72-00002.

решать задачи с привязкой ко времени. К таким задачам относится обнаружения движения, синтез музыки, финансовое прогнозирование и т.д. [4]. Наличие временного запаздывания сильно усложняет решение задач накопления шумов и их подавления.

В данной работе рассматриваются рекуррентные сети. Предлагаются методы оценки уровня шума выходного сигнала нейронной сети и способы его уменьшения при помощи особой связи между нейронами. Рассматривается несколько типов шумов: аддитивный и мультипликативный в зависимости от того, как шум влияет на один отдельно взятый нейрон, и коррелированный и некоррелированный шум в зависимости от того, как шум влияет на группу нейронов. Для оценки уровня шума выходного сигнала используются две характеристики: дисперсия и отношение сигнал-шум, а для оценки работы сети используется среднеквадратичная ошибка. В работе показывается, каким образом разные шумы влияют на эти три характеристики.

Список литературы

1. *Brunner D., Soriano M. C., Mirasso C. R., Fischer I.* Parallel photonic information processing at gigabyte per second data rates using transient states // *Nature communications*. 2013. Vol. 4. P. 1364.
2. *Torrejon J., Riou M., Araujo F.A., Tsunegi S., Khalsa G., Querlioz D., Bortolotti P., Cros V., Yakushiji K., Fukushima A., Kubota H., Yuasa S., Stiles M.D., Grollier J.* Neuromorphic computing with nanoscale spintronic oscillators // *Nature*. 2017. Vol. 547, no. 7664. P. 428–431.
3. *Mandic D., Chambers J.* Recurrent neural networks for prediction: learning algorithms, architectures and stability. Wiley, 2001.
4. *Medsker L. R., Jain L. C.* Recurrent neural networks // *Design and Applications*. 2001. T. 5. С. 64–67.

Использование эмпирических моделей с радиальными базисными функциями для анализа сигналов распределённых нейросетей*

*Е. А. Созонов¹✉, И. В. Сысоев^{1,2},
Е. М. Сулейманова², Л. В. Виноградова²*

¹Саратовский национальный исследовательский
государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

²Институт высшей нервной деятельности и нейрофизиологии РАН

✉ Arzdez@sgu.ru

В настоящее время существует и используется достаточно большое количество методик для детектирования связи между двумя колебательными ансамблями различной природы. В работах [1, 2] рассматриваются методы нелинейной причинности по Грейнджеру, в работе [3] рассмотрен метод оценки взаимной информации, а также метод энтропии переноса [4]. Описанные в данных работах методики находят достаточно частое применение на практике, однако в работе Маринацо [5] была предложена методика ядерной причинности по Грейнджеру, в ней в качестве модели используется линейная комбинация радиальных базисных функций (РБФ).

$$\varphi(x) = \varphi(x - c), \quad (1)$$

$$y(x) = \sum_i^{k-1} w_i \varphi_i(x), \quad (2)$$

где k — количество радиальных базисных функций, где C — выбранный центр радиальной базисной функции, w_i — вес функции, φ — РБФ. Для оценки w_i наиболее часто используется метод наименьших квадратов, а для выбора центров, — различные алгоритмы кластеризации (в данном случае — метод К-средних):

$$C = \sum_i^{k-1} \sum_{X \in S_i} (x - \mu)^2, \quad (3)$$

где k — число кластеров, S_i — полученные кластеры μ_i — центры скопления всех векторов x .

Рассматривались временные ряды локальных потенциалов мозга от правой и левой коры головного мозга крысы. Расчёты проводились

*Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 22-15-00327

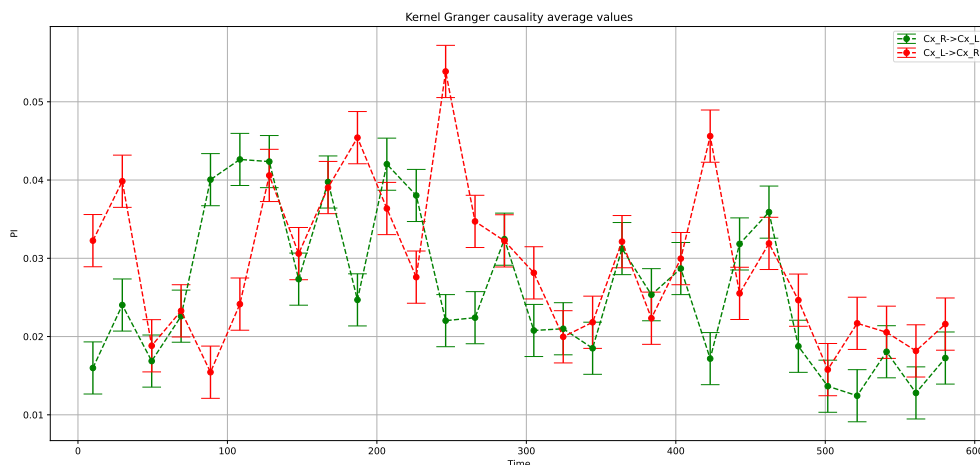


Рис. 1. Детектирование связи методом ядерной причинности по грейнджеру между левой и правой корой головного мозга крысы во время и после волны распространяющейся депрессии

в окне $W = 20$ с. На рис. 1 хорошо виден рост улучшения прогноза PI в промежутке между сотой и трёхсотой секундами, сразу после волны РД, после чего показатель упал до фонового уровня.

Список литературы

1. Корнилов М. В., Сысоев И. В., Безручко Б. П. Оптимальный подбор параметров прогностических моделей в методе нелинейной причинности по Грейнджеру в приложении к сигналам, характеризваемым хорошо выраженными временными масштабами // *Нелинейная динам.* 10:3 (2014), 279–295.
2. Корнилов М. В., Сысоев И. В. Исследование эффективности метода нелинейной причинности по Грейнджеру в случае сильной синхронизации систем // *Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика.* vol. 22, no. 4, 2014, pp. 66–76.
3. Ming-Jie Zhao Gavin Brown, Adam Pocock and Mikel Lujan Conditional likelihood maximisation: A unifying framework for information theoretic feature selection // *Journal of Machine Learning Research*, 13:27–66, 2012.
4. Lee J., Nemati S., Silva I., Edwards B.Á., Butler J.P., Malhotra A. transfer entropy estimation and directional coupling change detection in biomedical time series // *BioMedical Engineering OnLine.* 2012. 11:19.
5. Marinazzo D., Pellicoro M., and Stramaglia S. Sebastiano. Nonlinear parametric model for Granger causality of time series // *Phys. Rev. E.* 2006. Vol. 73. 066216.

Реализация радиофизической модели нейрона Фитцхью–Нагумо с аппроксимацией нелинейной функции диодами*

Л. В. Такашвили¹✉, И. В. Сысоев^{1,2}, В. И. Пономаренко^{2,1}

¹Саратовский национальный исследовательский
государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

²Саратовский филиал Института радиотехники
и электроники им. В. А. Котельникова РАН

✉ nar7187@yandex.ru

Важным промежуточным этапом между математическими и биологическими моделями при моделировании активности мозга является использование экспериментальных радиофизических моделей нейронов. Это позволяет учитывать неидеальности и нестационарность элементов и связей между нейронами, включая аксоны, а также моделировать измерения, более близкие к естественному эксперименту. Самая простая известная колебательная модель нейрона — модель Фитцхью–Нагумо. Её преимущество для схемотехнической реализации перед другими моделями заключается в том, что она имеет относительно несложную кубическую нелинейность. Известен ряд экспериментальных реализаций данной модели [1–3].

В данной работе за основу радиотехнической электронной модели нейрона была взята схема нейрона Фитцхью–Нагумо из статьи [1], поскольку в ней использованы простейшие элементы — минимальное число операционных усилителей, нет аналоговых умножителей. Контур состоит из двух сигнальных элементов питания, семи диодов, семи резисторов, двух индуктивностей, конденсатора и операционного усилителя. Операционный усилитель составлял схему отрицательного сопротивления вместе с тремя резисторами. Столь большое число элементов плохо как с точки зрения сложности монтажа, так и из-за неидеальности и неидентичности диодов, конденсаторов и катушек: чем больше компонентов, тем сложнее контролировать параметры нейрона.

Цель данной работы — упростить схему таким образом, чтобы не потерять качественное соответствие (сохранить все динамические режимы), но значимо уменьшить число элементов в ней. Если избавиться от двух сигнальных элементов питания, одной катушки индуктивности, трёх резисторов и двух диодов (колебательного контура), оставив по сути

*Работа поддержана Научным центром «Идея», грант №АСП-10-2022/II

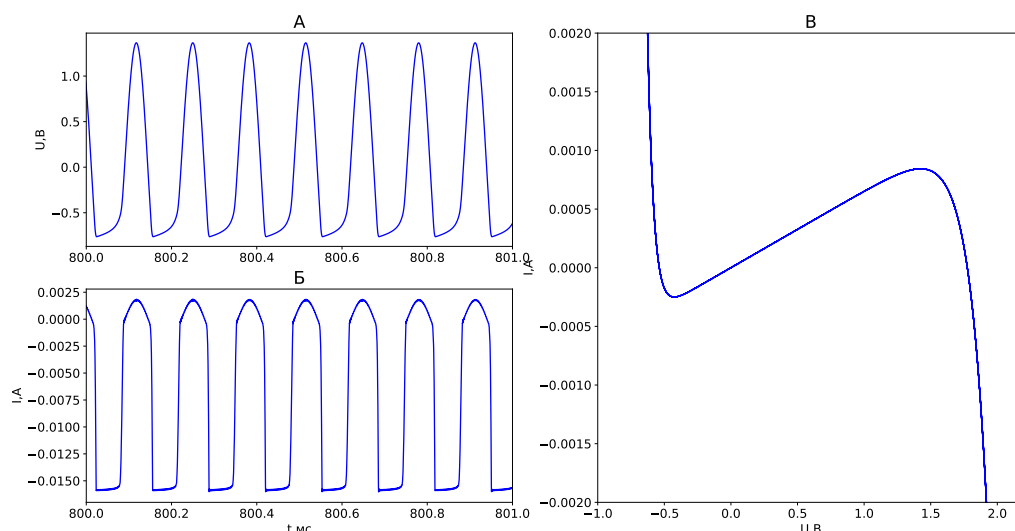


Рис. 1. График зависимости напряжения на нелинейном элементе и силы тока через него от времени в режиме, соответствующем периодической генерации (А,Б) и Вольт-Амперная характеристика схемы (В)

только аппроксимацию нелинейной функции, схема перестаёт генерировать сигнал без внешнего источника колебаний (пропадает колебательный режим). Чтобы вновь добиться генерации, один диод был переставлен в схему отрицательного сопротивления, конкретно — в обратную цепь операционного усилителя.

Далее были изучены бифуркации, приводящие к генерации колебаний, см. рис. 1. Данный режим достигается путём выставления определенного значения отрицательного сопротивления, за который отвечает определенный резистор (это сильно нелинейный режим вдали от точки бифуркации). При изучении бифуркационного и предбифуркационного сигнала было выявлено, что колебания рождаются в результате бифуркации Андронова–Хопфа, то есть полученная схема принципиально не отличается от схемы ФитцХью–Нагумо.

Список литературы

1. *Binczak S., Jacquir S., Bilbault J.-M., Kazantsev V.B., Nekorkin V.I.* Experimental study of electrical FitzHugh–Nagumo neurons with modified excitability // *Neural Networks*. 2006. Vol. 19. P. 684–693.
2. *Li F., Liu Q., Guo H., Zhao Y., Tang J., Ma J.* Simulating the electric activity of FitzHugh–Nagumo neuron by using Josephson junction model // *Nonlinear Dynamics*. 2012. Vol. 69, 2169–2179.
3. *Kulminskiy D. D., Ponomarenko V. I., Prokhorov M. D., Hramov A. E.* Synchronization in ensembles of delay-coupled nonidentical neuronlike oscillators. *Nonlinear Dynamics*. 2019. Vol. 98, no. 1. P. 735–748.

Влияние нелокальных связей на динамику распространения потенциала действия в одномерной системе взаимодействующих нейронов, описываемых моделью Hindmarsh–Rose*

И. С. Фатеев[✉], А. А. Полежаев

Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН
✉ i.fateev@lebedev.ru

Для обоснования эмпирических закономерностей, связанных с возможностью кластерной активации совокупности взаимодействующих нейронов [2, 3], а также с образованием сложных пространственно-временных структур, применяются различные реакционно-диффузионные модели [4, 5]. В рамках текущего исследования была рассмотрена система, описывающая нелокальную связь между нейронами, образующими одномерную цепочку, основанная на модели Hindmarsh–Rose, а также на свойствах дробного оператора Лапласа, описывающего нелокальные взаимодействия, как с постоянными, так и с зависящими от координаты показателями [7]:

$$\begin{cases} du/dt = -D_u(-\Delta_x)^{\alpha_u(x)/2}u + v - au^3 + bu^2 - m + I_{ext} \\ dv/dt = -D_v(-\Delta_x)^{\alpha_v(x)/2}v + c - du^2 - v \\ dm/dt = -D_m(-\Delta_x)^{\alpha_m(x)/2}m + r(s(u - u_0) - m). \end{cases} \quad (1)$$

Здесь $u(x, t)$ – потенциал действия, $v(x, t)$ и $m(x, t)$ описывают динамику пропускания K^+ и Ca^+ через мембрану тела нервной клетки, I_{ext} – внешний стимул, D_i – коэффициенты диффузии соответствующих компонент. Произведено численное моделирование распространения потенциала действия в такой системе для параметров $a = 1$, $b = 3$, $I_{ext} = 1.315$, $c = 1$, $d = 5$, $r = 0.008$, $s = 4$, $u_0 = -1.6$, со значениями $D_u = 10^{-4}$, $D_v = 10^{-5}$, $D_m = 10^{-5}$. Показано, что в рамках супердиффузионного взаимодействия, помимо степенной асимптотики спада компонент, образуется кластерная структура на больших временах, в отличие от случая с обычной диффузией, где наблюдаются режимы синхронного поведения при заданных общих параметрах. В случае систем с переменным показателем дробного лапласиана формируются неоднородные структуры (см. рис. 1).

*Работа поддержана грантом РФФ № 22-21-00546.

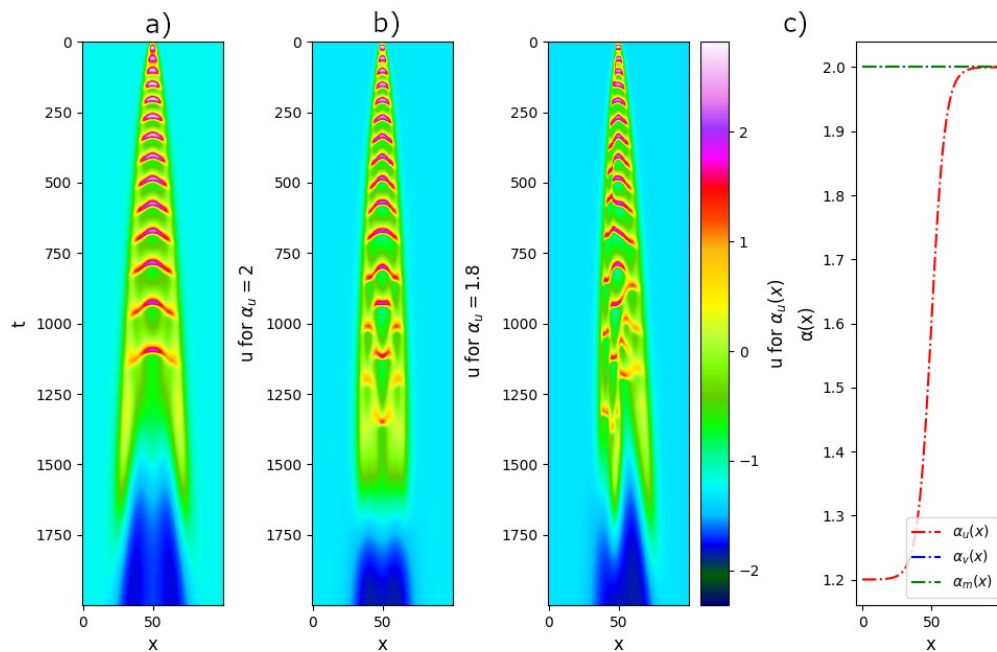


Рис. 1. **а)** Динамика системы с обыкновенной диффузией при возбуждении нескольких центральных нейронов относительно стационарного состояния для модели (1) с показателями ($\alpha_u = \alpha_v = \alpha_m = 2$). Наблюдается режим синхронной активации элементов. **б)** Динамика супердиффузионной системы для показателей ($\alpha_u = 1.8$ и $\alpha_v = \alpha_m = 2$). Для больших времен формируется кластерный режим активации. **в)** Эволюция системы с переменным порядком ($\alpha_u(x)$ и $\alpha_v = \alpha_m = 2$). В областях пространства с меньшими показателями $\alpha(x)$ наблюдаются процессы активации на больших временах и общее анизотропное поведение

Список литературы

1. *Chen G., Gong P.* A spatiotemporal mechanism of visual attention: Superdiffusive motion and theta oscillations of neural population activity patterns // *Science Advances*. 2022. Vol. 8. P. 1–19.
2. *Qi Y., Gong P.* Fractional neural sampling as a theory of spatiotemporal probabilistic computations in neural circuits // *Nature communications*. 2022. Vol. 13. P. 1–19.
3. *Sharma S.K., Mondal A., Mondal A., Upadhyay R.K., Ma J.* Synchronization and Pattern Formation in a Memristive Diffusive Neuron Model // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 2021. Vol. 31, no. 11. 2130030.
4. *Mondal A., Upadhyay R.K., Mondal A., Sharma S.K.* Emergence of Turing patterns and dynamic visualization in excitable neuron model // *Applied Mathematics and Computation*. 2022. Vol. 423, no. 15. 127010.
5. *Zhuang P., Liu F., Anh V., Turner I.* Numerical methods for the variable-order fractional advection-diffusion equation with a nonlinear source term // *Siam J. Numer. Anal.* 2009. Vol. 47, no. 3. P. 1760–1781.

Исследование особенностей функциональных сетей головного мозга при расстройствах аутистического спектра*

*И. Д. Филатов¹✉, С. А. Куркин¹, О. В. Мартынова²,
О. В. Сысоева², Г. В. Портнова²*

¹Балтийский федеральный университет имени Иммануила Канта

²ФГБУН Институт высшей нервной деятельности и нейрофизиологии РАН, Москва, Россия

✉ filatov.ivan.d@gmail.com

Аутизм (РАС) представляет собой неврологическое расстройство, которое влияет поведение и интересы человека. РАС обычно проявляется в детском возрасте и сопровождается определенными признаками [1, 2]. Исследования, основанные на использовании технологии ЭЭГ могут предоставить новые, более объективные и точные методы диагностики, которые могут помочь в дальнейшем улучшить диагностику и лечение детей с РАС [3]. Анализ функциональных сетей мозга является многообещающим подходом для изучения и диагностики РАС [4]. У детей с РАС наблюдается атипичная связность между несколькими системами мозга, но характер этих различий не полностью понятен [4].

В качестве первого шага было проведено исследование функциональных сетей на уровне попарных взаимодействий между узлами графа. Датасет состоял из ЭЭГ записей 321 участника (148 РАС / 173 контроль). Функциональные связи между каналами рассчитывались с использованием корреляции Пирсона [5], усредненной среди представителей групп РАС/Контроль. На текущий момент времени использовался эмпирически выбранный порог равный 0.6, при котором стали очевидны различия в структуре связей головного мозга между группами.

Мы обнаружили, что у детей с РАС имеются отличия в функциональной связности между определенными областями мозга. Заметны изменения в префронтальной коре, отвечающей за регуляцию поведения, мышление и эмоции человека. Также имеются различия в теменной области, ответственной за обработку слуховой и визуальной информации, языковые функции и поведение.

Полученные результаты согласуются с предыдущими исследованиями в этой области и показывают потенциал применения анализа функцио-

*Работа поддержана программой «Приоритет-2030» Балтийского федерального университета имени Иммануила Канта Министерства образования и науки РФ. С.А.К. благодарит за поддержку Совет по грантам Президента Российской Федерации (грант МД-590.2022.1.2).

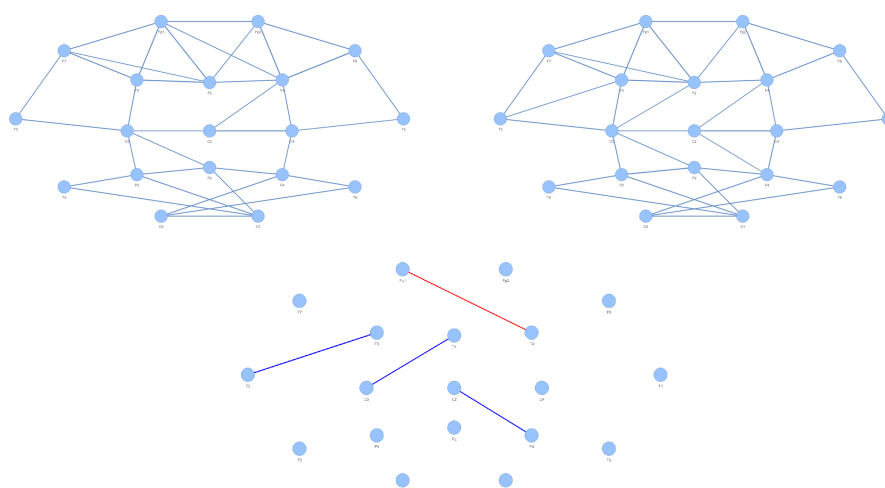


Рис. 1. Граф связности различных областей мозга у участников с РАС (слева) и Контроля (справа). Уникальные для группы испытуемых связи (внизу): красные – присутствующие только у группы с РАС, синие – только у группы Контроля

нальных сетей для выявления РАС. В дальнейшем планируется переход к анализу сетей высокого порядка, что может открыть новые зависимости регионов мозга и улучшить диагностику детей с РАС.

Сети высокого порядка учитывают зависимости между группами узлов, которые взаимодействуют более сложным образом, вместо того, чтобы рассматривать только отдельные пары узлов в сети. В контексте РАС сети высшего порядка могут быть использованы для более точного определения мозговых подсистем, которые нарушены в РАС. Их анализ может помочь выявить более сложные паттерны функциональной связности между различными регионами мозга, что может привести к новым методам диагностики и лечения РАС.

Список литературы

1. Courchesne E. et al. The ASD living biology: from cell proliferation to clinical phenotype. *Molecular psychiatry* 24 (1), 88–107 (2019).
2. Daniels A.M. Explaining differences in age at autism spectrum disorder diagnosis: A critical review. *Autism* 18 (5), 583–597 (2014).
3. Hadoush H., Alafeef M. & Abdulhay, E. Automated identification for autism severity level: Eeg analysis using empirical mode decomposition and second order difference plot // *Behavioural brain research*. 362, 240–248 (2019).
4. Hull J.V. et al. Resting-state functional connectivity in autism spectrum disorders: a review // *Frontiers in psychiatry*. 7, 205 (2017).
5. Pearson K. Notes on regression and inheritance in the case of two parents // *Proceedings of the Royal Society of London*. 58, 240–242 (1895).

Самоорганизационная динамика в полупроводниковых гетероструктурах при инжекции носителей зарядов

М. В. Елисов

Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С. П. Королёва
✉ maksimelisov2003@gmail.com

Полупроводниковый кристалл представляет собой сложную динамическую систему, в которой наблюдаются электрические неустойчивости, когда под воздействием сильного внешнего электрического поля или освещения полупроводник переводится в состояние, далекое от термодинамического равновесия.

Рассмотрим модель фазового перехода второго рода, обусловленного ГР-процессами, включающую рекомбинацию зона-ловушка (константа скорости T_1^S), ударную ионизацию (X_1) и оже-рекомбинацию (T_1). Nd — концентрация доноров, Na — концентрация акцепторов, Nt — концентрация ловушек, n — концентрация носителей заряда, в данном случае электронов. У управляющего уравнения два устойчивых решения: при $X_1 = 0$ ($n = 0$) и при $X_1 = \frac{1}{(Nt/Nd-1)T_1^S}$.

Если считать коэффициент ударной ионизации X_1 управляющим параметром, который растет при увеличении электрического поля E_0 , то оказывается, что при критическом значении X_c (соответствующем критическому значению поля E_c) решение для стационарного состояния $n(X_1)$, а следовательно, и зависимость $n(E_0)$ имеют разрыв производной $\frac{dn}{dX_1}$. Таким образом, происходит неравновесный фазовый переход второго рода из непроводящего состояния ($n = 0$) в проводящее ($n > 0$). Это соответствует транскритической бифуркации.

Физический смысл фазового перехода второго рода связан с явлением примесного пробоя в полупроводниках. Условие пробоя при ударной ионизации соответствует критической точке X_{1c} .

Для математического моделирования были использованы следующие значения $X_1 = 10^{-7} \text{ см}^3 \cdot \text{с}^{-1}$; $Nd = 10^{15} \text{ см}^3$; $Nt = 10^{16} \text{ см}^3$; $T_1^S = 10^{-9} \text{ см}^3 \cdot \text{с}^{-1}$. Было получено устойчивое значение концентрации $n = 9.84 \cdot 10^{13} \text{ см}^3$. На рис. 1 отображено изменение концентрации электронов во времени при различных значениях управляющего параметра. Видно, что при достижении параметром критического значения решение перестаёт быть тривиальным ($n = 0$) и устойчивое значение концентрации становится отличным от нуля.

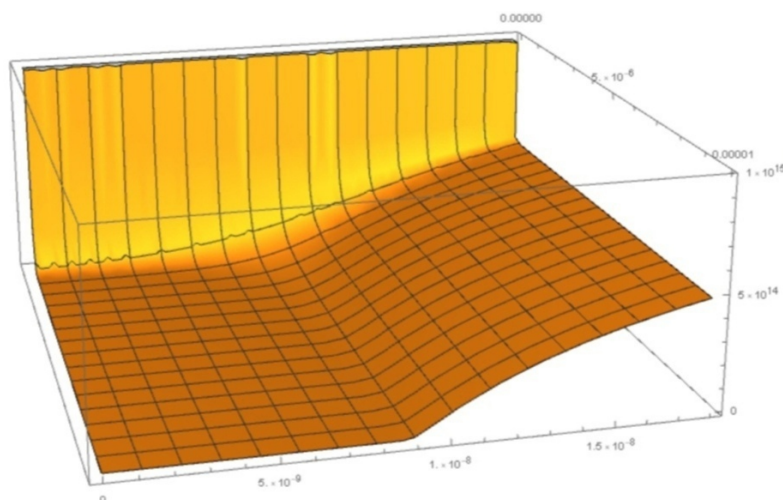


Рис. 1. Зависимость концентрации электронов от времени при изменении коэффициента ударной ионизации

В рамках рассматриваемой темы было развито математическое описание расщепления квазиуровней Ферми источниками излучения. Определены возможности оптимизации путем управления параметрами легированной модуляции градуированного гетероперехода и квазиэлектрического встроенного поля в технологическом процессе эндотаксии тонких пленок на кремнии и контроля над внешним или внутренним генерационным воздействием.

В итоге управляемая ситуация возможна применительно к генераторам с наноразмерными изотипными и анизотипными гетеропереходами с барьерами, созданными в силу явления структурной самоорганизации на подложке из кремния. Полупроводниковый преобразователь энергии с наноразмерными гетеропереходами возможно определить таким образом, что его эффективность будет иметь требуемый высокий уровень. За счет анализа получаемых в фазовом пространстве траекторий, а именно анализа дифференциальных уравнений, описывающих систему генерации-рекомбинации носителей заряда, возможно найти наиболее подходящие и энергоэффективные комбинации параметров.

Список литературы

1. Шелль. Э. Самоорганизация в полупроводниках: Неравновесные фазовые переходы в полупроводниках, обусловленные генерационно-рекомбинационными процессами / Москва: Мир, 1991. 459 с.
2. Качлишвили З. С., Кезерашвили И. Д. Динамический хаос в полупроводниках с горячими носителями // Физика и техника полупроводников. 1990. Vol. 24, № 6. P. 1106–1109.

Исследование взаимной синхронизации гиротронов с запаздыванием в канале связи*

М. А. Зарудная[✉], Л. А. Аблаева, А. Б. Адилова

Саратовский национальный исследовательский
государственный университет имени Н. Г. Чернышевского
[✉] zarudnaya2002@mail.ru

Одной из основных тенденций развития современной сверхвысокочастотной электроники является получение высоких уровней мощности путем сложения сигналов нескольких генераторов. В частности, в настоящее время одной из ключевых проблем СВЧ электроники является создание комплексов из большого числа когерентно излучающих гиротронов для нагрева плазмы в установках управляемого термоядерного синтеза [1]. Для этих проектов предполагается использовать гиротроны мегаваттного уровня мощности в короткой части миллиметрового диапазона, работающих в квазинепрерывном режиме. Среди различных подходов к решению этой проблемы привлекает интерес использование взаимной синхронизации связанных генераторов [2]. Важно отметить, что на сверхвысоких частотах необходимо учитывать запаздывание сигнала, распространяющегося между связанными генераторами. Картина синхронизации в системах с запаздыванием имеет ряд нетривиальных особенностей по сравнению с системами с малым числом степеней свободы [3].

Рассмотрим систему двух гиротронов, связанных с задержкой. Будем считать генераторы идентичными за исключением небольшой расстройки собственных частот.

$$\frac{dA_1}{d\tau} + \frac{i\Delta}{2}A_1 + A_1 = I_s\Phi(A_1)A_1 + \rho e^{-i\psi}A_2(\tau - \tau_d), \quad (1)$$

$$\frac{dA_2}{d\tau} - \frac{i\Delta}{2}A_2 + A_2 = I_s\Phi(A_1)A_2 + \rho e^{-i\psi}A_1(\tau - \tau_d). \quad (2)$$

Здесь Δ — безразмерная расстройка собственных частот, $\rho = \sqrt{P_{in}/P_{out}}$ — коэффициент связи, который определяется отношением входной и выходной мощностей, $\tau = \omega_0 t / (2Q)$ — безразмерное время, $\tau_d = \omega_0 t_d / (2Q)$ — нормированное время задержки t_d , Q — добротность резонатора, I_s — безразмерный параметр тока, $\Phi(A_{1,2})$ — функции электронной восприимчивости, которые можно найти, решая известные уравнения

*Работа поддержана грантом РНФ № 22-72-00109.

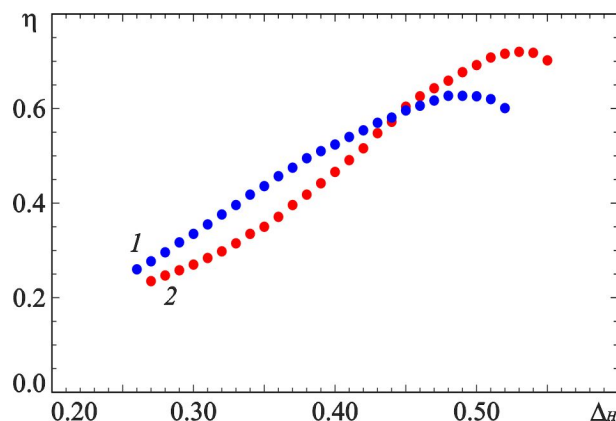


Рис. 1. Зависимости КПД от расстройки Δ_H в отсутствии связи (кривая 1) и в случае взаимной синхронизации двух гиротронов (кривая 2) при значении параметра связи $\rho = 0.35$

нестационарной теории гиротрона с фиксированной структурой высокочастотного (ВЧ) поля.

Как известно, значение максимального КПД обычно достигается в режиме жесткого возбуждения. Это существенно усложняет анализ синхронизации связанных гиротронов. В докладе будут представлены результаты численного моделирования для различных параметров связанных гиротронов в режиме жесткого возбуждения. Построены области синфазной и противофазной синхронизации на плоскости $\Delta - \rho$, проанализированы зависимости КПД и частоты в режиме синхронизации.

Список литературы

1. *Sakamoto K.* Progress of high-power-gyrotron development for fusion research // *Fusion Sci. Tech.* 2007. Vol. 52. P. 145–153.
2. *Adilova A. B., Ryskin N. M.* Theory of Peer-to-Peer Locking of High-Power Gyrotron Oscillators Coupled with Delay // *Electronics.* 2022. Vol. 11. P. 811.
3. *Adilova A. B., Gerasimova S. A., Balakin M. I., Ryskin N. M.* Bifurcation analysis of multistability of synchronous states in the system of two delay-coupled oscillators // *Chaos.* 2021. Vol. 31, No. 11. 113103.

Разработка миниатюрных лестничных замедляющих систем субтерагерцового диапазона на основе метаматериалов*

Е. Е. Колесниченко^{1,2}, А. А. Ростунцова^{1,2}✉

¹Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН

²Саратовский национальный исследовательский
государственный университет имени Н.Г. Чернышевского

✉ rostuncova@mail.ru

Освоение субтерагерцового (суб-ТГц) диапазона частот является одной из приоритетных задач вакуумной электроники, поскольку когерентные источники суб-ТГц излучения имеют широкие возможности применения, например, для нового поколения высокоскоростных систем беспроводной передачи данных [1]. Перспективным является создание малогабаритных усилителей на основе лампы бегущей волны (ЛБВ) с использованием пространственно-развитых замедляющих систем (ЗС), взаимодействующих с многолучевыми ленточными электронными пучками. В данной работе представлены результаты разработки лестничных ЗС, которые представляют собой закрепленную в волноводе металлическую пластину с периодическими вырезами различной формы. Несмотря на то, что подобные ЗС известны с 1950-х годов [2, 3], подробное исследование их характеристик с помощью современных пакетов численного моделирования по-прежнему представляет интерес.

С помощью пакета COMSOL Multiphysics [4] подробно исследованы дисперсионные характеристики лестничной ЗС в прямоугольном волноводе. Недостатком данной ЗС является то, что высокое замедление возможно лишь в очень узком частотном диапазоне вблизи верхней границы полосы пропускания. Наиболее интересными для практических целей являются модификации данной ЗС, которые могут проявлять свойства дважды отрицательного метаматериала (эффективная диэлектрическая и магнитная проницаемости отрицательны). Этого можно достичь путем увеличения критической частоты волновода, чтобы она превысила частоту целевого резонанса, что имеет место в волноводе с пазами (рис. 1, а). Другой способ состоит в уменьшении частоты целевого резонанса, так, чтобы она стала ниже частоты отсечки волновода, что имеет место, например, в ЗС с щелями в виде «гантель» (см. рис. 1, б). Данные ЗС имеют нормальную дисперсию на +1-ой гармонике, так что их можно использовать

*Работа поддержана РНФ, грант № 22-12-00181.

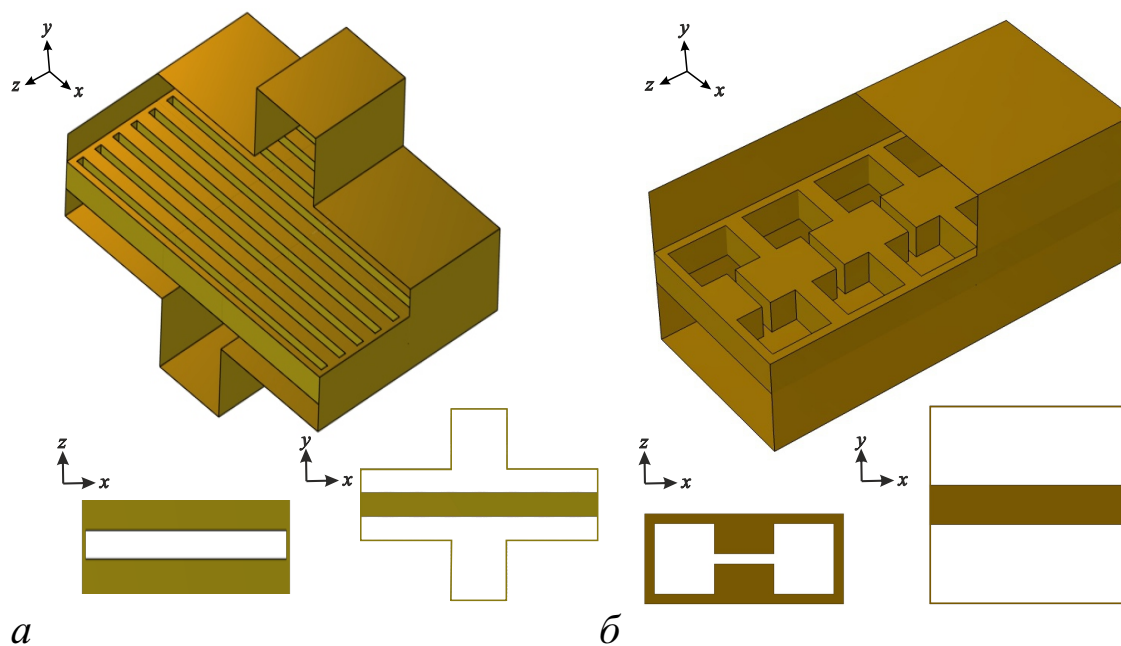


Рис. 1. Схематическое изображение (3D-модель, вид сверху и вид сбоку) лестничной ЗС в волноводе с пазами (а) и ЗС с щелями в виде «гантель» (б)

для создания широкополосных ЛБВ. Были разработаны конструкции ЗС, рабочие частоты которых лежат в W-диапазоне (75–110 ГГц) с характерными размерами порядка сотни микрон, в которых рабочее напряжение не превышает 15 кВ. В докладе представлены результаты моделирования их электродинамических параметров.

Список литературы

1. Григорьев А. Д. Терагерцовая электроника. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2021. 308 с.
2. Pierce J. R. Propagation in linear arrays of parallel wires // IRE Trans. Electron Devices. 1955. Vol. 2, no. 1. P. 13–24.
3. Альтиулер Ю. Г., Татаренко А. С. Лампы малой мощности с обратной волной. М.: Советское радио, 1963. 296 с.
4. Comsol Multiphysics Engineering Simulation Software (COMSOL Inc., Burlington, MA, 2020), see <https://www.comsol.com/comsol-multiphysics>.

Нелинейная динамика запаздывающего репрессиллятора**М. Д. Бузмаков[✉], Д. А. Брацун*

Пермский национальный исследовательский политехнический университет

✉ maxim.buzmakov97@gmail.com

Белковые поля в живых системах являются основой для их функционирования. Непосредственно сами молекулы белка образуются в результате экспрессии генов и участвуют в генной регуляции. Число молекул, участвующих в регуляции, сравнительно мало, поэтому детерминистское описание динамики полей при помощи дифференциальных уравнений считается недостаточным для полного представления протекающих процессов. Межклеточные различия и наличие шума химических реакций приводит к сильным флуктуациям в системе.

В данной работе рассматривается динамическое поведение белковых полей, которое нельзя свести к Марковским процессам. Экспрессия генов состоит из многоэтапных реакций, в результате которых образуются ансамбли сложных органических соединений. Эти процессы распределены по пространству и растянуты по времени. Если время запаздывания одного порядка величины или больше по сравнению с другими характерными временами динамических процессов, то этим эффектом пренебречь нельзя. Запаздывание экспрессии может быть как естественным, т. е. возникать во время транскрипции и трансляции генов, так и искусственным — введенным в генную регуляцию посредством генной инженерии. В качестве модельной системы рассматривается репрессиллятор [4], который является классической конструкцией в синтетической биологии. Промотор каждого гена контролирует следующий за ним цистрон через отрицательную обратную связь, подавляя экспрессию соседа, что приводит к возбуждению колебаний. Для проведения численного анализа использована модифицированная версия алгоритма Гиллеспи, классический вариант которого является стандартным инструментом численного анализа флуктуаций белковых концентраций [5]. Данная модификация была разработана на случай немарковских процессов [3]. Отличие от классического варианта заключается в добавлении стека запаздывающих реакций, которые должны произойти спустя заранее определенное время.

В рамках детерминистского описания были изучены надкритические

*Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (грант № FSNM-2023-0003).

динамические режимы работы системы. Кроме предельного цикла, соответствующего поочередной экспрессии, в системе обнаружено медленное многообразие. Оно отражает процесс длительной синхронизации в работе отдельных генов. При этом, нелинейная динамика, демонстрируемая в рамках модели запаздывающего репрессиллятора, существенно отличается от варианта без запаздывания. При стохастическом описании флуктуации приводят к значительно более быстрому срыву с многообразия и переходу к поочередным циклам экспрессии генов [1]. Переход к поочередным колебаниям концентраций белка в случае использования алгоритма Гиллеспи происходит примерно в одно время вне зависимости от конфигурации генов благодаря наличию шума в системе. В подкритической области было обнаружено возбуждение квазирегулярных колебаний, вызываемых взаимодействием шума и запаздывания. Вблизи нейтральной кривой система демонстрирует процесс спонтанной деградации и возбуждения периодических колебаний. Из-за того, что проявления деградации нерегулярны, каждый раз фаза восстановленных колебаний смещается случайным образом.

Пространственное моделирование белковых полей было произведено в рамках гибридной модели двумерной ткани эпителия, включающей в себя детерминистское описание процесса диффузии и стохастику генной регуляции [2]. Обнаружено, что взаимодействие запаздывания, шума и пространственного обмена сигналами между клетками может приводить к образованию паттернов в том случае, когда детерминистское описание предсказывает абсолютно устойчивое состояние.

Список литературы

1. Брацун Д. А., Бузмаков М. Д. Репрессиллятор с запаздывающей экспрессией генов Часть II. Стохастическое описание // Компьютерное исследование и моделирование. 2021. Том. 13, вып. 3. С. 587–609.
2. Bratsun D. Protein pattern formation induced by the joint effect of noise and delay in a multicellular system // Math. Model. Nat. Phenom. 2022. Vol. 17. Art. 16.
3. Bratsun D., Volfson D., Hasty J., Tsimring L. Delay-induced stochastic oscillations in gene regulation // Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A. 2005. Vol. 102, No. 41. P. 14593–14598.
4. Elowitz M. B., Leibler S. A synthetic oscillatory network of transcriptional regulators // Nature. 2000. Vol. 403. P. 335–338.
5. Gillespie D. T. Exact stochastic simulation of coupled chemical reactions // J. Phys. Chem. 1977. Vol. 81. P. 2340–2361.

Разработка математической модели фотоплетизмограммы для тестирования методов анализа сигналов биологической природы*

А. М. Вахлаева², Ю. М. Ишбулатов¹✉, А. С. Караваев¹, М. Д. Прохоров¹

¹Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН

²Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского

✉ ishbulatov95@mail.ru

Фазовый анализ фотоплетизмограмм (ФПГ) — перспективный метод диагностики состояния сердечно-сосудистой системы и контроля терапии социально-значимых заболеваний [1]. Однако введение фаз сигналов биологической природы требует тонкой настройки методов, которую сложно произвести, опираясь исключительно на результаты анализа экспериментальных данных. Поэтому целью работы являлась разработка математической модели ФПГ с явно указанными в уравнении фазами частотной модуляции ритма сердца и среднего значения.

Модель развивает подходы, предложенные в [2] и [3]. Основной сердечный ритм задавался системой дифференциальных уравнений (1):

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \alpha x(t) - \omega(t)y(t), \\ \dot{y}(t) = \alpha y(t) + \omega(t)x(t), \end{cases} \quad (1)$$

где $\omega(t) = 2\pi / \left(w_0 + \sum_{i=VLF,LF,HF} k_i^{HRV} \cos(\varphi_i^{HRV}(t)) \right)$, где w_0 — собственная частота сердечных сокращений, $\varphi_i^{HRV}(t)$ — мгновенные фазы экспериментально наблюдаемых колебаний сердечного ритма в VLF (0.015–0.04 Гц), LF (0.04–0.15 Гц) и HF (0.15–0.4 Гц) частотных диапазонах. Форма пульсовой волны ФПГ в рамках отдельного кардиоцикла описывалась формулой:

$$PPG(t) = \sum_{i=VLF,LF,HF} \cos(\varphi_i^{PPG}(t)) + 2 \sum_{i=An,Cat} a_i \Phi_i(t) \Phi_i(t),$$

где $\varphi_i^{PPG}(t)$ — мгновенные фазы колебаний экспериментальных ФПГ в соответствующих частотных диапазонах, a_i — параметр высоты анакро-

*Работа выполнена в рамках государственного задания СФ ИРЭ им. В. А. Котельникова РАН.

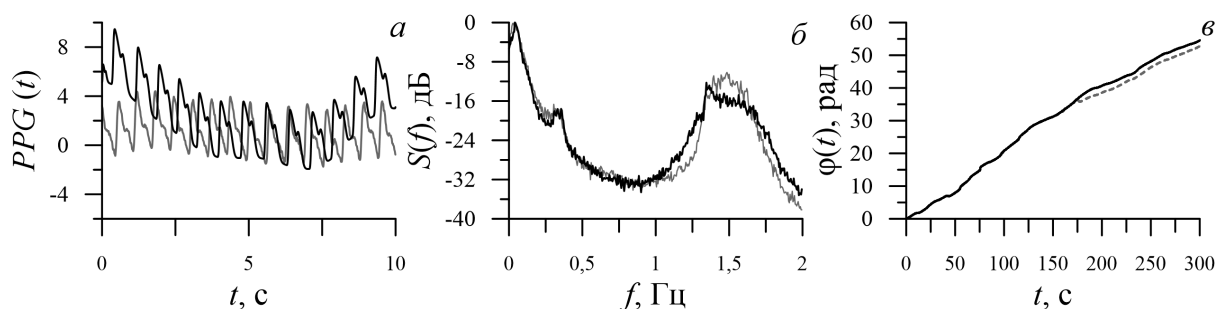


Рис. 1. Сопоставление временных рядов (а), спектров мощности (б) и мгновенных фаз (в) сигналов математической модели (черные линии) и экспериментальных сигналов ФПГ (серые линии)

тического и катакротического подъемов ФПГ, $\phi_i(t)$ и $\Phi_i(t)$ описывались формулами:

$$\phi_i(t) = \frac{1}{b_i \sqrt{2\pi}} e^{-0.5 \left(\frac{T(t) - T_i}{b_i} \right)^2}, \quad \Phi_i(t) = \int \phi_i(t), \quad (2)$$

где $T(t)$ — время от начала кардиоцикла, b_i , T_i — параметры ширины и положения анакротического и катакротического подъемов ФПГ.

На рис. 1 представлены временные ряды, спектры мощности и мгновенные фазы сигналов математической модели и экспериментальных сигналов ФПГ. Из графиков видно их хорошее количественное соответствие, что говорит о перспективности разработанной модели в качестве объекта для тестирования методов введения мгновенных фаз сложных биологических сигналов.

Список литературы

1. Karavaev A. S., Borovik A. S., Borovkova E. I., Orlova E. A., Simonyan M. A., Ponomarenko V. I., Skazkina V. V., Gridnev V. I., Bezruchko B. P., Prokhorov M. D., Kiselev A. R. Low-frequency component of photoplethysmogram reflects the autonomic control of blood pressure // *Biophysical Journal*. 2021. Vol. 120, no. 13. P. 2657–2664.
2. McSharry P. E., Clifford G. D., Tarassenko L., Smith L. A. A Dynamical Model for Generating Synthetic Electrocardiogram Signals // *IEEE Trans. Biomed. Eng.* 2003. Vol. 50(3). P. 289–294.
3. Tang Q., Chen Z., Ward R., Elgendi M. Synthetic photoplethysmogram generation using two Gaussian functions // *Scientific Reports*. 2020. Vol. 10. P. 13883.

Поведение оптической волны в нелинейной среде с периодически расположенными проводящими нанопленками*

С. А. Волкова¹, К. А. Вытовтов²✉, Е. А. Барабанова², М. Г. Иванов³

¹Астраханский государственный технический университет

²Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН

³Национальный исследовательский университет
«Московский энергетический институт»

✉ vytovtov_konstan@mail.ru

Исследование и расчет оптических фильтров на основе периодических многослойных структур является актуальной задачей при разработке оптических коммутаторов [1, 3]. При этом большинство оптических сред является нелинейными. В этой связи в данной работе рассматривается поведение оптической волны в бесконечной нелинейной диэлектрической среде, описываемой магнитной проницаемостью μ и диэлектрической проницаемостью вида

$$\varepsilon(\vec{E}) = \varepsilon_0 + \varepsilon_2 \vec{E}^2. \quad (1)$$

Периодически, с периодом $\Lambda/2$ в структуре расположены проводящие нанопленки. В рамках данной задачи будем считать их абсолютно проводящими. При этом, внешние токи в соседних нанопленках протекают вдоль оси x в противоположных направлениях, а волна распространяется вдоль ось z .

Целью данной работы является исследование поведения плоской электромагнитной волны в рассматриваемой структуре.

Уравнения Максвелла для данного случая приводятся к нелинейному волновому уравнению с правой частью в виде периодических δ -функций:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + \frac{\omega^2 \varepsilon_0 \mu}{c^2} E_x + \frac{3\omega^2 \varepsilon_2 \mu}{c^2} E_x^3 = \\ = j \frac{4\pi\omega\mu}{c^2} \sigma_{film} \sum_{k=-\infty}^{\infty} [\delta(z - z_k^+) - \delta(z - z_k^-)]. \end{aligned} \quad (2)$$

В данной работе предложен аналитический метод анализа поведения гармонической волны в структуре, описываемой (3), в том числе

*Работа поддержана РНФ, № 23-29-00795, <https://rscf.ru/project/23-29-00795/>.

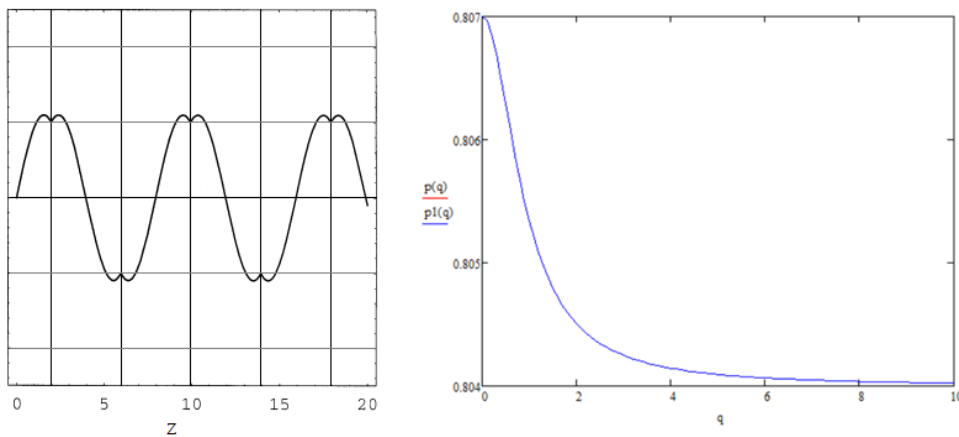


Рис. 1. Результаты численных расчетов

и нахождение условий устойчивости системы. Для этого авторами использован метод негладкого преобразования аргумента и введена замена

$$E_x = X(z) + Y(z) \frac{\partial \tau}{\partial z}, \quad (3)$$

$$\tau = \begin{cases} z, & k\Lambda < z < k\Lambda + \Lambda/2, \\ -z + \frac{\Lambda}{2}, & k\Lambda + \Lambda/2 < z < (k+1)\Lambda. \end{cases} \quad (4)$$

На рис. 1 представлено периодическое решение волнового уравнения (3), а также диаграмма прохождения волны. В данном случае, при одинаковых расстояниях между нанопленками с противоположными равными токами, область прохождения волны представляет собой кривую $P(q)$. Это свойство важно при проектировании узкополосных оптических фильтров.

Список литературы

1. *Amit Kumar Goyal, Ajay Kumar, Yehia Massoud* Performance Analysis of DAST Material-Assisted Photonic-Crystal-Based Electrical Tunable Optical Filter // *Crystals*. 2022. Vol. 12. 992.
2. *Барабанова Е. А., Вытовтов К. А., Nguyen T. T.* The control system elements of the new generation optical switching cell // *Journal of Physics: Conference Series*. 2019. Vol. 1368, iss. 2.
3. *Pilipchuk V. N.* A transformation for vibrating systems based on a non-smooth periodic pair of functions // *Doklady AN Ukr. SSR Ser. A*. 4. P. 37–40.
4. *Vedenova E. G., Manevich L. I., Pilipchuk V. N.* Normal oscillations of a string with concentrated masses on non-linearly elastic supports // *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. Vol. 49, no. 2. P. 153–159.

**Моделирование ионной вейбелевской неустойчивости
в бесстолкновительной ударной волне
в слабо замагниченной плазме***

*Ю. А. Кропотина¹✉, А. А. Петрукович²,
А. М. Быков¹, О. М. Чугунова²*

¹Физико-технический институт им. А. Ф. Иоффе РАН

²Институт космических исследований РАН

✉ juliett.k@gmail.com

Бесстолкновительные ударные волны (БУВ) возникают в разреженной плазме на масштабах много меньше кулоновской длины свободного пробега [1]. Они формируются за счёт раскачки плазменных неустойчивостей неравновесными распределениями ионов и электронов. Современные численные модели предсказывают возможность возникновения БУВ в слабо замагниченной среде вследствие развития ионной вейбелевской неустойчивости [2, 3]. Этот тип неустойчивости с нулевой вещественной частотой формируется в плазме с пучками ионов, движущимися относительно электронов в достаточно слабом магнитном поле. При этом возникают сильные перемежающиеся электромагнитные поля с амплитудой, существенно превышающей начальное поле. С ростом начального магнитного поля данный тип неустойчивости переходит в альвеновскую ионно-циклотронную, для которой характерны более длинные волны, ненулевая вещественная частота, отсутствие возмущений плотности и модуля магнитного поля и насыщение при относительных вариациях поля порядка единицы [4].

Структура магнитных полей в области вблизи фронта может влиять на процесс ускорения ими энергичных частиц, которые в свою очередь формируют нетепловое излучение астрофизических объектов. Таким образом, корректная интерпретация макроскопических наблюдательных данных требует понимания процессов, происходящих в небольшой окрестности фронта ударной волны. Слабо замагниченные ударные волны могут возникать, например, в молодых остатках сверхновых или при слиянии скоплений галактик. Поэтому важно понимать механизмы их формирования.

Мы провели гибридное кинетическое моделирование БУВ с $M_a = 60$; $\beta = 70$; $\theta = 65^\circ$, где M_a — альвеновское число Маха; β — отношение теплового давления перед фронтом к магнитному; θ — угол наклона

*Работа поддержана РФФ, грант № 21-72-20020, моделирование проводилось с использованием вычислительных ресурсов МСЦ РАН.

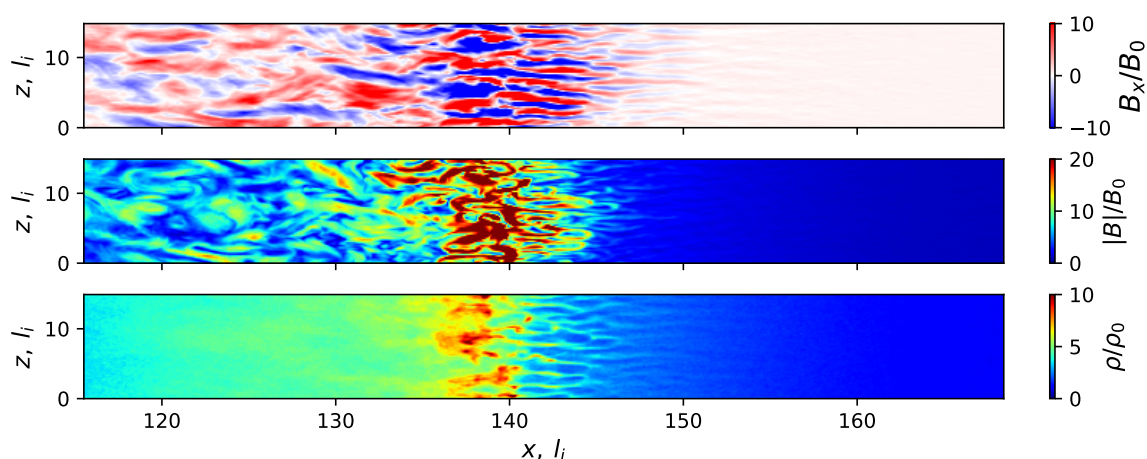


Рис. 1. Модельные цветные карты магнитного поля и плотности в квазипоперечной бесстолкновительной ударной волне в слабо замагниченной среде. Магнитное поле и плотность нормированы на их значения перед фронтом

магнитного поля к нормали. Для моделирования использовался трёхмерный гибридный код *Maximus* [5]. Расчёт показал, что ударная волна формируется за счёт ионной вейбелевской неустойчивости. При этом возникают нитевидные структуры, вытянутые вдоль нормали к фронту, толщиной примерно $2l_i$, где l_i — инерционная длина иона (см. рис. 1). Амплитуда флуктуаций магнитного поля существенно возрастает при приближении к фронту. Её инкремент соответствует инкременту ионной вейбелевской неустойчивости, рассчитанному в рамках линейной кинетической теории, до момента, когда амплитуда флуктуаций достигает 10% от среднего поля перед фронтом. Затем рост замедляется, тем не менее амплитуда флуктуаций магнитного поля вблизи фронта ударной волны более чем на порядок превышает среднее поле перед фронтом. Также присутствуют сильные вариации плотности. Характерные длины волн, поляризация и амплитуда согласуются с наблюдениями ударных волн в плазме с высоким β [6].

Список литературы

1. *Sagdeev R. Z.* Cooperative phenomena and shock waves in collisionless plasma // *Rev Plasma Phys.* 1966. Vol. 4. P. 23–91.
2. *Kato T. N., Takabe H.* // *ApJ.* 2010. Vol. 721. P. 828.
3. *Sironi L., Keshet U., Lemoine M.* // *Space Sci. Rev.* 2015. Vol. 191. P. 519.
4. *Nishigai T., Amano T.* // *Physics of Plasmas.* 2021. Vol. 28. 072903.
5. *Kropotina J., Bykov A., Krassilchtchikov A. et al.* / In *Voevodin V., Sobolev S., eds, Supercomputing.* Springer International Publishing, 2019. P. 242–253.
6. *Petrukovich A. A., Chugunova O. M.* // *Journal of Geophysical Research (Space Physics).* 2021. Vol. 126, e29004.

Передача цифрового и аналогового сигнала с помощью генераторов с грубой динамикой*

Д. О. Любченко^{1,2}✉, О. Б. Исаева^{1,3}

¹ Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН

² Институт радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН

³ Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

✉ dima4398lub@mail.ru

Вскоре после разработки радиофизических моделей, способных генерировать сигналы сложной хаотической природы, начались активные попытки использования таких генераторов для систем конфиденциальной связи [1, 2]. Для такой коммуникации целесообразно использовать сигналы со сложным фрактальным или сплошным спектром, динамику которых будет сложно опознать, при этом она будет грубой. При использовании такой динамики в качестве несущего сигнала становится возможным реконструировать полезную информацию посредством синхронизации передатчика и приемника, даже если они слабо неидентичны.

В данной работе мы исследуем коммуникационную схему на базе системы с гиперболическим хаосом — генератора Кузнецова [3]:

$$\begin{cases} \ddot{x} - (A \cos w_0 t / T - x^2) \dot{x} + w_0^2 x = \varepsilon y \cos w_0 t, \\ \ddot{y} - (-A \cos w_0 t / T - y^2) \dot{y} + (2w_0)^2 y = \varepsilon x^2. \end{cases} \quad (1)$$

Важный теоретический анализ генератора приведен в работах [4, 5], значительный экспериментальный — в работе [6].

Также мы исследуем схему на базе генератора странного нехаотического аттрактора, фаза колебаний которого отвечает отображению Ханта–Отта [7]:

$$\begin{cases} \ddot{x} - (A \sin w_0 t / T - x^2) \dot{x} + w_0^2 x = \varepsilon y \sin (w_0 t + \theta), \\ \ddot{y} - (-A \sin w_0 t / T - y^2) \dot{y} + (2w_0)^2 y = \varepsilon x \sin w_0 t, \\ \dot{\theta} = w_0 w / T, \end{cases} \quad (2)$$

Он также состоит из двух связанных осцилляторов ван дер Поля, но находящихся под квазипериодическим воздействием.

*Работа поддержана грантом Российского научного фонда № 21-12-00121, <https://rscf.ru/project/21-12-00121/>.

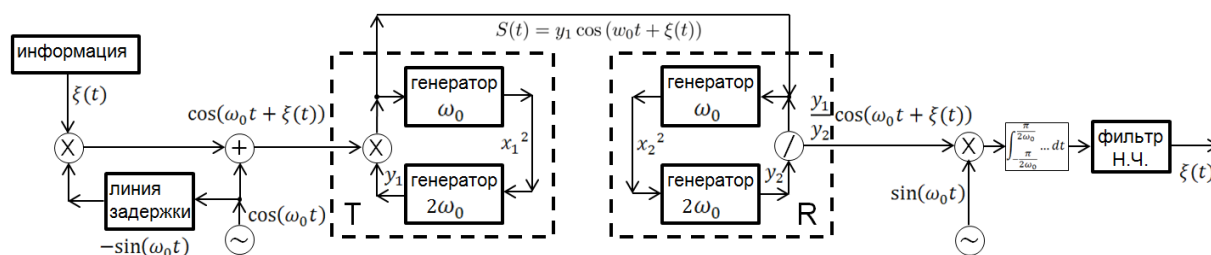


Рис. 1. Схема коммуникации

На рис. 1 показана схема, в которой в качестве передатчика и приемника может использоваться генератор (1) или (2). К сигналу генератора нелинейным образом подмешивается информация. Для того, чтобы извлечь информацию на передатчике нужно, чтобы он синхронизировался с сигналом. В работе проведен анализ влияния на синхронизацию и качество детектирования шумовых и частотных помех в канале связи.

Список литературы

1. Дмитриев А. С., Панас А. И. Динамический хаос: новые носители информации для систем связи. М.: Изд. Физ.-мат. лит. 2002. 251 с.
2. Короновский А. А., Москаленко О. И., Храмов А. Е. О применении хаотической синхронизации для скрытой передачи информации // УФН. 2009. Т. 179. Н.12.
3. Kuznetsov S. P. Example of a Physical System with a Hyperbolic Attractor of the Smale–Williams Type // Phys. Rev. Lett. 2005. Vol. 95. 144101.
4. Jalnina A. Yu., Kuznetsov S. P. Effect of noise in a nonautonomous system of alternately excited oscillators with a hyperbolic strange attractor // Phys. Rev. E. 2008. Vol. 77. 036220.
5. Kuznetsov S. P., Sataev I. R. Hyperbolic attractor in a system of coupled nonautonomous van der Pol oscillators: Numerical test for expanding and contracting cones // Phys. Lett. A 2007. Vol. 365. P. 97–104.
6. Isaeva O. B., Savin D. V., Seleznev E. P., Stankevich N. V. Hyperbolic chaos and quasiperiodic dynamics in experimental nonautonomous systems of coupled oscillators // Progress In Electromagnetics Research Symposium. Proceedings: St Petersburg, Russia, 2017. P. 3109–3113.
7. Jalnina A. Yu., Kuznetsov S. P. On the Realization of the Hunt–Ott Strange Nonchaotic Attractor in a Physical System // Tech. Phys. 2007. Vol. 52. 401–408.

Влияние внешнего магнитного поля на критические токи спинтронного антиферромагнитного осциллятора*

А. Ю. Митрофанова^{1,2}✉, *А. Р. Сафин*^{1,3}, *С. А. Никитов*^{1,2,4}

¹Московский физико-технический институт

²Институт радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН

³Национальный исследовательский университет «МЭИ»

⁴Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

✉ nasty_mitrofanova_2000@mail.ru

В последнее время появляется всё больше теоретических и экспериментальных исследований антиферромагнетиков (АФМ) со слабым ферромагнетизмом, что связано с высоким потенциалом их применения в спинтронных устройствах [1, 2]. В частности, в контексте реализации генераторов ТГц сигналов на основе АФМ осцилляторов [3] возникает вопрос о возможности использования АФМ со слабым ферромагнетизмом для уменьшения плотности критических токов возникновения автоколебаний.

В данной работе рассматривается осциллятор на основе гетероструктуры антиферромагнетик/нормальный металл (АФМ/НМ), где АФМ расположен на слое НМ, по которому протекает постоянный ток с плотностью j_{DC} , управляющий частотой осциллятора. К рассматриваемой структуре приложено внешнее постоянное магнитное поле величины H_0 , вектор которого лежит в лёгкой плоскости и без которого невозможно изучение автоколебательных свойств скошенных АФМ. Лёгкая плоскость при этом перпендикулярна плоскости образца. Для описания структуры АФМ/НМ используют маятниковое уравнение

$$\ddot{\varphi} + \alpha_{eff}\omega_{ex}\dot{\varphi} + \frac{\omega_e\omega_{ex} + \omega_H^2}{2}\sin 2\varphi + \omega_{DMI}\omega_H \sin \varphi = \tau, \quad (1)$$

где φ — угол наклона вектора антиферромагнитного момента в лёгкой плоскости, $\alpha_{eff} = \alpha_G + \alpha_{SP}$, α_G — коэффициент затухания Гильберта, α_{SP} — коэффициент связанного со спиновой накачкой затухания, ω_{ex} , ω_e , ω_H , ω_{DMI} — частоты полей: обменного, анизотропии, внешнего магнитного, взаимодействия Дзялошинского–Мория, $\tau = \sigma j_{DC}\omega_{ex}$, а σ — коэффициент спинового переноса.

*Работа поддержана РНФ, грант № 21-79-10396.

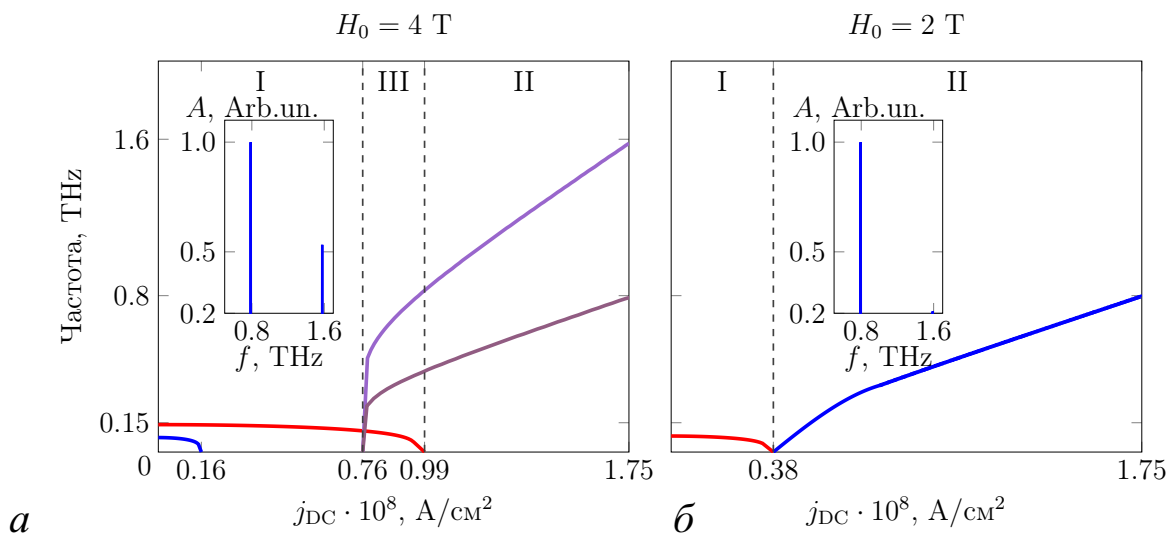


Рис. 1. Зависимость частоты от тока и спектр Фурье колебаний при $j_{DC} = 1,75 \cdot 10^8$ А/см² для гематита в двухмодовом (а) и одномодовом (б) режимах

Записав уравнение изоклины с горизонтальной касательной для (1) и отыскав точки её локальных минимумов φ_1^{\min} , φ_2^{\min} , можно найти выражения для критических токов срыва затухающих колебаний

$$j_{th}^{(1)} = \frac{1}{\sigma\omega_{ex}} \left(\omega_{DMI}\omega_H \sin \varphi_2^{\min} + \frac{\omega_0^2 + \omega_H^2}{2} \sin 2\varphi_2^{\min} \right), \quad (2)$$

$$j_{th}^{(2)} = \frac{1}{\sigma\omega_{ex}} \left(\omega_{DMI}\omega_H \sin \varphi_1^{\min} + \frac{\omega_0^2 + \omega_H^2}{2} \sin 2\varphi_1^{\min} \right), \quad (3)$$

где $\omega_0 = \sqrt{\omega_{ex}\omega_e}$. Важно, что количество критических токов срыва, как и количество мод генерируемого сигнала, зависит от величины магнитного поля (см. рис. 1). Таким образом, использование АФМ со слабым ферромагнетизмом для реализации генератора ТГц сигналов даёт возможность не только уменьшить плотность критических токов, но и управлять их значением посредством изменения внешнего магнитного поля, наряду с изменением режима автоколебаний.

Список литературы

1. *Sulymenko O. R. et al.* Terahertz-frequency spin Hall auto-oscillator based on a canted antiferromagnet // *Phys. Rev. Appl.* 2017. Vol. 8, no. 6. 064007.
2. *Boventer I. et al.* Room-temperature antiferromagnetic resonance and inverse spin-Hall voltage in canted antiferromagnets // *Phys. Rev. Lett.* 2021. Vol. 126, no. 18. 187201.
3. *Khymyn R. et al.* Antiferromagnetic THz-frequency Josephson-like oscillator driven by spin current // *Sci. Rep.* 2017. Vol. 7, no. 1. 43705.

Динамическая модель принятия решений в сети потребителей**М. А. Мищенко*✉, *В. В. Матросов*Национальный исследовательский
Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского✉ mischenko@neuro.nnov.ru

Поведение ансамблей и сетей связанных активных элементов или осцилляторов долгое время находится в центре внимания исследователей динамики сложных систем [1, 2]. Динамика современных технических, биологических, социоэкономических систем и процессов обладает исключительной сложностью. Изучение динамики развития сложных систем и их понимание в значительной степени опирается на наличие в них двух характерных процессов нелинейной динамики — конкуренции и синхронизации. Именно эти процессы, по-видимому, станут своеобразным ключом к пониманию динамики сложных, в частности, социоэкономических систем [3].

Изучению колебательных экономических и социальных явлений посвящено огромное число публикаций [4]. Анализ формирования общественных мнений в социальных системах также относится к этому классу проблем [5, 6].

Рассмотрена динамическая модель, которая может быть использована для описания поведения множества потребителей на рынке. Для моделирования потребителей мы будем использовать идеи теории систем автоматического регулирования [7], где отдельные лица могут регулировать некоторую переменную, отражающую их «мнение», к некоторому эталону или информации, которую они получают.

Рассмотрим простую модель, характеризующуюся только одной переменной, а именно ценой товара, которая может быть различной для каждого потребителя и отличной от среднерыночной цены. Принимая решение о покупке, потребители сравнивают рыночную цену с той, которую они считают «разумной» ценой в своем понимании. Эта так называемая «справедливая» цена формируется с учетом собственного опыта, информации, исходящей из мнений других потребителей, а также с учетом рыночной цены.

Изучена динамика сети потребителей с различными архитектурами связей на примере топологий «малый мир» [8] и масштабно-инвариант-

*Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект № FSWR-2023-0031)

ной [9]. В ходе анализа изучим влияние нелокальных связей на установление стационарных режимов.

Численное исследование позволяет изучить процессы формирования общественного мнения в социальных группах, позволяет увидеть некоторые закономерности структурообразования систем, например, возникновение шахматного паттерна при антагонистической связи. Дальнейшее исследование модели с различными распределениями начальных условий, различной силой и структурой связей может дать возможность увидеть новые закономерности развития общественного мнения, а также получить возможные способы управления этими процессами.

Список литературы

1. *Boccaletti S., Latora V., Moreno Y., Chavez M., Hwang D. U.* Complex networks: Structure and dynamics // *Phys. Rep.* 2006. Vol. 424, no. 4–5. P. 175–308.
2. *Arenas A., Diaz-Guilera A., Kurths J., Moreno Y., Zhou C.* Synchronization in complex networks // *Phys. Rep.* 2008. Vol. 469, no. 3. P. 93–153.
3. *Мотова М. И., Шалфеев В. Д.* От теории колебаний — к нелинейной динамике // *Известия вузов. ПНД.* 2014. Т. 22, № 1. С. 93–103.
4. *Jusup M., Holme P., Kanazawa K., Takayasu M., Romić I., Wang Z., Geček S., Lipić T., Podobnik B., Wang L., Luo W., Klanjšček T., Fan J., Boccaletti S., Perc M.* Social physics // *Phys. Rep.* 2022. Vol. 948. P. 1–148.
5. *McCullen N. J., Ivanchenko M. V., Shalfeev V. D., Gale W. F.* A dynamical model of decision-making behavior in a network of consumers with applications to energy choices // *Int. J. Bifurcation and Chaos.* 2011. Vol. 21, no. 9. P. 2467–2480.
6. *Матросов В. В., Шалфеев В. Д.* Моделирование экономических и финансовых циклов: генерация и синхронизация // *Известия вузов. ПНД.* 2021. Т. 29, № 4. С. 515–537.
7. *Матросов В. В., Шалфеев В. Д.* Нелинейная динамика систем фазовой синхронизации. Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского государственного университета, 2013. 366 с.
8. *Watts D. J., Strogatz S. H.* Collective dynamics of ‘small-world’ networks // *Nature.* 1998. Vol. 393, no. 6684. P. 440–442.
9. *Barabási A. L., Albert R.* Emergence of scaling in random networks // *Science.* 1999. Vol. 286, no. 5439. P. 509–512.

Влияние осмотического давления на рост раковых клеток на поверхности эпидермиса*

Н. А. Светлицына[✉], В. В. Тучин, Н. И. Семенова

Саратовский национальный исследовательский
государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

✉ nadyasvetiknadya@mail.ru

Формирование структур раковых клеток в эпидермисе можно исследовать с точки зрения процесса формирования пространственно-временных структур и самоорганизации [1]. Ранее, в нашей работе [2], исследовались особенности влияния дополнительного давления на динамику роста раковых клеток в условиях дополнительного осмотического давления. Дополнительное давление распространялось одинаково на всю поверхность эпидермального слоя кожи. Было выявлено, что если обычное давление P_0 увеличивается при помощи осмотического давления до ΩP_0 , то это приводит к замедлению роста областей с раковыми клетками. Полученные результаты показали необходимость дальнейшего изучения данной темы. Целью данной работы является установление особенностей влияния размера областей, на которые действует локализованное дополнительное давление, на динамику роста раковых клеток при неизменности размера поверхности эпидермиса. В качестве системы рассматривается двумерная клеточная решетка, представляющая собой слой эпидермальных клеток на базальной мембране [3]. Отношение раковых клеток к общему числу клеток в выбранной области пространства и времени обозначим как $\phi(x, y, t)$.

Система уравнений, описывающая динамику роста раковых клеток из работы [2], но с учетом дополнительного давления, управляемого параметром Ω , в безразмерном виде имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial t} &= -\nabla \cdot (\phi \vec{v}) + L \nabla^2 \mu + \Gamma(\phi), \\ \Omega \rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} &= \eta \nabla^2 \vec{v} - \nabla p + \nabla \cdot \Sigma - \zeta \vec{v}. \end{aligned} \quad (1)$$

где L — коэффициент переноса, ρ — плотность, μ — химический потенциал, $\Gamma(\phi)$ — закон распространения раковых клеток, \vec{v} — локальная скорость, ζ — коэффициент трения, Σ — тензор напряжений.

*Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России в рамках выполнения государственного задания (проект № FSRR-2023-0007).

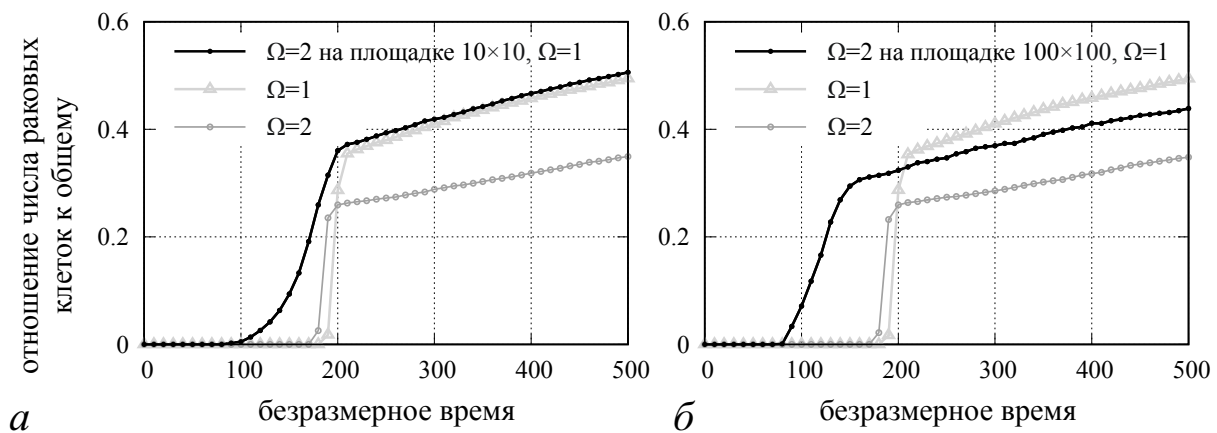


Рис. 1. Динамика роста отношения раковых клеток к общему числу эпидермальных клеток. На обоих графиках приведены зависимости, построенные для одинакового давления во всей системе при $\Omega = 1$ и 2. Черным показаны зависимости, соответствующие $\Omega = 1$ во всей системе с $\Omega = 2$ на отдельных участках в центре. Размер участков составлял 10×10 (а) и 100×100 (б). Остальные параметры приведены в [2]

Моделирование системы (1) проводилось в среде разработки Matlab. На рис. 1 приведены результаты динамики роста соотношения областей с преобладанием раковых клеток по сравнению с общим числом клеток для моделируемой системы (1). Параметр $\Omega = 1$ соответствует такому же давлению, как в работе [2] $\Pi = \Pi_0 \approx 10^{-3}$ Па. Введение параметра $\Omega \neq 1$ соответствуют давлению $\Pi = \Omega \Pi_0$. Общий размер решетки составлял 200×200 , что можно интерпретировать как поверхность эпидермиса размером 2×2 мм.

Увеличение размера площадок с локализованным давлением $2\Pi_0$ до 100×100 приводит к замедлению роста областей, преобладающих раковыми клетками, по сравнению с размером площадок с локализованным с давлением $2\Pi_0$, составляющим 10×10 . Также важно заметить, что приложение давления $2\Pi_0$, локализованного на центральной части размером 100×100 решетки также замедляет рост областей, преобладающих раковыми клетками, по сравнению с приложенным ко всей решетке давлением Π_0 .

Список литературы

1. Murray J. D. *Mathematical Biology*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1993. 770 p.
2. Семенова Н. И., Тучин В. В. Влияние осмотического давления на раковые клетки в трехмерной клеточной решетке и клеточном сфероиде // Известия вузов. ПНД. 2021. Т. 29, № 4. С. 559–570.
3. Hoshino T., Liu M.-W., Wu K.-A., Chen H.-Y., Tsuruyama T., Komura S. Pattern formation of skin cancers: Effects of cancer proliferation and hydrodynamic interactions // *Phys. Rev. E*. 2019. Vol. 99, no. 3. P. 032416.

Решение нелинейной задачи динамически нагруженного упорного подшипника скольжения

П. Е. Федотов¹✉, Н. В. Соколов^{2,3}

¹Казанский (Приволжский) федеральный университет,

Институт вычислительной математики и информационных технологий

²Казанский национальный исследовательский технологический университет

³НИИ турбокомпрессор им. В. Б. Шнеппа

✉ paulfedotov@mail.ru

Одним из основных вопросов при проектировании компрессора является обеспечение устойчивости движения ротора. В качестве опоры ротора традиционно выступают подшипники скольжения жидкостного трения. Авторами разработана трехмерная нестационарная периодическая термоупругогидродинамическая (ПТУГД) математическая модель работы упорного подшипника скольжения [1] воспринимающей действующую вдоль оси ротора силу. Подшипник имеет неподвижные подушки и вращающийся упорный диск, между которыми находится тонкий слой смазки. Геометрия подушки и подвод свежей смазки из межподушечных каналов должны обеспечить достаточную несущую способность для исключения касания подушек о диск во время различных режимов работы.

Под действием внешней нагрузки, упорный диск совершает перемещение вдоль оси ротора. Математическая модель предполагает две постановки:

- 1) прямую, при которой задается перемещение диска и на его основе определяются характеристики подшипника. Решение прямой задачи описано в работе [2];
- 2) обратную нелинейную, при которой задается изменение внешней нагрузки и определяются положение диска и характеристики подшипника, соответствующие этому положению.

В данной работе рассматривается обратная задача, которая основывается на совместном интегрировании уравнений движения ротора и гидродинамики упорного подшипника. Соотношение между положением диска, несущей способностью и внешней осевой силой выражается через уравнение динамики

$$m_p \frac{d^2 y}{d\tau^2} = P - F, \quad (1)$$

где m_p — масса ротора, y — координата смещения диска вдоль оси ротора, τ — время, P — несущая способность и F — внешняя осевая сила.

Осевая сила представляется в виде $F = F_{st} + F_d$, где F_{st}, F_d — статическая и динамическая составляющие силы, соответственно. Динамическая составляющая для исследований задаётся в виде синусоидальной функции, описывающей мягкий помпаж, и в виде кусочно-непрерывных функций, в случае жесткого помпажа. Учитывая вид уравнения, задачу можно разделить на две части. Стационарную, связанной со статической силой, и нестационарную, учитывающие динамическое изменение.

В случае стационарной задачи необходимо уравновесить стационарную силу F_{st} за счёт поиска определенного положения диска y и расчета несущей способности P . Для поиска положения решается оптимизационная задача $y : \min |P - F|$. Для её решения сначала производится локализация нуля функционала, а затем, для получения значения y , используется метод `zeroIn` [3]. Рассматриваемый функционал содержит несущую способность P , которая требует знания распределения температур и давления в подшипнике при фиксированном зазоре. Следовательно, на каждой итерации алгоритма минимизации производится решение прямой задачи. Суммарно, решение обратной задачи является трудной для вычисления и накладывает специальные условия на применяемые методы. В будущей статье будет обоснован выбор метода минимизации.

Решение нестационарной задачи производится аналогичным образом. После дискретизации по времени, уравнение (1) аппроксимируется неявной сеточной схемой. Построенная таким образом задача может быть сведена к оптимизационной, решение которой получается описанным для стационарной задачи способом.

Список литературы

1. Соколов Н. В., Хадиев М. Б., Федотов П. Е., Федотов Е. М. Трёхмерное периодическое термоупругогидродинамическое моделирование гидродинамических процессов упорного подшипника скольжения // Вестник Самарского университета. Аэрокосмическая техника, технологии и машиностроение. 2021. Т. 20, № 3. С. 138–151.
2. Fedotov P. E. Numerical solution of the one-sided compressor thrust bearing dynamics equation // CEUR Workshop Proceedings. 2021. Vol. 2837. P. 54–75.
3. Forsythe G. E., Malcolm M. A., Moler C. B., Moler C. Computer Methods for Mathematical Computations: Prentice-Hall Series in Computational Mathematics. Prentice-Hall, 1977. 259 p.

**Численный анализ аттракторов
математической модели дискретной RCL-линии
с туннельным диодом***

Д. Д. Федулов

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова

✉ mr.fedulow@yandex.ru

Рассмотрим математическую модель цепочки из N последовательно соединенных RCL -контуров, к левому концу которой подключен источник постоянного питания, а к правому – постоянная емкость и туннельный диод (см. [1]):

$$\dot{u}_1 = -N(v_2 - v_1), \quad \dot{v}_1 = -Nu_1 - \varepsilon v_1, \quad (1)$$

$$\dot{u}_n = -N(v_{n+1} - v_n), \quad \dot{v}_n = -N(u_n - u_{n-1}) - \varepsilon v_n, \quad n = 2, \dots, N-1, \quad (2)$$

$$\dot{u}_N = -\frac{N}{1 + \beta N}(\mu u_N - u_N^3 + v_N), \quad \dot{v}_N = -N(u_N - u_{N-1}) - \varepsilon v_N. \quad (3)$$

Здесь ε , β , μ – положительные параметры, являющиеся нормированными параметрами исследуемой цепи, которые удовлетворяют условиям:

$$0 < \varepsilon \ll 1, \quad \mu = \varepsilon \alpha, \quad \alpha = \text{const} > 0, \quad \beta = \text{const} > 0. \quad (4)$$

Рассмотрим задачу о периодических решениях системы (1)–(3). В работе [1] асимптотическими методами найдены орбитально устойчивые циклы системы (1)–(3). Изменение параметра ε может привести к потере устойчивости таких режимов.

В данной работе выполнялась серия численных экспериментов по нахождению периодических решений на основе асимптотических формул для различных значений N , α и β и рассмотрены их фазовые перестройки при увеличении ε . Показано, что когда ε не мало, сохраняется достаточно большое число сосуществующих периодических режимов, а также торов и хаотических аттракторов.

Список литературы

1. Глызин С. Д., Колесов А. Ю. Автоколебательные процессы в дискретной RCL -линии с туннельным диодом // ТМФ. 2023. Т. 215, № 3.

*Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-11-00209, <https://rscf.ru/project/22-11-00209/>.

Динамика пассивных частиц жидкости в вихревом паркете**А. М. Филимонова[✉], В. Н. Говорухин*

Южный федеральный университет

✉ afilimonova@sfedu.ru

Рассматриваются плоские течения невязкой несжимаемой жидкости. Объектом исследования является вихревой паркет [1] — структура, состоящая из распределенных вихревых пятен разной направленности, занимающая всю плоскость. Основное внимание уделяется изучению процессов адвекции пассивных частиц в соответствующем поле скорости. Математическая модель таких течений представляет собой систему двух уравнений в частных производных относительно завихренности $\omega = \omega(x, y)$ и функции тока $\psi = \psi(x, y)$:

$$\frac{D\omega}{Dt} \equiv \omega_t + \psi_y \omega_x - \psi_x \omega_y = 0, \quad -\Delta\psi = \omega. \quad (1)$$

Здесь нижний индекс обозначает производную по соответствующей переменной, t — время, x, y — пространственные переменные, Δ — оператор Лапласа. Систему (1) называют уравнениями Эйлера динамики невязкой несжимаемой жидкости, где первое уравнение описывает пассивный перенос завихренности, а второе связывает завихренность ω и функцию тока ψ . Компоненты вектора скорости $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ выражаются стандартным образом $v_1 = \frac{\partial\psi}{\partial y}$, $v_2 = -\frac{\partial\psi}{\partial x}$. Динамика пассивной частицы жидкости с координатами (x, y) описывается системой уравнений

$$x_t = -\frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad y_t = \frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

Вихревой паркет исследуется на всей плоскости: расчетной областью является прямоугольник, а динамика на всей остальной плоскости повторяется согласно условию периодичности по обоим пространственным переменным. Для численного решения задачи (1) используется бессеточный метод вихрей-в-ячейках, в основе которого лежат аппроксимация поля завихренности по его значениям в жидких частицах и представление функции тока в виде отрезка ряда Фурье по тригонометрическим функциям, удовлетворяющим периодическим краевым условиям. Схема метода и его алгоритм подробно изложены в работах [2–4].

*Работа поддержана РНФ, грант № 23-21-00371.

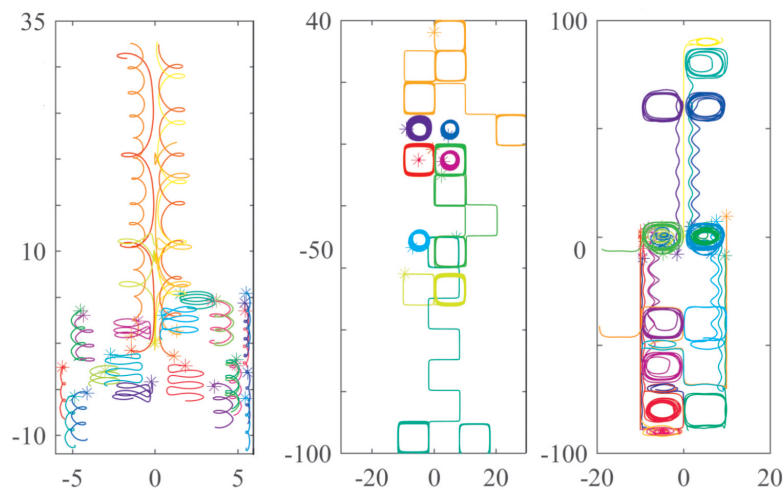


Рис. 1. Траектории пассивных частиц на всей плоскости в полях скорости различных вихревых паркетов

Исследование вихревых паркетов в описанной постановке начато в [1]. Показано, что в случае симметрии начальной конфигурации динамика является квазистационарной. При нарушении симметрии в зависимости от параметров начального распределения возможны: периодическая динамика, формирование новой квазистационарной структуры. В докладе продолжены исследования процессов переноса в вихревом паркете. В вычислительном эксперименте изучено влияние радиуса, направленности вихревых пятен и нарушения симметрии начального расположения вихрей на характер динамики конфигурации. Обнаружено, что при некоторых значениях параметров конфигурации, формируются стохастические паутины в области которых движутся частицы жидкости, см. рис. 1.

Список литературы

1. *Филимонова А. М.* Динамика и адвекция в вихревом паркете // Прикладная нелинейная динамика. 2019. Т. 27. № 4. С. 71–84.
2. *Говорухин В. Н., Филимонова А. М.* Расчет плоских геофизических течений невязкой несжимаемой жидкости бессеточно-спектральным методом // Компьютерные исследования и моделирование. 2019. Т. 11. № 3. С. 413–426.
3. *Филимонова А. М., Говорухин В. Н.* Анализ структуры вихревых течений и их изменений во времени // Вычислительная механика сплошных сред. 2021. Т. 14, № 4. С. 367–376
4. *Govorukhin V. N.* An extended and improved particle-spectral method for analysis of unsteady inviscid incompressible flows through a channel of finite length // Int. J. Numer. Meth. Fluids. 2023. Vol. 95, № 4. P. 579–602.

Взаимная синхронизация двух спинтронных осцилляторов общим током*

Л. А. Цырульникова^{1,2}✉, А. Р. Сафин^{1,2}

¹Национальный исследовательский университет «МЭИ»

²Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН

✉ mila.tsyrulnikova@gmail.com

В последнее время значительное внимание уделяется проектированию сетей спинтронных нано-осцилляторов (СО), которые могут быть использованы для аппаратной реализации нейроморфных вычислений. Связь многих СО ($N = 100..1000$) позволяет увеличивать выходную мощность в N раз и уменьшать ширину спектральной линии обратно пропорционально N [1]. Важной задачей при построении сети СО является их синхронизация, которая может достигаться за счет магнито-дипольной связи, спинволновой связи или связи общим током [2].

Целью данной работы является количественная оценка влияния различных механизмов связи на синхронизацию СО. Модель, исследуемая в работе представляет собой два ферромагнитных наностолбика соединенными общим слоем платины, через который пропускают постоянный электрический ток [3]. Аппроксимированная аналитическая модель двух нелинейных взаимосвязанных спин-поляризованным током СО, позволяющая оценить полосу синхронизма в зависимости от параметров системы, представлена в виде уравнений прецессии векторов намагниченности ($\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2$) в комплексных амплитудах $c_{1,2}(t)$:

$$\begin{aligned} \frac{dc_1}{dt} &= -i\omega_0 c_1 - iN |c_1|^2 c_1 - \Gamma_0 \left(1 + Q_1 |c_1|^2\right) c_1 + \\ &\quad + \Gamma_J \left(1 - Q_s |c_1|^2\right) c_1 + \Omega \left(1 - Q_{c1} |c_1|^2 - Q_{c2} |c_2|^2\right) c_2, \\ \frac{dc_2}{dt} &= -i\omega_0 c_2 - iN |c_2|^2 c_2 - \Gamma_0 \left(1 + Q_2 |c_2|^2\right) c_2 + \\ &\quad + \Gamma_J \left(1 - Q_s |c_2|^2\right) c_2 + \Omega \left(1 - Q_{c2} |c_2|^2 - Q_{c1} |c_1|^2\right) c_1, \end{aligned} \quad (1)$$

где $c_1(t), c_2(t)$ — амплитуды первого и второго осциллятора соответственно, $\omega_0 + N|c|^2$ — частота прецессии намагниченности, $\Gamma_0(1 + Q|c|^2)c$ — слабое, характеризующее положительное нелинейное затухание,

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект No 21-79-10396).

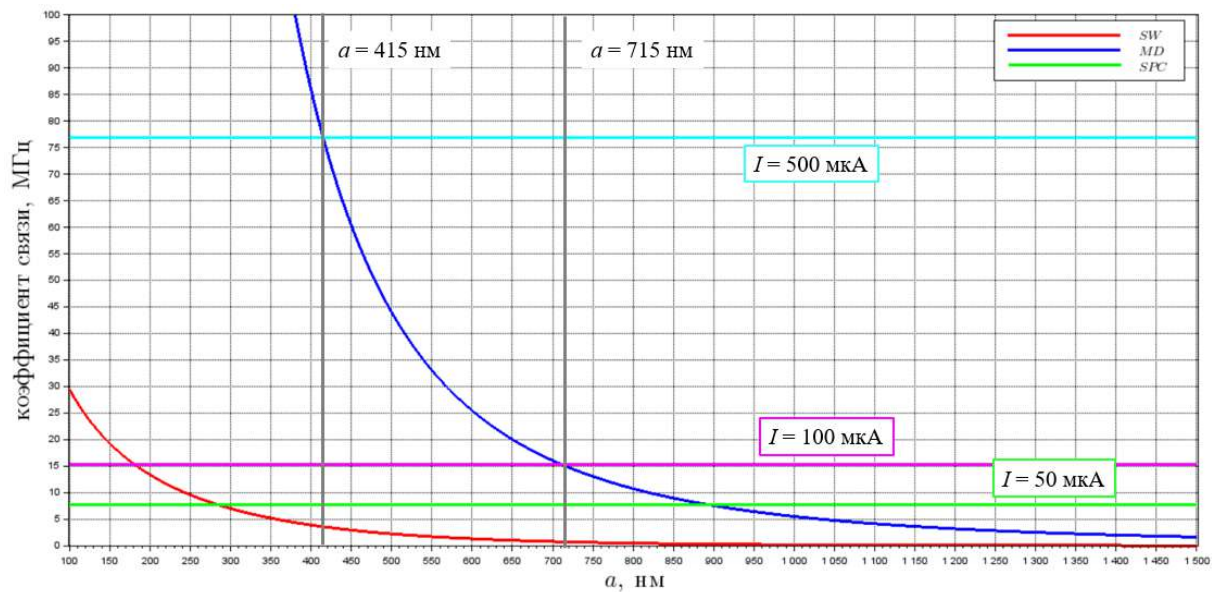


Рис. 1. Зависимость коэффициентов связи общим током (SPC), магнито-дипольной (MD) и спин-волновой (SW) связей от расстояния между осцилляторами a . Зависимость коэффициента связи общим током рассматривается при трех значениях силы тока

$\Gamma_J(1 - Q_s |c_1|^2)c$ — слагаемое, характеризующее компенсацию затухания колебательной системы, $\Omega(1 - Q_{c1} |c_1|^2 - Q_{c2} |c_2|^2)c_2$ — слагаемое, содержащее в себе связь двух осцилляторов общим током, Ω — коэффициент связи общим током. Зависимость коэффициентов связи общим током (SPC), магнито-дипольной (MD) и спин-волновой (SW) связей от расстояния между осцилляторами a представлена на рис. 1.

Таким образом, коэффициент связи общим током не зависит от расстояния между осцилляторами и увеличивается при увеличении силы тока, проходящего через слой платины.

Список литературы

1. Zahedinejad, M., Awad, A.A., Muralidhar, S. et al. Two-dimensional mutually synchronized spin Hall nano-oscillator arrays for neuromorphic computing // Nat. Nanotechnol. 2020. Vol. 15. P. 47–52.
2. Slavin A. and Tiberkevich V. Nonlinear Auto-Oscillator Theory of Microwave Generation by Spin-Polarized Current // Magnetism, IEEE Transactions on. 45. 1875–1918.
3. T. Taniguchi. Synchronization of Spin Torque Oscillators through Spin Hall Magnetoresistance // IEEE Transactions on Magnetism. Nov. 2017. Vol. 53, no. 11. P. 1–7. Art no. 3400907.

Моделирование пространственно-временных структур на фронте пламени в редуцированной модели горения водорода*

Э. О. Якупов[✉], В. В. Губернов, А. А. Полежаев

Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН

✉ yakupoveo@lebedev.ru

В химических системах, в частности, в системах горения, наблюдается множество пространственно-временных режимов [1, 2]. Так в зависимости от числа Льюиса, определяющего отношение эффективности переноса тепла к диффузии химических компонентов, на фронте горения могут возникать либо автоволновые, либо ячеистые структуры. В случае, когда число Льюиса меньше единицы, возникает ячеистая структура или, в терминах нелинейной динамики, диссипативная (тьюринговская) структура, что проявляется в формировании неоднородного распределения температуры в плоскости фронта пламени. Для числа Льюиса больше единицы на фронте пламени возникают неустойчивости распространения и пульсации, которые приводят к формированию различных нестационарных режимов горения.

На основе простой математической модели, полученной редукцией полной модели, описывающей кинетику горения водорода, были исследованы особенности формирования такого типа структур. Редукция детальной модели проводилась с учётом известных из эксперимента значений скоростей реакций. В результате была получена модель, содержащая три уравнения для наиболее значимых компонент — радикалов H , HO_2 и кислорода O_2 , а также четвёртое уравнение для температуры Θ . Последующая редукция этих четырёх уравнений до блока из двух уравнений, соответствующих критическим процессам в низкотемпературном слое на фронте, приводит к модели, способной объяснить возникновение на нём как спиральных волн, наблюдаемых в экспериментах, так и устойчивых структур, что было продемонстрировано при численном моделировании в двумерной области.

Модель для радикалов HO_2 и температуры Θ следующая:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = p - m \exp(-E/\Theta)u + D_u \Delta u, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = \gamma(m \exp(-E/\Theta)u - s(\Theta - \Theta_0)) + D_\Theta \Delta \Theta, \quad (2)$$

*Работа поддержана РНФ, грант № 22-21-00546.

где первое слагаемое в уравнении для радикала HO_2 соответствует скорости его производства, второе — рекомбинации радикала с энергией активации E . Слагаемое $s(\Theta - \Theta_0)$ возникает в качестве учета диффузии тепла поперёк слоя, которой мы пренебрегли, и описывает релаксацию температуры к равновесному для рассматриваемого слоя значению. Множитель γ отвечает за соотношению характерных времён. А за число Льюиса, в получаемой реакционно-диффузионной системе, отвечает соотношение коэффициентов диффузии D_Θ/D_u .

В рамках представленной модели были проведены численные расчеты на двумерной области, где, варьируя параметры системы, в качестве результатов были получены различные типы как волновых, так и ячеистых структур [3, 4].

Список литературы

1. *Walgraef D.* Spatio-temporal pattern formation: with examples from physics, chemistry, and materials science. Springer Science & Business Media, 2012.
2. *Ju. Y. & Maruta K.* Microscale combustion: Technology development and fundamental research // *Progress In Energy And Combustion Science*. 2011. Vol. 37. P. 669–715. DOI: 10.1016/j.peecs.2011.03.001.
3. *Якупов Э. О., Губернов В., Полежаев А. А.* Моделирование волновых структур на фронте горения // *Известия вузов. ПНД*. 2021. Т. 29, вып. 4. С. 538–548. DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-4-538-548.
4. *Якупов Э. О., Губернов В. В., Полежаев А. А.* Теоретическое исследование образования неоднородных структур на фронте горения на основе редуцированной модели // *Краткие сообщения по физике Физического института им. П. Н. Лебедева Российской Академии Наук*. 2022. Т. 49, № 10. С. 35–46.

Научное издание

НЕЛИНЕЙНЫЕ ДНИ В САРАТОВЕ ДЛЯ МОЛОДЫХ

Сборник научных трудов

Выпуск 17

Материалы XXX Всероссийской научной конференции
15–19 мая 2023, Саратов

Ответственный за выпуск: *М. В. Сысоева*

Оригинал-макет подготовили:

О. Н. Строганова, Д. А. Лачинова

Подписано к использованию 20.05.2023. Размещено на сайте 20.05.2023.
Формат 60x84/8. Усл. печ. л. 18,83 (19,25). Объем данных 7,5 Мб. Заказ 1-у.

Управление по издательской деятельности Саратовского университета
410012, Саратов, Астраханская, 83
<https://www.sgu.ru/structure/uprid> (<https://sgu.ru/node/136511>)