

ФАКУЛЬТЕТ НЕЛИНЕЙНЫХ ПРОЦЕССОВ
САРАТОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА им. Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО
САРАТОВСКИЙ ИНСТИТУТ ПОВЫШЕНИЯ КВАЛИФИКАЦИИ
И ПЕРЕПОДГОТОВКИ РАБОТНИКОВ ОБРАЗОВАНИЯ
ПРИ ПОДДЕРЖКЕ ФОНДА ИННОВАЦИОННЫХ НАУЧНО-ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ
ПРОГРАММ «СОВРЕМЕННОЕ ЕСТЕСТВОЗНАНИЕ»

Нелинейные дни в Саратове для молодых – 2012

8–12 октября, 27–29 ноября 2012

Материалы научной школы-конференции

Саратов, 2014

УДК 517.9; 530.1
ББК 22.311я43

Н 49 Нелинейные дни в Саратове для молодых – 2012: Сборник материалов научной школы-конференции. Саратов, 8–12 октября, 27–29 ноября 2012. Саратов: ООО ИЦ «Наука», 2014. 224 с.
ISBN 978-5-9999-1186-5

В настоящий сборник включены материалы традиционной, двадцатой, школы-конференции по нелинейной динамике и нелинейной физике. Сборник будет интересен как для студентов и аспирантов, так и для преподавателей высших учебных заведений естественно-научных факультетов.

Под редакцией профессора Ю.И. Лёвина

*Фотографии для раздела «Окно в науку» предоставлены
доцентами ФНИП СГУ А.А. Князевым и А.В. Савиным*

УДК 517.9; 530.1
ББК 22.311я43

ISBN 978-5-9999-1186-5

© РИО журнала
«Изв.вузов. ПНД», 2014
© Д.В. Соколов, 2014

Организаторы

- Факультет нелинейных процессов Саратовского государственного университета им. Н.Г. Чернышевского
- Саратовский институт повышения квалификации и переподготовки работников образования
- при поддержке Фонда инновационных научно-образовательных программ «Современное естествознание»

Программный комитет

Трубецков Д.И., председатель, чл.-корр. РАН, заведующий кафедрой электроники, колебаний и волн ФНП СГУ

Левин Ю.И., зам. председателя, профессор, декан ФНП СГУ заведующий кафедрой открытых систем

Шараевский Ю.П., д.ф.-м.н., заведующий кафедрой нелинейной физики ФНП СГУ

Рыскин Н.М., д.ф.-м.н., профессор кафедры нелинейной физики ФНП СГУ

Савин А.В., к.ф.-м.н., доцент кафедры нелинейной физики ФНП СГУ

Оргкомитет

Трубецков Д.И., председатель, чл.-корр. РАН, заведующий кафедрой электроники, колебаний и волн ФНП СГУ

Левин Ю.И., зам. председателя, профессор, декан ФНП СГУ

Рыскин Н.М., д.ф.-м.н., профессор кафедры нелинейной физики ФНП СГУ

Савин А.В., к.ф.-м.н., доцент кафедры нелинейной физики ФНП СГУ

Марнопольская В.П., вед. программист ФНП СГУ

Савин Д.В., доцент кафедры открытых систем ФНП СГУ

Кузнецов Н.Н., вед. программист ФНП СГУ

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

Секция школьников

Саратов, пансионат «Сокол», 8–12 октября 2012

8 октября, понедельник

Открытие школы-конференции

Лекции

Степанчук В.П., д.ф.-м.н., профессор, СГУ. С.П. Капица и Саратовский госуниверситет

Трубевцов Д.И., член-корр. РАН, профессор, СГУ. Алгебраический путь к симметрии

Организационное собрание участников

9 октября, вторник

Лекции

Гурия Г.Т., д.ф.-м.н., профессор, ГНЦ, Москва. Перистальтические процессы в природе

Храмов А.Е., д.ф.-м.н., профессор (СГУ, Саратов). Самоорганизация в открытых системах

Доклады школьников

Макарова Наталия, ЛПН, 9 класс. Прямолинейная траектория маятника на растяжимом подвесе

Шилин Александр, с.ш. № 2, г. Аркадак, 9 класс. Пиковая нагрузка в электросети

Ростунцова Алена, ЛПН, 9 класс. Кривые механического происхождения

Михеева Ксения, ЛМИ, 9 класс. Модели поверхностного натяжения

Бичан Евгения, ЛПН, 9 класс. Черные дыры во Вселенной

Тарасов Сергей, Грибков Дмитрий, с.ш. № 2 г. Аркадак, 10 класс.

Реактивный двигатель как основа космического полета

Карева Анна, Саркисова Роксана, ГЭЛ, 10 класс. Кинетика процессов переноса энергии между люминесцентными зондами белка

Азеев Николай, ЛПН, 11 класс. «Колыбелька Ньютона»: нестандартная демонстрация

Киселев Николай, лиц. № 37, 11 класс. Еще раз об эффекте Биффельда–Брауна

Куликов Александр, ЛПН, 11 класс. Форма вращающейся цепочки
Исаев Дмитрий, с.ш. № 59, 11 класс. Компьютерная цветометрическая
обработка изображений живописных произведений
Булыгина Анна, ЛПН, 11 класс. Колебательные реакции в химии
Постаногов Григорий, ЛПН, 11 класс. Колебательный контур
под воздействием многочастотного сигнала
Воличенко Анатолий, лиц. № 37, 11 класс. Логические элементы
и конструкции на их основе
Мартыненко Андрей, ЛПН, 11 класс. Поведение жидкости
в сильном электрическом поле
Решетников Дмитрий, гимн. № 7, 11 класс. Мыльный пузырь –
загадка природы

Интеллектуальная игра «Что? Где? Когда?»

10 октября, среда

Олимпиада по физике

Лекции

Иванченко М.В., д.ф.-м.н., профессор, ННГУ, *Канаков О.И.*
Динамика синтетических генных сетей

Разбор задач олимпиады

Круглый стол: ФНП и нелинейная наука

11 октября, четверг

Лекции

Трубецков Д.И., член-корр. РАН, профессор, СГУ. Самоподобие
и симметрия

Кузнецов С.П., д.ф.-м.н., профессор, СФ ИРЭ РАН.

Динамический хаос

Савин А.В., к.ф.-м.н., доцент, СГУ. Клеточные автоматы

Академбой

Просмотр научно-популярного фильма

12 октября, пятница

Лекции

Короновский А.А., д.ф.-м.н., профессор, СГУ. Нелинейная динамика
общества

Заккрытие школы-конференции, награждение победителей олимпиады
и авторов лучших докладов

Секция студентов

Саратовский университет, VIII корпус, 27–29 ноября 2012

27 ноября, вторник

Устные доклады**Секция «Нелинейная динамика»**

Селиверстова Е.С., ФНП, 3 курс. Сравнительный анализ некоторых динамических моделей мозга

Дорошенко В.М., ФНП, 4 курс. Связанные фазовые осцилляторы: от цепочки к кольцу

Фельк Е.В., ФНП, 4 курс. Влияние нелинейной диссипации «автоколебательного» типа на структуры типа «стохастическая паутина» в фазовом пространстве близких к консервативным систем
Васильев А.А., ФНП, 5 курс. Об одной модели распространения компьютерных вирусов

Боровкова Е.И., ФНБМТ, аспирант. Оценка степени фазовой синхронизации в реальном времени

Круглов В.П., ФНП, аспирант. Кольцевые системы с гиперболическим аттрактором типа Смейла–Вильямса

Аржанухина Д.С., ФНП, аспирант. Система трех неавтономных осцилляторов с поведением фаз, описываемым отображением с хаотической гиперболической динамикой

Кузнецов А.С., ФНП, аспирант. Аттрактор типа Смейла–Вильямса при параметрических колебаниях струны с нелинейной диссипацией и модулированной накачкой

Щербаков Р.В., СГТУ, 6 курс з/о. Применение фрактального анализа для поиска центров внимания произведений изобразительного искусства

Чумакова М.М., ФНП, 5 курс. Влияние отражений от удаленной нагрузки на конкуренцию мод в двухмодовой автоколебательной системе

Емельянов В.В., ФНП, аспирант. Взаимная синхронизация двух связанных автогенераторов с запаздыванием

Феоктистов А.В., физ. ф-т, инженер. Экспериментальное исследование синхронизации индуцированных шумом колебаний в генераторе с жестким возбуждением

Семенов В.В., физ. ф-т, аспирант. Экспериментальное исследование разрушения автоколебаний под действием аддитивного источника шума

Хорев В.С., ФНБМТ, аспирант. Метод определения времени задержки в автоколебательных системах с запаздыванием по временным рядам

Парамонов Ф.Б., ФНБМТ, магистрант. Зависимость улучшения прогноза от уровня измерительного шума при разных характеристиках аттрактора

28 ноября, среда

Устные доклады

Секция «Радиофизика и электроника»

Фунтов А.А., ФНП, 4 курс. Элементы линейной теории интерференционного режима электронно-волновой лампы

Краснова Г.М., ФНП, аспирант. Особенности длительного взаимодействия электронного потока в продольном магнитном поле с бегущими электромагнитными волнами (влияние пространственного заряда, управление эмиссией)

Каретникова Т.А., ФНП, аспирант. Расчет электродинамических параметров ЛБВ терагерцового диапазона с замедляющей системой типа симметричная двоянная гребенка в прямоугольном волноводе

Новиков С.В., ФНП, 4 курс. Моделирование нестационарных процессов в гиротроне с нефиксированной структурой поля на второй гармонике гирочастоты

Шихматова В.В., ФНП, 4 курс. Распространение плазмонных волн в слоистом металло-диэлектрическом волноводе с круглым поперечным сечением

Садовников С.А., ФНП, инженер. Исследование явления когерентного резонанса в электронных приборах с длительным взаимодействием (ЛОВ и ЛБВ)

Макаров В.В., ФНП, 4 курс. Синхронизация колебаний в полупроводниковой сверхрешетке, помещенной во внешний резонатор

Стендовая секция

Адилова А.Б., ФНП, 4 курс. Устройство пространства параметров и нетривиальные типы аттракторов в системе связанных дискретных осцилляторов Ресслера

- Аленькина А.С.*, ФНП, 5 курс. Пространственное развитие турбулентности в активных средах с абсолютной и конвективной неустойчивостью
- Балакин М.И.*, СГТУ, аспирант. Мультистабильные состояния в генераторе ван дер Поля с запаздыванием
- Бенедик А.И.*, ФНП, 5 курс. Теория диодного генератора с автоэмиссионным катодом
- Бирюкова Н.И.*, физ. ф-т, 4 курс. Статистические характеристики времен возврата Пуанкаре при локальном подходе в условиях воздействия шума
- Блюштейн Е.А.*, СГТУ, аспирант. Повышение разрешения томографических изображений с использованием алгоритма нерезкого маскирования
- Галицкая К.Г.*, ФНП, 4 курс. Распространение волн в радиотехнической цепочке – эквивалентной схеме спиральной замедляющей системы ЛБВ
- Григорьев А.В.*, СГТУ, аспирант. Методы нелинейного программирования в задаче нахождения наибольшей общей подпоследовательности
- Гулай А.П.*, физ. ф-т, 2 курс. Вынужденная синхронизация в системе связанных квазигармонических осцилляторов с асимметричной связью
- Дворак А.А.*, СГТУ, аспирант. Переходы к режимам хаоса и гиперхаоса в двух противофазно возбуждаемых осцилляторах Тоды
- Демина Н.В.*, ФНП, аспирант. Исследование однонаправленно связанных генераторов грубого хаоса и основанной на их синхронизации схемы широкополосной коммуникации
- Дулин Ю.В.*, ФНП, магистрант. Расчет электродинамических характеристик магнитостатических волн в ферромагнитных структурах с помощью пакета программ ComSol
- Ишбулатов Ю.М.*, ФНБМТ, 2 курс. Хаотический генератор с запаздыванием с квадратичной нелинейностью на микроконтроллере
- Кильдякова О.А.*, ФНП, 3 курс. Итиро Томонага и теория магнетрона
- Кочуров Л.А.*, СГТУ, аспирант, *Балакин М.И.*, СГТУ, аспирант. Генератор терагерцового излучения с внутрирезонаторным нелинейным элементом
- Ланина М.С.*, ФНП, 4 курс. Исследование отражательной способности решетки на основе 1-D магнетонного кристалла

Обычев М.А., ФНП, 5 курс. Об одной неавтономной кольцевой системе с нелинейными элементами, описываемыми моделью нелинейного резонансного взаимодействия волн, в которой реализуются феномены комплексной аналитической динамики

Павлов А.С., ФНП, аспирант. Обобщенная синхронизация в случае воздействия хаотического сигнала

на систему с периодической динамикой

Попова Е.С., ФНБМТ, аспирант. Наблюдение многомерных торов в эксперименте

Романенко Д.В., ФНП, аспирант. Генератор хаотического СВЧ сигнала на основе неавтономной кольцевой системы с ферромагнитной пленкой

Садовников С.А., ФНП, инженер. Исследование явления когерентного резонанса в клистронном автогенераторе (эксперимент и теоретический расчет)

Северюхина А.Н., ФНБМТ, аспирант. Применение методов сегментации для анализа динамической стационарности на примере временных рядов эталонных моделей

Сергеев К.С., физ. ф-т, 4 курс. Развитие хаоса в трехмерном отображении Эно по сценарию Шильникова

Сидак Е.В., ФНБМТ, аспирант. Способ выявления связи между двумя колебательными системами с аналитической оценкой статистической значимости

Терентюк А.Г., ФНП, 3 курс, *Бороздова М.*, физ. ф-т, магистрант. Моделирование распространения электромагнитной волны в нелинейной диспергирующей среде, содержащей электроны-осцилляторы

Фунтов А.А., ФНП, 4 курс. К вопросу о линейной теории усилителя на поглощении

29 ноября, четверг

Пленарное заседание

Лекции

Щеголев С.Ю., д.х.н., профессор, директор ИБФРМ РАН.

Современные взгляды на эволюцию: о роли горизонтального переноса генов

Устные доклады**Секция «Живые системы»**

Григорьев А.В., СГТУ, аспирант. Стохастическая модель репликации ДНК

Голубев А.А., ФНП, 5 курс. Определение токсичности плазмонно-резонансных наноматериалов на одноклеточных водорослях

Букина О.Г., ИБФРМ, аспирант. Потенциальная токсичность серебряных наночастиц при использовании в цитологических исследованиях

Кульминский Д.Д., ФНБМТ, магистрант, *Астахов О.В.*, ФНБМТ, аспирант. Монитор для диагностики состояния сердечнососудистой системы человека на основе расчета по унивариантным данным суммарного процента фазовой синхронизованности

Сысоева М.В., ФНБМТ, аспирант. Выявление качественного изменения поведения систем во времени различными мерами по временным рядам в приложении к определению начала эпилептического припадка

Назимов А.И., физ. ф-т, аспирант. Комбинированные алгоритмы распознавания ЭЭГ-паттернов

ДВЕ ЛЕКЦИИ О ДВУХ ПУТЯХ ИСТОРИИ СИММЕТРИИ

Трубецков Д.И.

Лекция 1. Самоподобие как вид симметрии

Симетрія ж.греч. соразмѣръ, соразмѣрность, равно (или разнo) подобіе, равномѣріе, равнообразіе, соответствіе, сходность, одинаковость, либо соразмѣрное подобіе расположенія частей цѣлого, двухъ половинъ; сообразіе, сообразность; противоравенство, противополобіе. Симетрическое расположеніе дома, фасада, разнообразное на обѣ половины. Полная симетрія докучаетъ, а изящное разнообразіе красить и тѣшить вкусъ.

В.И. Даль. Толковый словарь живого великорусского языка. В 4 т. Т. 4. М.: Изд-во «Русский язык», 1998. С. 186.

Начнем с определений

Известно, что Леонид Исаакович Мандельштам предостерегал от строгих определений. Он сравнивал их введение с пеленанием младенца в колючую проволоку, особенно на раннем этапе вхождения в ту или иную проблему. Однако, вопреки его предостережению мы дали определение уже в эпиграфе и дадим еще несколько, которые во многом носят описательный характер.

Первое из них принадлежит Герману Вейлю из его замечательной книги «Симметрия» [2, с. 37].

«Симметрия – в широком или узком смысле в зависимости от того, как вы определите значение этого понятия, – является той идеей, посредством которой человек на протяжении веков пытался постичь и создать порядок, красоту и совершенство».

Вот еще одно определение [3, с. 12, 13].

«Симметрия – это не число и не форма, но специальный вид преобразований, то есть некоторый способ “шевелить” объект. Если объект выглядит неизменным после преобразования, то данное преобразование представляет собой симметрию. Например, квадрат выглядит так же, как раньше, если его повернуть на прямой угол.

Эта идея – серьезно расширенная и усовершенствованная, лежит в основе того, как современная наука понимает Вселенную и ее происхождение... Такое понимание пришло из чистой математики; роль симметрии в физике проявилась позднее...

Говоря более широко, история симметрии иллюстрирует, как культурное влияние и историческую непрерывность великих идей можно выпукло отразить на фоне как политических, так и научных сдвигов и переворотов».

И, наконец, последнее определение симметрии из книги М. Шредера [4, с. 15–16], которую будем часто цитировать, а иногда и пересказывать.

«Под симметрией мы понимаем инвариантность при каких либо изменениях: нечто остается одним и тем же, несмотря на потенциальную возможность изменения. По-видимому, сильнее других бросается в глаза зеркальная симметрия, то есть инвариантность при “перемене местами” левой и правой сторон...

Трансляционная, поворотная и зеркальная симметрии, действуя совместно, создают форму кристаллов от алмазов до снежинок. И эти же три симметрии определяют многое из того, что доставляет нам эстетическое наслаждение в орнаментальных узорах... Среди всех симметрий, пышным цветом расцветающих в Саду Инвариантности, лишь один побег до недавнего времени не был взлелеен – буквально вездесущая инвариантность при изменении размеров, называемая самоподобием, или, если речь идет более чем об одном масштабном (скейлинговом) факторе, самоаффинностью...

Слово симметричный – древнегреческого происхождения и означает “соразмерный”, “упорядоченный”, то есть даже отдаленно не напоминает ни о чем хаотическом. Тем не менее, как это ни парадоксально, самоподобие... – это единственная из всех симметрий, которая порождает саму антитезу симметрии – хаос, состояние полного беспорядка и отсутствия какой бы то ни было соразмерности».

Эта лекция в большей степени отвечает третьему из приведенных определений и посвящена самоподобию.

Эйнштейн доказывает теорему Пифагора на основе подобия треугольников (или анализа размерностей?)

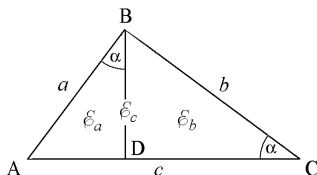


Рис. 1. Чертеж к доказательству теоремы Пифагора, которое предложил одиннадцатилетний Эйнштейн

Историки науки считают, что развитию математических способностей Эйнштейна в детстве способствовал его дядя Якоб – инженер по образованию. Он давал мальчику математические задачи, и тот испытывал удовольствие от их решения. В 1891 году Эйнштейн приобрел, по его словам, «священную книгу по геометрии» – геометрию Эвклида. Изучая ее, он почувствовал, что некоторые доказательства в книге

неоправданно сложны, в частности, доказательство теоремы Пифагора. Он предложил иное доказательство*.

Пусть мы имеем прямоугольный треугольник ABC и опустим высоту ВД из вершины прямого угла на гипотенузу AC (рис. 1). Высота делит большой треугольник на два меньших, подобных друг другу и большому треугольнику. Напомним правила подобия треугольников.

Треугольники подобны, если их собственные углы равны и сходственные стороны пропорциональны. Для подобных треугольников достаточно одного из следующих условий:

1) Три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого.

2) Два угла одного треугольника равны двум углам другого.

3) Две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника, а заключенные между ними углы равны.

Площади подобных треугольников пропорциональны квадратам сходственных линейных элементов (сторон, высот, диагоналей и т.п.)

Из рисунка видно, что все три треугольника подобны по условию 2. Как уже указывалось в евклидовой геометрии, площади подобных треугольников относятся как квадраты соответствующих линейных размеров, то есть площади \mathcal{E}_a , \mathcal{E}_b и \mathcal{E}_c (\mathcal{E} – начальная буква немецкого слова Ebene – площадь) трех треугольников связаны с их гипотенузами a , b и c соотношениями

$$\mathcal{E}_a = ma^2, \quad (1)$$

$$\mathcal{E}_b = mb^2, \quad (2)$$

$$\mathcal{E}_c = mc^2, \quad (3)$$

где m – безразмерный отличный от нуля коэффициент, один и тот же во всех соотношениях.

Из рис. 1 видно, что $\mathcal{E}_a + \mathcal{E}_b = \mathcal{E}_c$ или с учетом (1)–(3)

$$ma^2 + mb^2 = mc^2,$$

что приводит нас к теореме Пифагора

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

*Шредер [4, с. 25] пишет по этому поводу следующее. «Эту историю мне рассказал Шнейор Лифсон (из Института Вейцмана в Тель-Авиве), которому поведал ее ассистент Эйнштейна Эрнст Штраус, слышавший ее от самого старика Альберта».

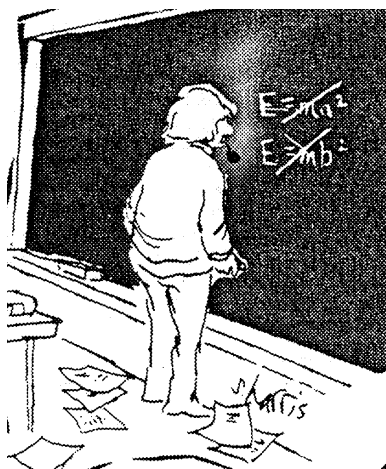


Рис. 2. Эйнштейн в процессе вывода своей знаменитой формулы $E = mc^2$ (с точки зрения карикатуриста) [4, с. 27]

Как восторженно пишет Шредер, теорема, которую доказал одиннадцатилетний ребенок, уже содержала в доказательстве принципы простоты и симметрии (частным случаем последней является самоподобие). «Однако истинная красота доказательства Эйнштейна не в том, что оно столь просто, а в том, что оно вскрывает истинную суть теоремы Пифагора: подобие и масштабируемость (скейлинг)» [4, с. 27].

Случайное буквенное совпадение соотношения (3) с последующим знаменитым открытием Эйнштейна об эквивалентности энергии и массы $E = mc^2$, следующим из инвариантности при преобразованиях Лоренца, породило забавную карикатуру (рис. 2).

Впрочем, Эйнштейн мог вывести теорему Пифагора и из соображений размерности.

Действительно, из размерности вытекает, что площадь E_c треугольника можно записать как произведение квадрата гипотенузы c^2 на произвольную функцию угла $f(\alpha)$. Аналогично можно представить и площади $\triangle ABD$ и $\triangle BCD$, в которых гипотенузами являются катеты треугольника ABC . Тогда $c^2 f(\alpha) = a^2 f(\alpha) + b^2 f(\alpha)$.

Может быть, Эйнштейн решал задачу и так.

Самоподобная расстановка ферзей, не бьющих друг друга.

Снежинка Коха и размерность для фракталов.

Канторово множество и ковер Серпинского

Если мы повторяем некую операцию снова и снова, но в меньшем и меньшем масштабе, то мы практически неизбежно приходим к самоподобной структуре. Повторяющаяся операция может быть алгебраической, символической или геометрической, как, например, в случае следующей шахматной задачи: «Как на шахматной доске заданных размеров должны быть расставлены ферзи, которые не бьют друг друга, то есть никакие два ферзя

не стоят на одной горизонтали, одной вертикали или одной диагонали доски?» Задача решается просто, если мы будем говорить о досках, размеры или порядок которых k равен целой степени какого-нибудь целого числа, то есть $k = n^m$, где m и n – целые числа.

Расстановка пяти не бьющих друг друга ферзей показана на рис. 3. Понятно, что легко найти решение для доски 25×25 , которую можно считать состоящей из $5 \times 5 = 25$ досок размером 5×5 . Следует просто оставить пустыми большую часть из этих 25 досок, за исключением пяти, соответствующих занятым на рис. 3 ферзьями. Действуя по аналогии, мы придем к доске размером $5^n \times 5^n$ с расставленными на ней 5^n ферзьями, не бьющими друг друга*. Расстановка безукоризненно самоподобна: выбирая одну из пяти непустых «поддосок» со стороны, составляющей одну пятую от всей доски, и увеличивая ее в пять раз, получим исходную доску. Множитель 5 – коэффициент подобия доски. Запомним цифру 5, поскольку именно на ней сомкнутся обе темы лекций.

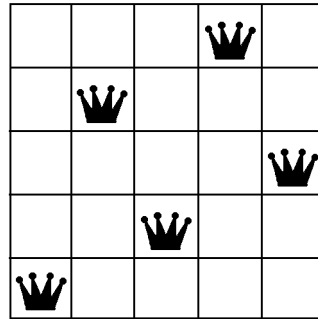


Рис. 3. Пять не бьющих друг друга ферзей на доске 5×5 [4, с. 29]

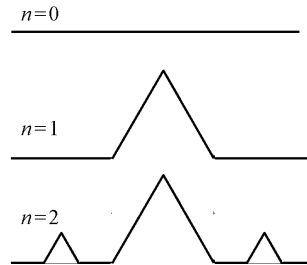


Рис. 4. Последовательность построения триадной кривой Коха

Следующий пример – кривая Коха, предложенная шведским математиком Хельге фон Кохом в 1940 году. Последовательность ее построения показана на рис. 4. Возьмем прямолинейный отрезок единичной длины $L(1) = 1$ ($n = 0$ на рис. 4), разделим его на три равные части и заменим среднюю часть двумя другими сторонами построенного на ее базе равностороннего треугольника. Получится так называемый образующий элемент, которому на рис. 4 соответствует $n = 1$. Длина всей построенной

*Шредер предлагает более романтическую постановку задачи: имеем пять спящих красавиц-королев, которых мы на пути к совершенному самоподобию пробудили ото сна и позволили безгранично множиться.

кривой $L(1/3) = 4/3$, поскольку каждое звено кривой, состоящей из четырех прямолинейных звеньев, равно $1/3$. На следующем шаге построения ($n = 2$) той же элементарной операции подвергался каждый отрезок длиной $1/3$. Иными словами, каждое прямолинейное звено заменяется уменьшенным образующим элементом и получается кривая, состоящая из 16 звеньев, длина которой $L(1/9) = (4/3)^2 = 16/9$. Действуя подобным образом, получим кривые для любых n . Кривая на любом конечном шаге n имеет длину $L(\delta) = (4/3)^n$, где $\delta = 3^{-n}$. При $n \rightarrow \infty$ длина звена $\delta \rightarrow 0$, а длина всей ломаной $L(\delta) \rightarrow \infty$. Эта кривая бесконечной длины нигде не дифференцируема, хотя и всюду непрерывна.

Впервые побочные функции, которые непрерывны, хотя ни в одной точке к ним невозможно провести касательную, были построены Карлом Вейерштрассом. Многие ужаснулись, но были и те, кто увидел в них нечто новое.

Первым был Людвиг Больцман, который в 1809 году писал в письме Феликсу Клейну, что недифференцируемые функции могли бы быть изобретены физиками, поскольку в статистической механике имеются проблемы, для решения которых «недифференцируемые функции абсолютно необходимы». В 1906 году Жан Перрен предсказывал, что «кривые, не имеющие касательных, являются общим правилом, а гладкие кривые, такие как окружность, – интересным, но весьма частным случаем» (цит. в обоих случаях по [4, с. 30–31]). Удивительно, не правда ли?

Сегодня, с легкой руки Мандельброта, мы называем такие недифференцируемые кривые просто фракталами.

Применяя образующий элемент Коха к равностороннему треугольнику и закрасив внутренность получившейся фигуры в черный цвет, приходим к сплошной звезде Давида (рис. 5, *а*). Бесконечная итерация приводит к снежинке Коха (пример на рис. 5, *б*). После n итераций периметр снежинки становится в $(4/3)^n$ раз больше периметра исходного треугольника, а при $n \rightarrow \infty$ становится бесконечно большим. Мы уже указывали на это, анализируя кривую Коха. Как же измерить периметр?

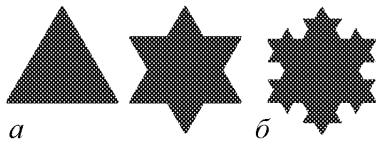


Рис. 5. *а* – исходная фигура и образующий элемент для снежинки Коха; *б* – промежуточный пример для снежинки

Для гладкой кривой мы заменили бы ее ломаной так, чтобы длина $L(\delta) = N\delta$, где N – число прямолинейных отрезков, уместающихся на кривой, а δ – длина отрезка. Тогда при $\delta \rightarrow 0$ $L(\delta)$ стремится к конечному пределу – длине L рассматриваемой кривой.

С фракталами так поступать нельзя: произведение $N\delta \rightarrow \infty$, потому что когда $\delta \rightarrow 0$, мы учитываем все более мелкие извивы фрактала. Но стремление к бесконечности происходит по определенному однородному степенному закону от δ , такому что при некотором значении показателя $D > 1$ произведение $N\delta^D$ остается конечным. При показателях, меньших D , произведение обращается в бесконечность, а при больших D стремится к нулю. Эту величину D называют размерностью Хаусдорфа–Безиковича, и она выражается формулой

$$D = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln N}{\ln(1/\delta)}.$$

Если при построении снежинки Коха шаг на n -м этапе построения равен $\delta = 1/3^n$, то число шагов $N = 4^n$. Следовательно,

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln 4^n}{\ln 3^n} = \frac{\ln 4}{\ln 3} = 1.26\dots$$

Величина D лежит между 1 и 2, и это понятно: бесконечно длинная кривая представляет собой нечто большее, чем просто одномерный объект, но в то же время она не двумерная фигура, так как такая кривая не покрывает никакой области на плоскости. Таким образом, то, что D может принимать дробные значения – разумно.

Очевидно, что для гладкой кривой $D = 1$, для гладкой поверхности* $D = 2$, для трехмерного тела $D = 3$. Интересно, однако, что размерность $D = 2$ может иметь и топологически одномерный объект – линия. Классический пример – асимптотически самоподобная кривая Джузеппе Пеано (работы которого анализировал Гильберт), проходящая сколь угодно близко от любой точки единичного квадрата (рис. 6). Поскольку n -й образующий элемент кривой Пеано состоит из $2^{2n} - 1$ звеньев длиной $1/2^n$, то ее размерность $D = 2$, как и полагается кривой, заполняющей плоскую фигуру.

Размерность Хаусдорфа–Безиковича полезна и для описания точеч-

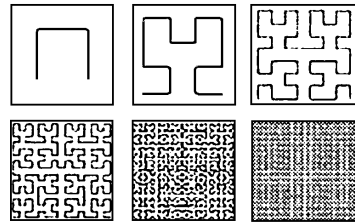


Рис. 6. Этапы построения кривой Пеано [4, с. 34]

*Для гладкой поверхности число N покрывающих дисков пропорционально $1/\delta^2$, где δ – диаметр малых дисков, необходимых для того, чтобы покрыть фигуру.

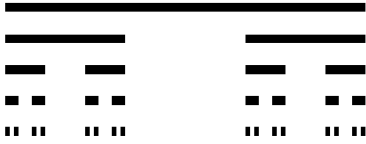


Рис. 7. Построение канторова множества

ных множеств – «кривых» нулевой длины. Знаменитый пример – множество, построенное Георгом Кантором (рис. 7). Для построения канторова множества возьмем отрезок $[0, 1]$, имеющий единичную длину, разделим его на три части и выбросим середину – открытый интервал $(1/3; 2/3)$. Будем поступать дальше аналогично: отрезки $[0; 1/3]$ и $[2/3; 1]$ делим на три части и выбрасываем середины. На k -м шаге описываемой процедуры получим 2^k оставшихся отрезков, не связанных друг с другом. Длина каждого отрезка равна $1/3^k$. В пределе, когда $k \rightarrow \infty$, число вырезанных отрезков неограниченно возрастает, а длина их стремится к нулю. К нулю же стремится и их суммарная длина. Действительно, суммарная длина всех вырезанных отрезков представляет собой сумму геометрической прогрессии со знаменателем $q = 2/3$ и первым членом $a_1 = 1/3$, то есть

$$S = \frac{a_1}{1 - q} = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \dots = \frac{1/3}{1 - 2/3} = 1.$$

Поскольку исходная длина отрезка равна 1, то мера ее остатка равна нулю. Но это не значит, что ничего нет.

В случае размерности Хаусдорфа–Безиковича роль радиуса элемента заполнения будет играть длина отрезка, оставшегося на k -м этапе построения, то есть $1/3^k$; число элементов укрытия равно числу отрезков, то есть 2^k . Тогда

$$D = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln 2^k}{\ln 3^k} = \frac{\ln 2}{\ln 3} = 0.63\dots$$

Размерность получилась дробной, принимающей значения между 0 и 1. Почему? Потому, что «канторова пыль» гораздо больше, чем точка с размерностью 0, и много меньше, чем отрезок прямой или кривой с размерностью 1. Теперь, пожалуй, можно дать и определение фрактала, следуя Бенуа Мандельброту.

Фракталом называется множество, размерность Хаусдорфа–Безиковича которого больше его топологической размерности.

Фракталом называется структура, состоящая из частей, которые в каком-то смысле подобны целому.

Первое определение весьма ограничительно, но строго. Второе подчеркивает важный признак фрактала: он выглядит одинаково, в каком бы

масштабе его ни наблюдать. И хотя неологизм «фрактал» был введен недавно, можно считать, что фрактальная геометрия появилась давно, а главными фигурами в развитии идеи фрактальной размерности были Феликс Хаусдорф (1868–1942) и Абрам Самуилович Безикович (1891–1970).

Естественен вопрос: «Существуют ли двумерные множества, подобные квантовой пыли?» Да, существуют.

Рассмотрим равносторонний треугольник и удалим перевернутый центральный равносторонний треугольник со стороной, равной половине длины исходного треугольника. Останется три треугольника со сторонами, вдвое меньшими стороны исходного треугольника. Если повторять эту операцию над неперевернутыми треугольниками, после n шагов получаем $N = 3^n$ треугольников со сторонами $r = r_0 2^{-n}$. Получающееся при бесконечном повторении этой процедуры множество называется ковром Серпинского (польский математик Вацлав Серпинский, 1882–1969). Размерность Хаусдорфа–Безиковича этого множества $D = \ln 3 / \ln 2 \approx 1.58$. Заметьте, что $D < 2$ несмотря на то, что ковер существует в двумерном пространстве (рис. 8).

Заметим, что самоподобие ковра Серпинского сочетается с классической симметрией – симметрией поворота, поскольку форма ковра не изменяется при повороте вокруг его центра на угол 120° или на любое целое, кратное 120° . Как замечает Шредер [4, с. 42], «такие симметрии, сочетающие в себе бесконечный скейлинг и поворот на конечный угол, наблюдаются во многих фрактальных построениях и в работах известного художника Морица Эшера». На рис. 9 приведен трехмерный вариант ковра Серпинского. Построение начинается с пирамиды, гранями которой являются четыре равносторонних треугольника (с правильного тетраэдра), из которой вырезается центральная перевернутая пирамида вдвое меньших размеров. Эта операция продолжается со всеми оставшимися пирамидами и т.д. Получается что-то вроде

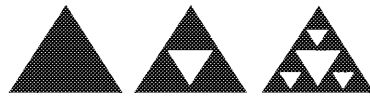


Рис. 8. Построение ковра Серпинского

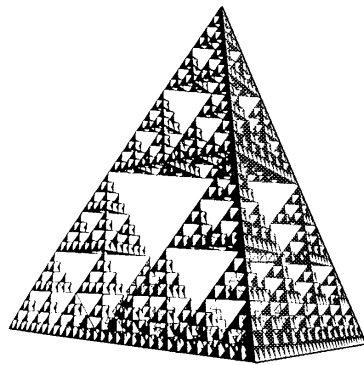


Рис. 9. Трехмерный вариант ковра Серпинского [4, с. 44]

ажурной башни (см. рис. 9). Размерность Хаусдорфа–Безиковича следует из самой процедуры построения: уже из первого этапа имеем $N = 4$ (четыре оставшихся пирамиды) и размер $r = 1/2$, поэтому $D = \ln 4 / \ln 2 = 2$. Фрактальная размерность оказывается целой, но на единицу меньше эвклидовой размерности несущего пространства $d = 3$.

Приведем любопытную цитату из книги [4, с. 43–45].

«Двумерные и трехмерные аналоги ковра Серпинского моделируют многие природные явления и рукотворные сооружения. Взять хотя бы Эйфелеву башню в Париже, спроектированную Густавом Эйфелем. Если бы вместо всемирно известной ажурной конструкции это сооружение было спроектировано в виде сплошной пирамиды, то на его строительство было бы израсходовано дополнительно невероятное количество железа без сколько-нибудь заметного увеличения прочности. Эйфель пошел по другому пути: он применил фермы, то есть структурные модули, элементы которых используют жесткость треугольника. (Треугольник в отличие от прямоугольника не может быть деформирован без деформации по крайней мере одной из его сторон.) Однако отдельные элементы больших ферм сами представляют собой фермы, которые в свою очередь состоят из ферм еще меньшего размера. Такая самоподобная конструкция гарантирует высокую прочность при низком весе. Конструкция готических соборов также выдает глубокую веру их строителей в принцип достижения максимальной прочности при минимальной массе. В то же время американский архитектор Бакминстер Фуллер (1895–1983) и его ажурные купола наглядно продемонстрировали всем, что прочность кроется не в массе, а в точках ветвления. Вопреки тому, что нам подсказывает здравый смысл, ковер Серпинского и аналогичные ему конструкции состоят сплошь из одних лишь точек ветвления. (В сколь угодно малой окрестности точки ветвления на кривой содержится более чем 2 точки)».

Степенные законы и самоподобие

Принцип подобия лежит в основе значительной части алгебры. Возьмем, например, однородную степенную функцию

$$f(x) = cx^\alpha,$$

где c и α – постоянные. Если $\alpha = 1$, то $f(x) = cx$ и при $c < 0$ функция описывает восстанавливающую силу линейной пружины. Если же $\alpha = -2$ и $c < 0$, то уравнение становится законом всемирного тяготения Ньютона $f(x) = cx^{-2}$. Эти простые степенные законы, встречающиеся в природе часто, являются самоподобными: если подвергнуть x преобразованию подо-

бия, умножив его на некоторую константу, то функция $f(x)$ по-прежнему будет пропорциональна x^α , правда с другим коэффициентом пропорциональности. Таким образом, закон Ньютона $F \sim r^{-2}$ справедлив независимо от значения величины r (будь r – длиной световой волны или длиной светового года). В законе Ньютона нет собственного, «встроенного» масштаба. Мы при желании можем растянуть или сжать гравитирующую Вселенную по своему усмотрению.

Закон обратных квадратов описывает и убывание мощности радиолокационного сигнала с расстоянием, чем во время второй мировой войны пользовались немецкие подводные лодки: они оценивали быстроту приближения авиации противника и успевали погрузиться прежде, чем вражеские самолеты начинали их атаковать. Американский физик Луис Альварес (1911–1988) изобрел устройство «Vixen» (лисица), предложив уменьшить интенсивность радиолокационного сигнала настолько, чтобы она была пропорциональна кубу расстояния до подводной лодки ($I \sim r^3$). Таким образом, при приближении самолета к подводной лодке интенсивность падала, создавая у моряков впечатление, что самолет удаляется. В то же время интенсивность отраженного сигнала от подводной лодки возрастала по мере приближения к цели.

Степенные законы описывают и спектры мощности различных шумов, в том числе самый загадочный из них – вездесущий, но часто труднообъяснимый фликер-шум $1/f$, где f – частота.

В мире фракталов степенные законы не обязательно должны быть целыми: они часто бывают дробными. Вот пример из человеческого восприятия. В весьма широком диапазоне амплитуд звуковых сигналов субъективная громкость $L \sim I^{0.3}$, где I – физическая интенсивность звука (мы вернемся к этой теме позднее). Так, для усиления звучания своей музыки вдвое рок-группа из 5 музыкантов должна увеличить свою численность в 10 раз (50 музыкантов) при условии, что «выходная мощность» каждого музыканта останется на прежнем уровне. Вот почему рок-группы так пристрастны к электронным усилителям. Итальянский экономист Вильфредо Парето (1848–1923), работая в Швейцарии, обнаружил, что вероятность того, что один человек в 10 раз богаче другого, подчиняется нормальному распределению, но вероятность стократного превышения благосостояния оказывается намного больше той, что предсказывается нормальным распределением. По мнению Парето, такой «утолщенный хвост» возникает, наверное, потому, что богатый может эффективнее умножать свое богатство, чем средний индивид, чтобы достичь более высоких доходов и большего

богатства. Таким образом, по Парето, число людей с доходом, превышающим некоторую большую величину, следует степенному закону. Похожий обратно-степенной закон был найден Джорджи Кингсли Ципфом (1902–1950) для частоты использования слов: длинные слова используются реже, чем короткие. Математическое выражение закона имеет следующий вид:

$$f(r) \approx \frac{1}{r \ln(1.78R)},$$

где f – частота использования слова; r – ранг слова – слово, стоящее на r -м месте в списке слов данного языка, расположенных в порядке убывания их употребления; R – общее число различных слов. Законы, подобные $f(r) \sim 1/r$ называются гиперболическими законами. Предположим, что для английского языка $R = 12000$ слов. Тогда относительные частоты слов высокого ранга (the, of, and, to и т.д. в порядке убывания рангов) приближенно равны 0.1; 0.05; 0.033; 0.025; и т.д. На рис. 10 показано, сколь точно соответствуют экспериментальные данные и расчеты по закону Ципфа [4, с. 66].

Интересны результаты применения закона Ципфа к языку отдельных писателей. У хорошего писателя с активным словарем примерно в 100000 слов 10 слов наивысшего ранга занимают 24% текста. В то же время в примитивном газетном английском со словарем в $R = 10000$ слов доля часто употребляемых слов около 30%, то есть не на много больше. Дело в том, что любому писателю трудно избежать таких слов, как the, of, and и to. У Шредера есть интересный пассаж, касающийся обезьяньего языка

[4, с. 67–69]. Если обезьяна «печатает» на пишущей машинке, на клавиатуре которой имеется N равновероятных клавиш с буквами и одна клавиша для пробела (с вероятностью p_0), то создаваемые обезьяной слова, то есть последовательности букв между пробелами, имеют частоты

$$f(r) \sim r^{-\frac{1+\ln(1-p_0)}{\ln N}}.$$

При $N=26$ и $p_0=1/5$ показатель величины r равен $(-1,068)$, что лишь немного меньше (-1) . Далее Шредер пишет следующее [4, с. 67–68].

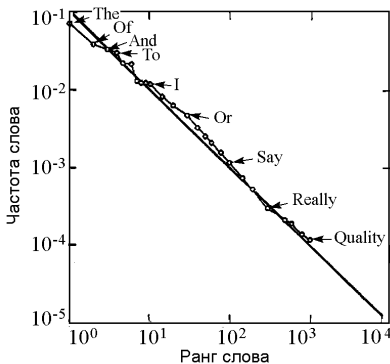


Рис. 10. Зависимость частоты слова от ранга слова: сплошная кривая – расчет по закону Ципфа

«В общем случае обезьяньи слова можно моделировать как канторово множество с фрактальной размерностью D , равной величине, обратной показателю дроби $1/r$. В нашем примере

$$D = \frac{1}{\frac{1 - \ln(1 - p_0)}{\ln N}} \approx 0.936.$$

Для алфавита из 9 букв и $p_0^{-1} = 110$ показатель равен (-1.048) , что соответствует “канторовой пыли” с $D \approx 0.954$. Арифметической моделью для слов (бесконечно большого количества слов) такого девятибуквенного “языка” служат все десятичные дроби между 0 и 1, в записи которых после запятой не встречается ни одного нуля (не считая нулей на концах конечных дробей)».

Поскольку обезьяний язык имеет фрактальную размерность, то он обладает и самоподобием. Действительно, если все слова этого языка умножить на 10 и отбросить целую часть или просто отбросить самую левую «букву» каждого слова, то получится еще один обезьяний язык. «Можно сказать, что слова такого рода языков растут на самоподобных деревьях: выберите любую ветвь, как бы высоко она ни росла и как бы ни мала была, и она окажется тождественной всему дереву. В этом особенно наглядно проявляется отличие обезьяньего языка от языков естественных: языки, на которых говорят и пишут живые люди, не растут на самоподобных деревьях, а если мы станем-таки настаивать на том, чтобы туда их повесить (Боже упаси!), то большинство ветвей окажутся мертвыми» [4, с. 68–69].

Альфред Лотка привел примеры обратно-степенных законов из области социологии. Один из них изложен в статье [5] и касается публикации научных статей в академических журналах. Смысл закона просто формулирует Э. Петерс в своей книге [6, с. 131]: «Чем больше статей опубликовал академик, тем более вероятна его публикация. Это происходит потому, что интенсивность публикаций подкрепляется учащимися студентами; большинство хорошо известных и старых членов академии могут быть соавторами, тем самым увеличивая свою продуктивность».

Золотое и серебряное сечения и гиперболический хаос

Итерация является одним из богатейших источников самоподобия. Если выбрано подходящее начальное значение, то повторное применение некоторой одной и той же операции – геометрической, арифметической или

просто абстрактной, производимой над символами, почти неизбежно приводит к самоподобию. Возьмем в качестве примера простое правило

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

При $F_0 = 0$ и $F_1 = 1$ эта рекуррентная формула порождает хорошо известную последовательность чисел Фибоначчи 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... «Что же в них самоподобного?» – спросите вы. Умножим каждое из чисел на 1.6 и округлим до ближайшего целого числа. В результате получим: 0, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ..., то есть за исключением нескольких первых членов (и, возможно, нескольких более поздних) ту же последовательность чисел Фибоначчи.

Рассмотрим числовую последовательность, образованную из отношений соседних чисел Фибоначчи при $F_1 = F_2 = 1$, то есть

$$\frac{F_n}{F_{n-1}} = \frac{1}{1}; \frac{2}{1}; \frac{3}{2}; \frac{5}{3}; \frac{8}{5}; \frac{13}{8}; \frac{21}{13}; \dots \quad (4)$$

или

$$\frac{F_n}{F_{n-1}} = 1; 2; 1.5; 1.66; 1.6; 1.625; 1.61538; \dots$$

К чему стремится эта последовательность, то есть к чему стремится последовательность F_{n+1}/F_n при $n \rightarrow \infty$? Для ответа на этот вопрос перепишем последовательность (4) иначе:

$$\frac{1}{1} = 1; \quad \frac{2}{1} = 1 + \frac{1}{1}; \quad \frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}; \quad \frac{5}{3} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}}, \dots,$$

то есть мы получаем, что это отношение можно представить в виде цепной дроби

$$\frac{F_n}{F_{n-1}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}}.$$

Причем $\lim_{n \rightarrow \infty} (F_n/F_{n-1}) = (1 + \sqrt{5})/2 = \tau$, где τ – число Фидия, знаменитое золотое сечение. Как доказать это? Вспомним задачу из «Начал»

Эвклида о делении отрезка в крайнем и среднем отношении. Суть задачи в следующем: разделить отрезок АВ точкой С в таком отношении, чтобы большая часть отрезка СВ так относилась к меньшей части АС, как отрезок АВ к своей большей части СВ (рис. 11), то есть $AB/CB = CB/AC = x$.

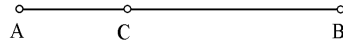


Рис. 11. Деление отрезка в крайнем и среднем отношении («золотое сечение»)

Тогда имеем $\frac{AC + CB}{CB} = \frac{CB}{AC} = x = 1 + \frac{AC}{CB} = 1 + \frac{1}{\frac{CB}{AC}} = 1 + \frac{1}{x}$.

Откуда получаем $x^2 = x + 1$; уравнение имеет решение $\tau = (1 + \sqrt{5})/2$. Приближенное значение золотой пропорции равно:

$$\tau \approx 1.6180339887498948482045868343656381177203\dots$$

В качестве удивительного примера золотого сечения рассмотрим следующую задачу.

Ускорение силы тяжести при удалении от земной поверхности описывается формулой $g_h = g_0 R^2 / (R+h)^2$, где h – высота над поверхностью Земли, R – ее радиус, g_0 – ускорение силы тяжести на поверхности Земли. При опускании тела вглубь Земли выполняется зависимость $g_{-h} = g_0(1 - h/R)$. Когда $g_h = g_{-h}$? Элементарные преобразования показывают, что равенство выполняется при $R = h(\sqrt{5} + 1)/2$.

Если вместо x подставить в квадратное уравнение τ , то получим $\tau^2 = 1 + \tau$ или $\tau = 1 + 1/\tau$. Подставляя в правую часть последнего выражения его значение, придем к представлению τ в виде «многоэтажной» дроби

$$\tau = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\tau}}$$

Продолжая такую подстановку в правой части бесконечное число раз, получим дробь с бесконечным количеством «этажей»

$$\tau = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}}$$

Таким образом, мы пришли к дроби F_n/F_{n-1} и тем самым доказали, что $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n/F_{n-1} = \tau = (\sqrt{5} + 1)/2$.

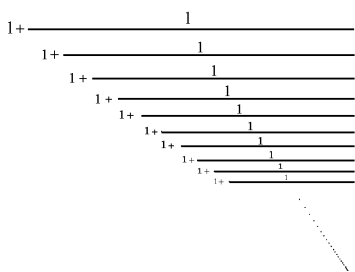


Рис. 12. Геометрическая самоподобная непрерывная дробь для величины золотого сечения [4, с. 88]

На рис. 12 приведено изображение периодической непрерывной дроби для величины золотого сечения, из которого видно, что она геометрически самоподобна*.

Заменив 1 в соотношении $\tau = 1/\tau$ на любое другое положительное число n , мы получим серебряные сечения τ_n , определяемые соотношением $\tau_n + n = 1/\tau_n$, которые также можно представить в виде цепных дробей.

Цепная дробь для данного положительного иррационального числа $\alpha < 1$ вычисляется следующим образом: положим $x_0 = 1/\alpha$ и применим итерацию $x_{n+1} = 1/\langle x_n \rangle_1$, где угловые скобки $\langle \rangle_1$ с индексом 1 означают дробную часть числа, то есть «взятие остатка по модулю 1» (например, $\langle \pi \rangle_1 = 0.14\dots$). Тогда непрерывная дробь для α запишется как $[[x_0], [x_1], [x_2], [x_3], \dots]$, где скобки $[]$ означают округление до ближайшего целого числа, а $[x_0]$ – целую часть числа α . Так как все члены непрерывной дроби для α (за исключением первого) равны 1, число α является неподвижной точкой и итерация $x_{n+1} = 1/\langle x_n \rangle$, называется также гиперболическим отображением.

Проитерлируем гиперболическое отображение, начиная с какого-либо серебряного сечения, на компьютере, производящем вычисления с любой конечной точностью. Результатом будет полнейший хаос.

Пример. Пусть начальным значением выбрано $(\sqrt{13}-3)/2 = [3, 3, 3, \dots] = 0.3027756\dots$ – серебряное сечение τ_3 . Гиперболическое отображение, вычисленное с помощью микрокалькулятора, дает (запишем только первую цифру после запятой) восемь раз подряд 0.3, а затем 0.2; 0.8; 0.2; 0.6; 0.4; 0.0; 0.2 и т.д. – полностью непредсказуемая последовательность с хаотическим хвостом [4, с. 89].

Откуда берется здесь этот хаос? В исследуемом отображении имеет место чувствительность к начальным данным. Если начальные данные известны с погрешностью ε , то погрешность в x_n будет расти с ростом n экспоненциально.

*Замечу, что Шредер называет золотым сечением и число $\gamma = (\sqrt{5}-1)/2$, то есть число, обратное τ , приводя для γ рассуждения, аналогичные представленным выше.

О подобии в физике

В физике даже на элементарном уровне подобие существенно упрощает решение разных задач. Вот несколько примеров. Возьмем физическую систему с потенциальной энергией U , которая представляет собой однородную функцию степени k от пространственных координат r_m

$$U(\alpha r_1, \alpha r_2, \dots) = \alpha^k U(r_1, r_2, \dots).$$

Изменим все пространственные координаты в α раз, а время – в β раз. Тогда все скорости изменятся в α/β раз, а кинетическая энергия – в α^2/β^2 раз. Но, если коэффициент α^2/β^2 равен множителю α^k потенциальной энергии, то лагранжиан физической системы умножается на постоянный коэффициент α^k , и уравнения движения остаются неизменными. Траектории движения всех материальных точек («частиц») остаются подобными исходным траекториям, изменяются только масштабы. Временные интервалы вдоль новой траектории изменяются в $\beta = \alpha^{1-k/2}$ раз, значения энергии – в α^k раз, а угловые моменты – в $\alpha^{1+k/2}$, поскольку они имеют ту же размерность, что и квант действия Планка (энергия, умноженная на время).

Применим эти общие рассуждения к конкретным системам.

1. Начнем с линейного осциллятора, потенциальная энергия которого представляет однородную квадратичную функцию, то есть $k = 2$. Выясним, зависит ли период колебаний такой системы (математический маятник) от амплитуды малых колебаний. Мы не будем решать никаких уравнений. Выше получено, что время при изменении масштаба изменяется в $\alpha^{1-k/2}$ раз, то есть при $k = 2$ – в α^0 раз. Отсюда вывод: все значения времени, в том числе и период колебаний, остаются неизменными, то есть собственная частота линейного осциллятора не зависит от амплитуды. Линейный осциллятор обладает свойством изохронности. В квантовой механике этому соответствует эквидистантность уровней энергии – расстояние между двумя любыми уровнями энергии равно $h\nu$, где h – постоянная Планка, ν – частота.

2. Рассмотрим теперь нелинейный осциллятор с восстанавливающей силой, подчиняющейся кубическому закону, то есть с однородным потенциалом четвертой степени ($k = 4$). Нам не удастся в этом случае найти решение в элементарных функциях. Но подобие показывает нам, что время должно изменяться как $\alpha^{1-k/2} = \alpha^{-1}$, то есть частоты пропорциональны α . Чем больше энергия осциллятора, тем больше его резонансная частота, чего и следовало ожидать от пружины с возрастающей жесткостью. Точнее говоря, резонансная частота такого нелинейного осциллятора изменяется как корень четвертой степени из его энергии.

3. В однородном силовом поле потенциальная энергия является однородной линейной функцией пространственных координат, то есть $k = 1$, и значения времени изменяются как $\alpha^{1-k/2} = \alpha^{1/2}$. Это действительно так, в чем убедился Галилей, который, по легенде, для увеличения продолжительности свободного падения в два раза должен был взбираться по ступеням Пизанской башни на вчетверо большую высоту*. По легенде, Галилей заметил, что большие и маленькие камни, брошенные с Пизанской башни, падают с почти одинаковой скоростью. В действительности Галилей скатывал шары по наклонным плоскостям, но... легенда о падающей башне живет своей жизнью, и ей нет дела до исторических фактов. Если пренебречь аэродинамическим сопротивлением, то время падения t прямо пропорционально корню квадратному из высоты h и не зависит от массы камня $t \sim h^{1/2}$. На справедливость этого закона никак не влияет масштаб входящих в него величин – почти никак, потому что если хотя бы взобраться на высокую гору, то притяжение Земли станет меньше. Поэтому существует естественный предел, ограничивающий масштабную инвариантность или самоподобие галилеевского закона $t \sim h^{1/2}$, а именно – радиус Земли.

4. В законе ньютоновского притяжения потенциальная энергия обратно пропорциональна расстоянию, то есть $k = -1$. Для круговых орбит вокруг массивного центра следует ожидать, что время будет изменяться как $\alpha^{1-k/2} = \alpha^{3/2}$. Мы перепоткнули с вами частный случай одного из основных законов небесной механики – третьего закона Кеплера о движении планет.

5. Более общие законы движения планет рассмотрел в своих «Началах» Исаак Ньютон, показав, что, если выполняется скейлинговое соотношение $\tau \sim r^n$, то для круговой орбиты радиусом r и периодом обращения τ гравитационный потенциал $U \sim r^{2-2n}$. Из нашего принципа подобия при $n = 3/2$ мы возвращаемся к закону $U \sim r^{-1}$, то есть к реальному миру падающих яблок и лун, движущихся по орбитам.

Великое озарение Ньютона состояло в том, что он увидел или понял: сила, с которой Земля притягивает яблоко, в $3600 = 60^2$ раз больше, чем сила, с которой Земля притягивает Луну, расположенную в 60 раз дальше от центра Земли. Благодаря этому озарению (а может быть, падению яблока), Ньютон вывел закон Всемирного тяготения, согласно которому сила гравитационного притяжения обратно пропорциональна квадрату расстояния. Забавно, что немецкое слово Einfall (озарение) произносится так же, как ein Fall (падение).

*Шредер считает, что это даже апокриф – произведение на библейскую тему, признаваемое недостоверным и отвергаемое церковью.

При $U \sim r^{-2}$ одна из возможных орбит имеет форму логарифмической спирали (в полярных координатах $r(\varphi) = r_0 e^{\gamma\varphi}$, где r_0 и $\gamma = \text{const}$), то есть самоподобного объекта. Применяя к радиусу-вектору, то есть к размеру спирали, преобразование подобия с коэффициентом S , получаем ту же спираль $Sr = r_0 e^{\kappa(\varphi + \ln S/\kappa)}$, повернутую на постоянный угол $(\ln S)/\kappa$. Угол φ определен только по модулю 2π , поэтому при коэффициентах подобия $S = e^{2\pi m/\kappa}$, где m – целое число, бесконечная спираль остается инвариантной, то есть логарифмическая спираль самоподобна, причем коэффициент самоподобия $S = e^{2\pi|m|/\kappa}$. *Логарифмическая спираль оказывается самоподобной при любом вещественном коэффициенте подобия, если пренебречь вращением.*

Независимость от масштаба весьма желательна при проектировании приемно-передающих антенн широкого диапазона длин волн. При использовании круговых поляризованных волн поворот антенны на любой угол никак не отразится на коэффициентах усиления и направленного действия антенны. Если мы придадим антенне форму логарифмической спирали (хорошо бы из сверхпроводящей проволоки), то она одинаково хорошо будет работать на всех длинах волн в любом заданном диапазоне. Такие антенны существуют. Они похожи на конусообразные диванные пружины.

Природа тоже использует самоподобие логарифмической спирали. У многокамерного моллюска наутилуса каждая камера представляет собой увеличенную копию предшествующей, причем для любых смежных камер коэффициент подобия остается постоянным. Как следствие, наутилус растет по логарифмической спирали.

Мы увлеклись гладкой самоподобной кривой. Вернемся к преобразованиям подобия. Софус Ли (1842–1899), а позднее Джордж Дэвид Биркофф (1884–1944) занялись поиском групп преобразований, которые оставляли бы инвариантными дифференциальные уравнения, а следовательно, и их решения, получившие название подобных (или инвариантно-групповых) решений. Предположим, что для решения $\varphi(x, y)$ существует следующий предел:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^a \varphi(\varepsilon^b x, \varepsilon^c y) = \varphi(x, y). \quad (5)$$

Тогда подобное решение $\varphi(x, y)$ подчиняется масштабному закону

$$\varphi(x, y) = \lambda^a \varphi(\lambda^b x, \lambda^c y),$$

который следует непосредственно из равенства (5) и, более того, является обобщением соотношения (5). К теории групп привел и алгебраический путь к симметрии (Лекция 2).

Однако преобразование подобия не всегда так просто, как было показано на некоторых примерах. Поглощение, трение и другие механизмы энергопотерь создают трудности при попытке их масштабировать. Проблемы возникают при проектировании концертных залов и оперных театров, в СВЧ электродинамике и в гидродинамике, хотя они решаемы.

Масштабирование в психологии

В психологии измерения фактически отсутствовали до тех пор, пока физиолог Э.Г. Вебер (1795–1878), брат физика Вильгельма Вебера (1804–1891), не провел тщательные исследования звуковых и тактильных ощущений, заложив основы науки об ощущениях. Закон Вебера звучит так: увеличение интенсивности раздражителя, необходимое для того, чтобы вызвать едва заметное усиление ощущения, не является раз и навсегда заданной величиной, а зависит от отношения приращения интенсивности раздражителя к его первоначальной интенсивности. Позднее физик и философ Г.Т. Фехнер (1801–1887) переформулировал закон, который стал называться законом Вебера–Фехнера, и указал область его применимости. Фехнер заложил основы экспериментальной эстетики, исследуя, какие формы и размеры приятны глазу. Современным психологам удалось ввести в психологию измерения, почти столь же однозначные, как и в физике, появилась новая дисциплина – психофизика, а психоакустика и психовизуальные исследования стали ее разделами. Стивенс [7] ввел отношение масштабов для субъективных параметров (громкость, яркость и т.п.), а также установил простые степенные соотношения между этими субъективными параметрами и такими физическими величинами как поток энергии, интенсивность и т.п. В чем суть обнаруженного? Для того чтобы громкость звука возросла вдвое, его интенсивность I должна увеличиться в 10 раз. Это верно для большей части диапазона интенсивности звука, воспринимаемого человеческим ухом без болевых ощущений (диапазон охватывает более 12 порядков величины при средних звуковых частотах). Так как $\lg 2 \approx 0.3$, мы получаем следующий степенной закон для громкости как функции от интенсивности звука:

$$L \sim I^{0.3},$$

о чем мы уже упоминали в связи с тем, что степенной закон может иметь и дробную степень. Входящие в психофизические степенные ряды показатели, такие как число 0.3 в приведенном соотношении, не универсальны,

но специфичны для исследуемого ощущения (например, для субъективной яркости, кажущегося веса груза или видимой длины) и детально проанализированы психофизиками. Таким образом, универсальность психофизике не присуща.

Самоподобие в музыке

Древние греки обнаружили, что деление струны на две равные части дает приятный для слуха музыкальный интервал, называемый ныне октавой. Соответствующее соотношение физических частот равно $2 : 1$. Другой приятно звучащий интервал – чистая квинта – с соотношением частот $3 : 2$. У пифагорейцев возник вопрос, можно ли получить целое число октав из одной лишь квинты путем повторного применения простого отношения частот $3 : 2$? Или иначе, можно ли найти решение уравнения

$$\left(\frac{3}{2}\right)^n = 2^m$$

в целых числах m и n ? Из теории чисел известно, что уравнение $3^n = 2^k$ не имеет решений в целых числах при $n > 0$. Древних греков сие не остановило, и они нашли хорошее приближенное решение

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{12} \approx 2^7,$$

основанное почти на точном равенстве $3^{1/19}$ и $2^{1/12}$.

Систематический подход к получению таких почти точных равенств сводится к записи отношения логарифмов двух целых оснований данного уравнения в виде непрерывной дроби*:

$$\frac{\ln 2}{\ln 3} = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \dots}}}}$$

*Непрерывные дроби, как правило, дают хорошие рациональные аппроксимации иррациональных чисел, например, $\pi \approx 355/113$. Это приближение, использующее не очень большие целые числа, было известно еще древним китайцам.

Обрывая непрерывную дробь на пятом члене, мы получаем хорошее приближение для музыкальной квинты:

$$\frac{\ln 2}{\ln 3} \approx \frac{12}{19},$$

откуда следует, что $(3/2)^{12} \approx 2^7$.

Чтобы, скажем, на фортепьяно (или других инструментах с фиксированным набором тонов) можно было играть в различных тональностях, частоты этих тональностей должны выбираться из одного и того же основного набора частот. Это подвигло Иоганна Себастьяна Баха разработать темперированный строй, основанный на полутоне $2^{1/12}$. Настроенный в соответствии с темперированной гаммой музыкальный инструмент имеет частоты, близкие к следующим кратным самого низкого тона:

$$1, 2^{1/12}, 2^{2/12}, 2^{3/12}, 2^{4/12}, 2^{5/12} \dots$$

Эти частоты имеют самоподобную последовательность с коэффициентом подобия $2^{1/12}$. Если бы все эти ноты прозвучали одновременно, то инструмент создал бы акустический выход, близкий к самоподобной функции Вейерштрасса.

Джон Робинсон Пирс и замечательные соотношения между числами 3, 5 и 7

Джон Робинсон Пирс – один из великих инженеров-провидцев в области вакуумной СВЧ-электроники*. Им опубликовано большое число известных в науке книг и статей по фундаментальным вопросам СВЧ-электроники. Ему принадлежит также реализация нескольких проектов синхронных спутников Земли. Именно он придумал термин «транзистор». Он написал 22 научно-фантастических рассказа, несколько научно-популярных книг: «Почти все о волнах», «Электронны, волны, сообщения» (переведены на русский язык), «Волны и сигналы: наука коммуникаций», «Истоки спутниковых коммуникаций», «Наука о музыкальном звуке». В частности, он заинтересовался вопросом о том, нельзя ли заменить отношение частот октавы 2 : 1 отношением частот 3 : 1 (соответствующий интервал Пирс предложил назвать

* Впрочем, Шредер [4, с. 165] приписывает Пирсу фразу: «Природе отвратительны вакуумные лампы», сравнивая ее с высказанной в 1550 году Томасом Кранмером, архиепископом Кентеберийским, «природа не терпит пустоты» (Natural reason abhorreth vacuum)

тритавой) и создать самоподобный (равнотемперированный) ряд с отношением частот, в которых участвуют 5 и 7 [8]. Вопрос стоит так: существует ли корень целой степени N из числа 3 ($3^{1/N}$) – такой, что его целыми степенями хорошо аппроксимируются отношения $5/3$ и $7/5$ (по аналогии с аппроксимациями $3/2 \approx 2^{7/12}$ и $5/2 \approx 2^{9/12}$ хорошо темперированного строя Баха)? Раскладывая отношение $\ln 3 / \ln 5$ в непрерывную дробь и оборвав ее на числе 6, получим

$$\frac{\ln 3}{\ln 5} \approx \frac{13}{19},$$

то есть $3^{1/13} \approx 5^{1/19}$. Это означает, что начальное отношение частот $3^{1/13} \approx 1.088$ представляет собой подходящий «полутон» для построения музыкального строя, который дает хорошее согласие, по модулю тритавы, с нотами, порождаемыми отношением частот $5 : 3$. В самом деле, $3^{6/13}$ совпадает с $5 : 3$ с точностью до 0.4%.

Разложение $\ln 3 / \ln 7$ в непрерывную дробь дает аппроксимацию $3^{1/13} \approx 7^{1/23}$. Таким образом, число $3^{1/13}$ выступает как предпочтительный начальный интервал для построения хорошо темперированного строя Пирса. Разница между $7/3$ и одной из степеней основания $3^{1/13}$, а именно числом $3^{4/13}$ составляет всего 0.16%. Отношения частот снова образуют самоподобную последовательность

$$1, 3^{1/13}, 3^{2/13}, 3^{3/13}, \dots$$

Говорят, что слушатели, тестирующие музыкальный строй Пирса, упорно отдавали предпочтение сочинениям, написанным в традиционной манере.

Еще о степенных законах

Приведем еще несколько примеров того, как степенные законы с целыми и дробными показателями являются источниками самоподобия. Самоподобие имеет место для объектов, которые растут (например, города), и для объектов, разбитых на куски (раздробленные камни). Отсутствие у данного объекта (вида объектов) внутреннего масштаба – единственное необходимое условие для того, чтобы в некотором диапазоне размеров выполнялся степенной закон.

В космическом пространстве средняя частота, с которой различные виды межпланетных обломков врезаются в земную атмосферу, обратно пропорциональна квадрату диаметра падающего тела, причем данное соотно-

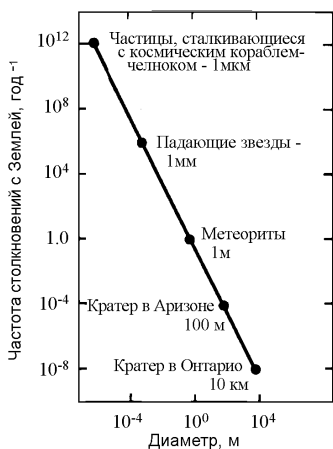


Рис. 13. Частота столкновений метеороидов с Землей как функция диаметра частиц [4, с. 152]

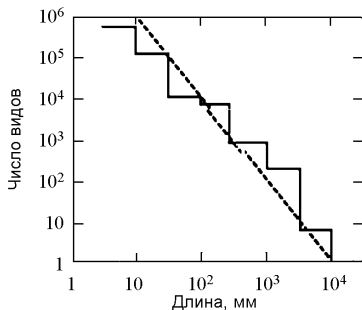


Рис. 14. Число видов сухопутных животных как функция длины их тела

временно от того, в каком ключе оно написано, будет приятным для слуха только в том случае, если в нем присутствуют изменения тональности во многих масштабах частот и изменения ритма хотя бы в нескольких временных масштабах. Иоганн Себастьян Бах в своих Бранденбургских концертах, не подозревая о том, использовал однородную степенную функцию

$$f(x) \approx cx^{-1},$$

которая, как упоминалось, называется гиперболическим законом.

шение выполняется в диапазоне, охватывающем более 10 порядков величины (рис. 13).

Луис Альварес (о нем шла речь в связи с борьбой с подводными лодками) и его сотрудники использовали рис. 13 для подтверждения гипотезы Альвареса о внезапной гибели динозавров 65 миллионов лет назад. По Альваресу, причиной явилось падение гигантского метеорита, которое подняло в воздух огромное количество пыли, закрыв солнечный свет и тем самым лишив динозавров необходимой для выживания зелени. Нетрудно увидеть аналогию с моделью «ядерной зимы».

Говоря о динозаврах, интересно обратиться к рис. 14 [9], на котором представлено приблизительное распространение сухопутных животных в зависимости от длины тела животного. Из анализа следует степенной закон с показателем (-2) , справедливый в диапазоне, охватывающем диапазон изменения длины от 1 мм до 10 м.

Масштабная инвариантность может даже помочь объяснить особенности нашего восприятия музыки. Музыкальное произведение, неза-

Именно так может быть аппроксимирован спектр мощности $f(x)$ в довольно широком диапазоне (квадрат преобразования Фурье) относительных частотных интервалов x между последовательными нотами. Перепишем исходную функцию в виде

$$\ln f(x) = \text{const} - \ln x,$$

где x измеряется в полутонах. Видно, что в двукратно логарифмической системе координат ($\ln f$ от $\ln x$) данные ложатся на прямую с наклоном (-45°) .

Степенному закону подчиняется и спектр амплитуд (или мгновенных громкостей) музыки Баха. Причем показатель такой же, как в законе для спектра частотных интервалов (рис. 15).

Хочется задать вопрос: «Почему при сочинении музыки Бах использовал гиперболический степенной закон?». Но это некорректный вопрос. Бах стремился к тому, чтобы его музыка была интересна для слушателя. Правильнее спросить: «Почему спектры частотных интервалов и амплитуд интересных музыкальных произведений (хотя бы некоторых) являются гиперболическими?». На этот вопрос дает ответ, в какой-то мере, теория «эстетической ценности» Джорджа Дэвида Биркгофа (1884–1944). Суть теории в следующем: спектр мощности «эстетической» функции не должен вести себя ни как утомительно однообразный «коричневый» шум с зависимостью от частоты f^{-2} , ни как совершенно непредсказуемый белый шум с зависимостью f^0 . На бытовом языке сказанное переводится так: произведение искусства приятно и интересно лишь при условии, что оно не слишком предсказуемо и правильно, и в то же время не таит в себе слишком много сюрпризов.

Показатели, встречающиеся в большинстве музыкальных произведений, находятся, как обнаружил Восс в цитируемой нами статье [10], посередине интервала $(0, -2)$, что дает гиперболический закон. Иллюстрация сказанного взята из книги Шредера и представлена на рис. 16 и 17 [4, с. 159 и 161].

Шредер [4, с. 158] приводит любопытное высказывание ван дер Поля о музыке Баха: «Это великая музыка, потому что она неотвратима (подразумеваемая $\alpha < 0$) и вместе с тем неожиданна ($\alpha > -2$)».

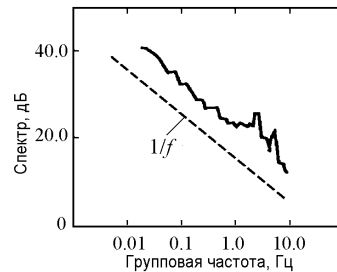


Рис. 15. Спектр вариаций амплитуды для Первого Бранденбургского концерта Баха [10]

Поскольку спектр мощности любого шума, подчиняющегося однородному степенному закону (f^α), самоподобен, соответствующая временная диаграмма также должна быть самоподобна. Разумеется, в случае шума самоподобие носит лишь статистический характер: увеличенный фрагмент не является точной детерминированной копией формы сигнала до изменения масштаба. Более того, для сохранения мощности при изменении масштаба частот амплитуды должны измениться в $r^{-\alpha/2}$ раз (r – коэффициент изменения масштаба). Поэтому, строго говоря, такие стохастические процессы самоаффинны, то есть имеют более одного масштабирующего множителя: r – для частот (или, что эквивалентно $1/r$ для значений времени) и $r^{-\alpha/2}$ – для амплитуд.

Наверное, мало кто отмечал, что соотношение неопределенностей Гейзенберга в квантовой механике

$$\Delta q \cdot \Delta p \geq \hbar,$$



Рис. 16. *а* – «белая» музыка, составленная из независимых нот; *б* – «коричневая» музыка, составленная из нот с независимыми инкрементами по частоте; *в* – «розовая» музыка – частоты и продолжительность звучания нот определяются $1/f$ -шумом (розовым шумом)

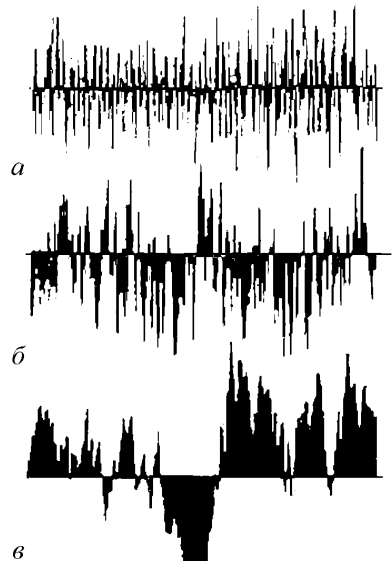


Рис. 17. Временные диаграммы шумов: *а* – белый шум с f^0 -спектром мощности; *б* – «розовый» шум с $1/f$ -спектром; *в* – «коричневый» шум с $1/f^2$ -спектром

где q и p – две «канонически сопряженные» переменные, например, координата и импульс, а \hbar – постоянная Планка, деленная на 2π , также является гиперболическим законом. Насколько известно, область применимости принципа неопределенности не ограничена. Как пишет Шредер [4, с. 163]: «Теории приходят и уходят, но “аш перечеркнутое” всегда остается с нами».

Коснемся еще таких самоподобных природных систем, как деревья, реки, артерии, легкие, для которых важны показатели при поперечных сечениях. Пусть ствол дерева имеет диаметр d , который разветвляется на две главные ветви с диаметрами d_1 и d_2 . Вопрос: «существует ли некоторое устойчивое соотношение между этими диаметрами по мере того, как мы продвигаемся от ствола дерева ко все более тонким ветвям вплоть до черенков листьев?». Леонардо да Винчи считал, что для беспрепятственного движения соков вверх по дереву поперечные сечения двух главных ветвей в сумме должны быть равны поперечному сечению ствола, то есть $d^2 = d_1^2 + d_2^2$ [11, с. 224–225]. Его гипотеза ныне воплощена в трубчатой модели дерева [12]. Эта модель опирается на идеализированное представление о том, как сок поступает от корней дерева к листьям по многочисленным неветвящимся сосудам («трубкам»), занимающим определенную долю сечения каждой ветви. Такое же соотношение, а именно

$$d^\Delta = d_1^\Delta + d_2^\Delta, \quad (6)$$

где $\Delta = 2$, выполняется в месте слияния двух рек (d_1 , d_2 , d – ширина рек). Установлено, что ширина d реки пропорциональна корню из количества воды Q , переносимого рекой: $d \sim Q^{0.5}$. Однако глубина реки t , как правило, изменяется в соответствии с законом $t \sim Q^{0.4}$. Возникающая разница восполняется за счет увеличения скорости течения v , которая пропорциональна $Q^{0.1}$. Таким образом, река, образовавшаяся от слияния двух притоков одинаковой величины и несущая, следовательно, вдвое больший объем воды в секунду, обычно в 1.4 раза шире каждого из своих притоков, но лишь в 1.3 раза глубже их. Скорость же течения реки приблизительно в 1.1 раза больше, чем скорость течения притоков. Произведение $1.1 \cdot 1.3 \cdot 1.4 \approx 2$, поскольку вода при слиянии никуда не теряется и нигде не добавляется. Поскольку, в отличие от рек, сливающиеся или разветвляющиеся дороги не имеют глубины, для них показатель Δ в соотношении (6) равен 1 при условии, что количество машин, проезжающих по одной полосе за минуту, одинаково для всех дорог. Иными словами, полосы движения играют ту же роль, что и сосуды с древесными соками в трубчатой модели деревьев.

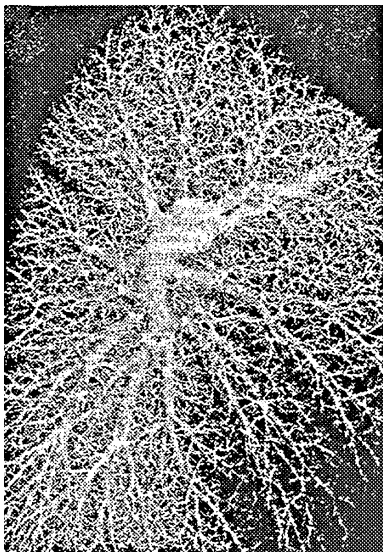


Рис. 18. Самоподобное бронхиальное дерево (рис. 6 из главы 4 книги [4])

В диапазоне, охватывающем примерно 20 бифуркаций от сердца до капиллярных сосудов, артерии и вены в сосудистой системе млекопитающих удовлетворяют степенному закону (6) с $\Delta \approx 2.7$. Поскольку необходимо, чтобы артерии и вены доходили до каждой точки тела для обеспечения питания или избавления от отходов, эта величина Δ вполне разумна. Идеальное значение $\Delta = 3$ недостижимо, ибо в этом случае сосудистая система заполнит все пространство, оставив слишком мало места для других задач. Бронхи легкого имеют показатель подобия, очень близкий к $\Delta = 3$ (такое значение имеет фрактал, заполняющий трехмерное пространство). Как показано в статье [13], на протяжении 15 бифуркаций бронхиальное дерево остается почти самоподобным (рис. 18).

Если предположить, что геометрия бронхиального дерева определяется требованием минимального сопротивления потоку воздуха во всей бронхиальной системе, то $d/d_1 = d/d_2 = 2^{1/3}$, то есть существует постоянный коэффициент ветвления [14]. Тогда из соотношения (6) находим, что $\Delta = 3$. Мандельброт [11, с. 226–227] дает иное объяснение заполнения бронхами трехмерного пространства, не требующее внесения коэффициентов ветвления $d/d_1 = d/d_2 = 2^{1/3}$ в генетический код. Он пишет: «Мы будем опираться на тот фундаментальный факт, что внутриутробный рост легкого начинается с почки, из которой вырастает трубка, на которой, в свою очередь, образуются две новые почки, каждая из которых ведет себя вышеописанным образом. Помимо всего прочего, такой рост самоподобен (а ствол легкого образует остаток!)... Ветви нашего дерева образуют стандартное множество: его размерность и в топологическом, и во фрактальном смысле равна евклидовой. Если оболочка каждой ветви является гладкой, то размерность всей оболочки равна показателю Δ » [11, с. 227–228]. Получается, что эмпирически наблюдаемое самоподобие (рис. 18) достигается не потому, что самоподобная структура оптимальна, а

потому, что оно следует кратчайшей программе управления: каждая стадия повторяет предыдущую, но в меньшем масштабе. Таким образом, геометрия легких полностью определяется двумя параметрами: отношением ширина/длина ветвей бронхов и показателем при диаметре Δ . То, что $\Delta \approx 3$, получается из-за того, что большое число бифуркаций должно заполнить почти все пространство, не вытесняя друг друга.

В лекции 2 мы рассмотрим другой путь к симметрии в контексте истории нахождения решений алгебраических уравнений.

Библиографический список к Лекции 1

1. *Баренблат Г.И.* Автомодельные явления – анализ размерностей и скейлинг. Долгопрудный: Издательский дом «Интеллект», 2009. 216 с.
2. *Вейль Г.* Симметрия. М.: Изд-во «Наука». Главная редакция физико-математической литературы, 1968. 191 с.
3. *Стюарт Эн.* Истина и красота. Всемирная истории симметрии. М.: Изд-во Астрель: CORPUS, 2010. 461 с.
4. *Шредер М.* Фракталы, хаос и степенные законы. Москва; Ижевск: РХД, 2001. 528 с.
5. *Lotka A.J.* The frequency distribution of scientific productivity // Journal of the Washington Academy of Sciences. 1926. 16.
6. *Петерс Э.* Хаос и порядок на рынках капитала. М.: Мир, 2000. 334.
7. *Stevens S.S.* On predicting exponent for cross-modality matches // Percept. Psychophys. 1969. Vol. 6. P. 251.
8. *Mathes M.V., Pierce J.R., Reeves A., Roberts L.* Theoretical and experimental exploration of Bohlen–Pierce scale // J. Acoust. Soc. Amer. 1988. Vol. 84. P. 1214.
9. *May P.M.* How many species are there on earth? // Science. 1988. Vol. 214. P. 1441.
10. *Voss R.F., Clark J.* $1/f$ noise in music: Music from $1/f$ noise // J. Acoust. Soc. American. 1978. Vol. 63. P. 258.
11. *Мандельброт Б.* Фрактальная геометрия природы. М.: Институт компьютерных исследований, 2002. 656 с.
12. *Zimmerman M.N.* Hydraulic architecture of some diffuse-porous trees // Can. J. Botany. 1978. Vol. 56. P. 2286.
13. *Comroe J.H.* The Lung // Scientific American. February. 1966. Vol. 214. P. 56.
14. *Wilson T.A.* Design of the bronchial tree // Nature. 1967. Vol. 213. P. 668.

Лекция 2. Алгебраический путь к симметрии

Естественный вопрос – как связаны поиск решений алгебраических уравнений и понятие симметрии? Иэн Стюарт [1, с. 13] отвечает на него так: «Причина в том, что в качестве доминирующей идеи симметрия появилась не так, как можно было бы ожидать, – то есть не через геометрию. Вместо этого глубоко прекрасная и жизненно необходимая концепция симметрии, которой сегодня пользуются математики и физики, пришла к нам из алгебры». Заметим, что создатели алгебраического пути к симметрии были яркими, часто необычными людьми, поэтому в лекции могло быть и более броское название «Герои и злодеи в истории решения алгебраических уравнений». Погрузимся в мир поиска решений алгебраических уравнений, начав с древности.

Глиняные клинописные таблички вавилонян

О культуре жителей Вавилона известно очень много. Археологам повезло из-за того, что вавилоняне делали записи на влажной глине клинописью – своеобразным клинообразным шрифтом. Надписи становились практически неуничтожимыми, когда глина затвердевала. Пожар не уничтожал таблички, а превращал их в керамику, которая могла сохраняться еще дольше. Пески пустыни помогали сохранять написанное сколь угодно долго.

Приведем далее важное замечание Стюарта [1, с. 24–25]. «Таким образом Вавилон и стал тем местом, с которого начинается письменная история. Там же берет свое начало и история понимания человечеством симметрии – и её воплощения в систематическую и количественную теорию, исчисление “симметрии”, ни в чем не уступающее по своей мощи дифференциальному и интегральному исчислению, созданному Исааком Ньютоном и Готфридом Вильгельмом Лейбницем. Без сомнения, его истоки можно было бы проследить еще дальше вглубь веков, если бы у нас нашлась машина времени или хотя бы еще немного больше глиняных табличек. Но, как нам сообщает письменная история, именно вавилонские математики направили человечество на путь познания симметрии, что в свою очередь радикально повлияло на наше восприятие физического мира».

Вавилоняне использовали шестидесятиричную систему счисления, они знали о прямоугольных треугольниках и использовали математику, как бы сейчас сказали, для фундаментальных исследований – для астрономии,

для сельскохозяйственных и религиозных нужд, а также для прикладных целей – задач торговли и сбора налогов.

Самое важное достижение вавилонских математиков – начало понимания того, как решать алгебраические уравнения. Им была известна некоторая стандартная процедура для решения таких уравнений.

Востоковед Отто Нейгенбауэр в 1930 году (а первые раскопки были в 1811 году) понял, что на одной из табличек написано квадратное уравнение: уравнение, которое содержит неизвестное и его квадрат, перемешанные с различными конкретными числами. Не исключено, что вавилоняне знали и какие-либо хитрые способы решения кубических уравнений с помощью численных таблиц*.

Стюарт [1, с. 39] приводит задачу о решении квадратного уравнения, которой около 4000 лет.

«Найти сторону квадрата, если площадь минус сторона составляет 14.30». На той же табличке приводится и решение. «Возьми половину от 1, что есть 0;30. Умножь 0;30 на 0;30 что даст 0;15. Прибавь это к 14.30 и получишь 14.30;15. Это квадрат числа 29;30. Теперь прибавь 0;30 к 29;30. Результат равен 30 – стороне квадрата».

В современных обозначениях решение выглядит так.

Возьми половину от 1, что есть 0;30	$\frac{1}{2}$
Умножь 0;30 на 0;30, что даст 0;15	$\frac{1}{4}$
Прибавь это к 14.30 и получишь 14.30;15	$870\frac{1}{4}$
Это квадрат числа 29;30	$870\frac{1}{4} = 29\frac{1}{2} \cdot 29\frac{1}{2}$
Теперь прибавь 0;30 к 29;30	$29\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$
Результат равен стороне квадрата 30	30.

Как додумались вавилоняне до решения? Стюарт [1, с. 40–41] считает, что они могли рассуждать геометрически, и демонстрирует ход решения на примере более простой задачи, чем предыдущая.

«Найти сторону квадрата, если площадь плюс две стороны равна 24».

На современном языке – нужно решить уравнение $x^2 + 2x - 24 = 0$. Задачу можно представить себе как показано на рис. 1. Вертикальный

*Кстати, вавилонские математики знали и умели вычислять с высокой точностью значение $\sqrt{2}$. Оно вычислялось так:

$$1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} = 1.4142129.$$

Поскольку $\sqrt{2} = 1.4142135$, то разница составляет около шести миллионных.

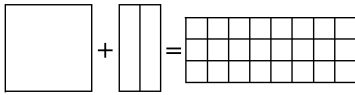


Рис. 1. Геометрическое представление квадратного уравнения

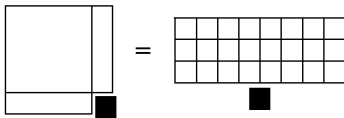


Рис. 2. Дополнение квадрата

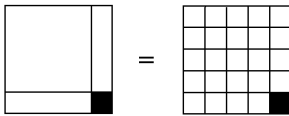


Рис. 3. Окончательный вариант геометрического решения: неизвестное плюс 1 при возведении в квадрат дает квадрат числа 5

размер и квадрата и прямоугольника слева соответствует неизвестному, а малые квадраты имеют единичный размер. Разобьем высокий прямоугольник пополам и приклеим два полученных куска к квадрату. Получится фигура в виде квадрата с одним недостающим углом. Дополним квадрат путем добавления к обеим частям уравнения недостающего угла (рис. 2). Получился квадрат слева и 25 единичных квадратов справа, которые мы соберем в квадрат 5×5 (рис. 3)*. Неизвестное равно 4.

Итак, вавилонский писец сообщил нам, что решение квадратного уравнения $x^2 - ax = b$ есть

$$x = \frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b}.$$

Отрицательных чисел еще не знали.

Гияс аль-Дин Абуль-файх Омар ибн аль-Нишапури аль-Хайями (Омар Хайям) и кубические уравнения

Кто не помнит знаменитые рубаи Омара Хайяма? Вот одно из них:

Кто мы? Куклы на нитках, а кукольник наш – небосвод.
Он в большом балагане своём представленья ведёт.
Он сейчас на ковре бытия нас попрыгать заставит,
А потом в свой сундук одного за другим уберёт.

Однако кто знает его математические работы, посвященные, в частности, теории уравнений третьей степени с использованием конических сечений? Напомню, что коническими они называются потому, что их можно получить, пересекая плоскостью двойной конус, который похож на два

*К сожалению, некоторые сегодняшние школьники и даже студенты движутся назад, в Вавилон. На просьбу написать $a^2 + b^2$ («a» в квадрате + «b» в квадрате) можно получить запись $\boxed{a} + \boxed{b}$.

рожка мороженого, соединённые своими острыми концами. Существует три основных типа конических сечений (рис. 4).

- *Эллипс* возникает, когда секущая плоскость проходит через одну половину двойного конуса (окружность получается, если плоскость перпендикулярна оси конуса).

- *Гипербола* возникает, когда секущая плоскость проходит через обе половины двойного конуса.

- *Парабола* получается, когда секущая плоскость параллельна какой-либо из кривых, лежащих на поверхности конуса.

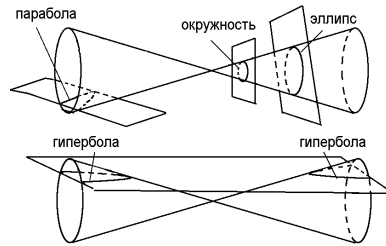


Рис. 4. Конические сечения

Пользуясь коническими сечениями, Омар Хайям получил геометрические решения для четырнадцати типов различных кубических уравнений в зависимости от того, какие слагаемые появляются в каждой части уравнения. Например: куб = квадрат + сторона + число; куб + число = квадрат + сторона и т.д.

Как же он решал уравнения? Чтобы понять это, остановимся на случае «куб + сторона + число = квадрат». В наших обозначениях это значит

$$x^3 + bx + c = ax^2.$$

Вот инструкция последовательности шагов (рис. 5), которую Омар Хайям даёт читателям своей книги «Алгебра» (он окончил её в 1079 году).

1. Проводим три отрезка с длинами c/b , \sqrt{b} и a так, чтобы образовался прямой угол.

2. Проводим полуокружность, диаметр которой – горизонтальный отрезок. Продолжаем вертикальную

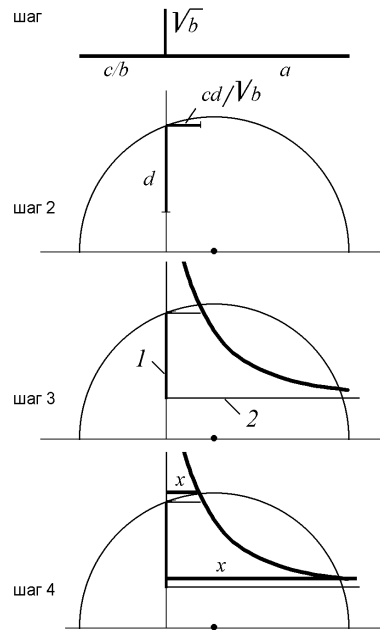


Рис. 5. Решение кубического уравнения, данное Омаром Хайямом

прямую до пересечения с ней. Если жирный вертикальный отрезок имеет длину d , добиваемся того, чтобы отрезок жирной горизонтальной прямой имел длину cd/\sqrt{b} .

3. Проводим гиперболу, асимптоты которой – прямые 1 и 2.

4. Находим, где гипербола пересекает полуокружность. Тогда длины двух жирных отрезков x есть два положительных решения кубического уравнения.

Слово Стюарту [1, с. 78].

«Подробности, как всегда, не так важны, как общий стиль. Выполняем ряд эвклидовых построений циркулем и линейкой, потом прибегаем к помощи гиперболы, потом ещё немного эвклидовых построений – и готово. Аналогичное решение дает Омар Хайям для всех своих четырнадцати случаев и доказывает, что решение правильное».

Отрицательных чисел, как уже указывалось, в математике ещё не было, поэтому уравнения каждый раз надо было сочинять так, чтобы все слагаемые были положительными. До Омара Хайяма не было метода решения уравнений: каждое требовало отдельного исследования. Он писал так: «Я же, напротив, никогда не ослабевал в своем желании сделать известными, притом со всей точностью, все возможные случаи и в каждом из них провести различие между возможным и невозможным» (под «невозможным» он понимал отсутствие положительного решения; цит. по [1, с. 77]).

Тарталья, Кардано, Феррари и... опять кубическое уравнение [2, 3]

Первая фигура в этой миниатюре – Никколо Фонтана по прозвищу Тарталья-заика (1500–1557)*. Родился он в бедной итальянской семье, отец его умер рано, оставив жену с тремя детьми. В 1506 году родной город Никколо Брешию захватили французские войска, устроив кровавую бойню. Людей не спасли даже стены храма, где они пытались укрыться от расправы. Никколо чудом остался жив, но был ранен. Ему повредили горло, рассекли язык, поэтому он с трудом произносил слова. Отсюда и прозвище «Тарталья-заика». Мать не могла платить за учебу, поэтому в школе Никколо проучился лишь 15 дней. Благодаря терпению и настойчивости, мальчик научился читать. Легенда гласит, что, поскольку денег на бумагу не было, он каждый день ходил на кладбище и писал упражнения и задачи углём на мраморных надгробиях. В математике Тарталья самостоятельно добил-

* Истинная фамилия Тартальи неизвестна. Не исключено, что он и сам не знал её. На своем завещании он подписался Фонтана, хотя своего отца называл Микелетто.

ся небывалых успехов, став выдающимся математиком своего времени. Он преподавал в Вероне, Брешии и Венеции, написал несколько книг. Главная из них под названием «Общие исследования чисел и мер» была издана в 1556 году в Венеции. Драматические события в жизни Тартальи связаны с тем, что он и ещё один итальянский математик дель Ферро открыли способ нахождения корней кубического уравнения. В чём драматизм ситуации?

Начиная с XII века в Европе возобновились математические турниры, заменившие кровавые рыцарские. Инициатором интеллектуальных турниров стал император «Священной римской империи Германской нации» Фридрих II Гогенштауфен. Но, если во времена Эвклида в Александрии ученики соревновались за первенство в глазах Эвклида, то теперь они боролись за должность при дворе*. Ожесточённая борьба разгорелась между двумя лучшими итальянскими математиками XVI века Никколо Тартальей и Джироламо Кардано. И хотя они добивались признания разными путями, в истории математики их имена не разделить: есть алгоритм Кардано–Тартальи.

Поэтому вторая фигура в нашем рассказе – Джироламо (Джероламо, Иероним) Кардано (1501(?)–1576), также известный как Жером Кардан. О Джироламо Кардано известно много, поскольку в 1575 году он сам рассказал о себе в «Книге моей жизни». В этой книге он перечисляет написанные им книги, выделяя математический тракт «Великое искусство» с подзаголовком «Правила алгебры». В трактате Кардано написано и о физике, и об астрономии, о вопросах морали, о драгоценных камнях, воде, медицине, теологических предсказаниях. В его книге собраны методы решения квадратных уравнений, известные, как вы помните, ещё вавилонянам, но приведены решения кубических уравнений и уравнений четвёртой степени, которые, в отличие от решений Хайяма, были алгебраическими. Подробно сти его биографии можно найти в книге [3]. Наш герой был побочным сыном миланского юриста Фацио Кардано и молодой вдовы Кьяры Микерия, у которой было ещё трое детей от первого брака. Родился он предположительно в 1501 году в городе Павии, входившем в Миланское герцогство. Когда эпидемия чумы приблизилась к Милану, беременную Кьяру убедили уехать в деревню. Там и родился Джироламо, в то время как старшие его сводные братья, оставленные в городе, умерли от чумы. Отец Джироламо

*В одном из таких турниров победил Леонардо Пизанский или Фибоначчи (filius Bonacci – сын Боначчи). Он победил придворного математика и секретаря короля, решив все три предложенные сложные алгебраические задачи, в то время как его соперник не решил ни одной. Его именем назван числовой ряд – ряд Фибоначчи, описывающий решение задачи о размножении кроликов.

был образованным человеком и учил своего незаконного сына математике и астрологии*. Стюарт [1, с. 89] приводит следующий отрывок из биографической книги Кардано.

«В раннем детстве отец обучил меня основам арифметики, и примерно тогда же он приобщил меня к таинствам; откуда он приобрёл эти познания, мне неизвестно. Вскоре он обучил меня началам арабской астрологии... а когда мне исполнилось двенадцать, он преподавал мне первые шесть книг Эвклида».

Он начал изучать медицину в Павии, а затем в Падуе. Видимо он был одним из лучших студентов, и впоследствии, когда отец умер, Джироламо был избран с перевесом в один голос ректором университета. Впрочем, многие его не любили за склонность к резким высказываниям. Это, в частности, привело к тому, что его долго не принимали в коллегии врачей, хотя репутация его была высока. Карьера Кардано развивалась по нескольким направлениям: известного врача и литератора, авторитетного математика, плодовитого учёного. Но Джироламо растратил по пустякам полученное им наследство и бросился в омут авантюр и азартных игр. О себе он писал: «...насколько сильно меня привлекали излишества шахматной доски и игорного стола, настолько же я знаю, что в глазах людей я заслуживаю самого сурового порицания. Я играл и в то, и в другое многие годы – в шахматы более сорока лет, а в кости – около двадцати пяти; и не только каждый год, но – сознаюсь со стыдом – каждый день, теряя при этом всё – мысль, состояние, время» (цит. по [1, с. 90]).

Его биография подобна авантюрному роману. Он неосторожно высказывался о религии и составил гороскоп Иисуса Христа. Все это инквизиция расценила как святотатство, и Кардано чуть было не угодил в тюрьму. Спасли его заступничество влиятельных людей, которых он успешно лечил, мировая слава учёного и немалый денежный залог. Приоритет в открытии формулы для нахождения корней кубического уравнения – предмет серьёзного столкновения между Кардано и Тартальей.

Тарталья был впереди: ему удалось решить широкий класс кубических уравнений. Кардано долго добивался, чтобы Тарталья открыл ему секрет решения, дав в 1539 году клятву не раскрывать его. Тарталья поверил ему и сообщил Кардано в стихотворной форме правило нахождения корней кубического уравнения. Строчки относятся к уравнению $x^3 = qx + r$.

Когда куб рядом с вещью
Вместе равны какому-либо числу,
То найди два других числа.

* Фацио Кардано преподавал геометрию в университете в Павии и в благотворительном учреждении Пьятти в Милане и даже консультировал по геометрии Леонардо да Винчи.

На него разнящихся,
Потом допусти и всегда держись
этого правила, что их произведение
Должно равняться кубу трети вещи.
Возьми от них стороны кубов
И правильно вычти их.
Остаток даст тебе искомую вещь.

(цит. по [3, с. 149])

В книге [3] дано следующее объяснение стихотворного алгоритма. «Куб рядом с вещью» – это $x^3 + qx$; «число» – это r ; «на него разнящихся» означает $u - v = r$; произведение, равное «кубу трети вещи» – это $uv = (q/3)^3$; «возьми от них стороны куба» – то есть $\sqrt[3]{u}$ и $\sqrt[3]{v}$, «правильно вычти их» значит $\sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}$; «остаток» или «искомая вещь» – это, разумеется, x .

Но через 6 лет в книге Кардано «Великое искусство» Тарталья находит полное изложение своего решения. Конечно, он был взбешён и написал Кардано: «Вы вероломно украли у меня самое лучшее моё украшение...». Возможно, два великих математика и не боролись бы друг с другом, если бы не было известного профессора Болонского университета Сципиона дель Ферро. Именно он первым нашёл корни кубического уравнения определенного вида и перед смертью поделился решением со своим учеником Антонио Фиоре, которого, по словам современников, интересовала совсем не наука, а больше дочь профессора. Однако Фиоре, получив столько неожиданный подарок, решает снискать славу первого математика и вызывает на состязание самого Тарталья в конце 1534 года. Тарталья знал, что Фиоре владеет секретом, подаренным его учителем. За 10 дней, оставшихся до состязания, Тарталья сумел найти решения для всех неисследованных Фиоре уравнений.

Состязание состоялось 12 февраля 1535 года, когда соперники через нотариуса предложили друг другу по 30 задач. Фиоре не решил ни одной задачи, предложенные Тартальей, а тот решил за два часа все задачи противника. Фиоре надеялся победить соперника кубическими уравнениями, но для Тарталья их решение не составляло труда. Тарталья же задал вопросы Фиоре по всему курсу математики. И, как пишет В. Кессельман [2, с. 73], «...университетское образование явно уступило кладбищенскому». Победа была сокрушительной и известие о ней и об открытии Тарталья быстро разнеслось по всей Италии*. И вот здесь на сцену выходит Кардано с навязчивой идеей узнать тайну Тарталья. Как уже было сказано, в 1539 году он узнает секрет, дав клятву не разглашать его. В Болонье в 1542 году Кардано зна-

*Проигравший в соревновании по условиям оплачивал обед победителю и его 29 друзьям. Кроме того, он платил по сольди за каждую решенную задачу.

комится с рукописями покойного профессора дель Ферро. Теперь он понял все и, нарушив клятву, через шесть лет публикует тайный алгоритм. Справедливости ради надо заметить, что Кардано ссылаясь на Тарталью.

«В наши дни Шипионе* дель Ферро из Болоньи решил случай куба и первой степени, равных постоянной, – очень изящное и достойное восхищения достижение... Состязаясь с ним, мой друг Никколо Тарталья из Брешии ... решил тот же случай, когда участвовал в поединке с его (дель Ферро) учеником Антонио Марио Фиором, и подвигнутый к тому множественными мольбами, передал решение мне» (цит. по [1, с. 92]).

Досаду Тартальи легко понять: люди будут помнить книги, а не истинного открывателя решения, к тому же в Европе того времени математические секреты могли стоить больших денег.

В книге Кардано содержалось и алгебраическое решение уравнений четвертой степени, которое было найдено учеником Кардано – Лудовико Феррари (1522–1565).

Через год Тарталья выпустил книгу «Проблемы и различные изобретения», в которой обрушился на Кардано в весьма жестких выражениях. Кардано молчал. Тогда за честь Кардано вступился его ученик Феррари, наговорив Тарталье гадостей и вызвав на состязание по все наукам от математики до астрологии. Главным и обязательным условием состязания было место его проведения – Милан – город, где родился Феррари. Тарталья, надеясь на честные правила соревнования, согласился ехать в Милан. Он чувствовал себя правым в споре с Кардано и не сомневался в своих познаниях. В церкви Святой Марии в Милане 10 августа 1548 года в 6 часов вечера посмотреть на математическую дуэль собралось множество людей из разных слоев общества. Здесь были горожане, военные, представители знати, преподаватели и студенты университетов, огромная толпа друзей Лудовико Феррари, которого называли «человеком с лицом ангела и сердцем дьявола». С Никколо Тарталья был только его родной брат. Кардано – главная фигура в споре, зная о соревновании, уехал из Милана.

Честным поединок не назовешь: Тарталью оскорбляли, не давали говорить, Феррари тянул дело к ночи длинными речами. Тарталья понял настроения толпы, прекратил соревнования и покинул Милан. Он опасался, что ближе к ночи диспут может быть закончен ударом кинжала наёмного убийцы.

Феррари считал себя победителем, а Тарталью в Брешии посчитали неудачником, отказали в работе, не заплатили за уже прочитанные лекции.

* В традиционном переводе – Сципион.

Он прожил в бедности до самой смерти и никогда не утверждал, что выиграл дебаты. Напротив, Феррари приписанная им самим себе победа принесла славу: ему предлагали читать лекции в лучших университетах, обучать сына императора. Он выбрал пост руководителя налогового управления при правителе Милана и стал вскоре очень богатым; в Болонье он возглавил кафедру математики. По легенде, он был в 43 года отравлен родной сестрой.

Последний поворот сюжета связан с трагедией Кардано. Прочитруем здесь В. Кессельмана [2, с. 75], который так пишет о злключениях Джироламо Кардано. «Его старший сын Джамбаттиста втайне женился на девушке сомнительной репутации и дурного характера, которая всюду заявляла, что вышла замуж по расчету. Однажды в пылу гнева она назвала имена настоящих отцов их детей. Молодой муж не мог перенести такого позора. У аптекаря он раздобыл яд и уговорил слугу подсыпать его в праздничный торт, пообещав за это денег и одежду. Торт был испечен, жена – отравлена. Но убийц быстро нашли, и Джамбаттиста был “казнен отсечением головы”. Смерть сына потрясла Кардано, он был близок к невменяемости. Как безумный, целыми днями он носился на коне по полям, ночами играл в азартные игры, пытался заглушить душевные страдания физической болью и голодом. Не успев отойти от первого потрясения, Кардано узнает, что его второй сын стал бродягой и вором. Кардано пытался остановить сына; однажды во время ссоры он отрубил ему ухо (так поступил человек, написавший десятки книг о методах гуманного воспитания и лечения!). В ответ сын ограбил отца, и Кардано обратился к властям за помощью. Через неделю сын снова грозит поджечь дом и убить отца. Альдо арестовали, судили и приговорили к пожизненному заключению, но Кардано добился смягчения: сын был осужден на изгнание из родного города Болонья. Кардано покончил жизнь самоубийством».

В его автобиографической «Книге моей жизни» есть такие слова: «Сознаюсь, что в математике кое-что, но в самом деле ничтожное количество, я заимствовал у брата Никколо». Похоже, что его все-таки мучила совесть.

Чтобы оценить, чего же достигли Тарталья, Кардано и Феррари, вернемся к вавилонским табличкам, объясняющим, как решать квадратные уравнения. Напомним, что их рецепт для уравнения $x^2 - ax = b$ есть $x = a/2 + \sqrt{(a/2)^2 + b}$.

Решение кубического уравнения $x^3 + ax = b$ выглядит во времена Тартальи и Кардано (и сегодня) посложнее и имеет следующий вид:

$$x = \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{a^3}{27} + \frac{b^2}{4}}} + \sqrt[3]{\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{a^3}{27} + \frac{b^2}{4}}}.$$

В который раз отметим, что не было отрицательных корней и тем более комплексных*.

Наконец, алгоритм Феррари для уравнения

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

состоит в том, что при $a = 1$ его корни совпадают с корнями двух квадратных уравнений:

$$x^2 + (b + A)\frac{x}{2} + \left(y + \frac{by - d}{A}\right) = 0,$$

где $A = \pm\sqrt{8y + b^2 - 4c}$, а y – какой-либо действительный корень кубического уравнения

$$8y^3 - 4cy^2 + (2bd - 8e)y + e(4c - b^2) - d^2 = 0.$$

Алгоритм Феррари был математической вершиной книги Кардано. Слово Стюарту [1, с. 104]. «Великое искусство» не содержит решения квинтики – уравнения, в котором неизвестное получается в пятой степени. Но ведь по мере возрастания степени уравнения метод его решения в свою очередь усложнялся, так что мало кто сомневался, что, применив достаточную изобретательность, можно будет решить и уравнение пятой степени – скорее всего, потребуются использовать корни пятой степени, так что соответствующая формула окажется весьма громоздкой».

Оказалось, что это не так. И доказал это Нильс Хенрик Абель – норвежский математик, о котором его коллега Карл Густав Якоби написал: «Он ушел от нас, но след, оставленный им, неизгладим».

Нильс Хенрик Абель и его великая теорема

Будем следовать в изложении статье [4] и книге [5]. Абель родился 5 августа 1802 года на юге Норвегии в семье священника. В 1815 году отец отправил Нильса в кафедральную школу в столицу Норвегии Христианию.

*Уравнение $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ введением переменной $y = x + b/(2a)$ сводится к уравнению $y^3 + 3py + 2q = 0$, где $2q = 2b^3/(27a^2) - bc/(3a^2) + d/a$ и $3p = (3ac - b^2)/(3a^2)$. Если $y_1 = u + v$, $y_2 = \varepsilon_1 u + \varepsilon_2 v$, $y_3 = \varepsilon_2 u + \varepsilon_1 v$, то $u = \sqrt[3]{-q + \sqrt{q^2 + p^2}}$, $v = \sqrt[3]{-q - \sqrt{q^2 + p^2}}$, ε_1 и ε_2 – корни уравнения $x^2 + x + 1 = 0$, $\varepsilon_{1,2} = -1/2 \pm i\sqrt{3}/2$, где $i = \sqrt{-1}$.

Абелю повезло: в школе он встретил учителя Бернта Микеля Хольмбое, который заметил, оценил его математическое дарование и на протяжении многих лет оказывал деятельную поддержку своему выдающемуся, но несчастному ученику. Учитель писал об ученике: «Абель сочетает в себе гениальные математические способности с неистощимым интересом к науке, ...он станет самым выдающимся математиком в мире». Абель поступил в университет в 1821 году. Отец у него умер, и у Нильса не было средств к существованию. Он подал прошение о стипендии, но у университета не было средств для этого. Тогда некоторые профессора университета, «дабы сохранить для науки редкое дарование», стали выплачивать ему стипендию из своих средств. Этого было недостаточно для содержания семьи, поэтому Абелю пришлось подрабатывать уроками, что не избавило его от нищеты. В первый ряд математиков мира Абеля поставила его статья «Доказательство невозможности решения в радикалах общего уравнения выше четвертой степени», которая была опубликована в 1826 году. Однако следующая его работа, представленная Парижской академии наук и переданная Коши для рецензирования и представления в печать, затерялась среди бумаг великого математика. Он разыскал её только после смерти Абеля. Этот труд Абеля, вместе с трудом Якоби, был удостоен большой премии Академии. Увы, эта премия не досталась Абелю при жизни, и все последние годы Абель провел в крайней нужде. Он умер от чахотки 6 апреля 1829 года в возрасте 27 лет. Осталась великая теорема Абеля [4, с. 13]: «Ни для какого натурального n , большего четырех, нельзя указать формулу, которая выражала бы корни любого уравнения через его коэффициенты при помощи радикалов». Покажем, что существует (конкретное) уравнение пятой степени с целыми коэффициентами, не разрешимое в радикалах. Рассмотрим в качестве примера уравнение

$$p(x) = x^5 - 4x - 2 = 0.$$

Для того чтобы данное уравнение имело пять вещественных корней, необходимо, чтобы по так называемой теореме Ролля производная $dp(x)/dx = 5x^4 - 4$ имела бы четыре вещественных корня, а она имеет только два.

Вместо заключения к лекции

13 мая 1832 года. Дуэль двух молодых людей – французов – из-за молодой женщины. Падает на землю смертельно раненый Эварист Галуа, которому всего 21 год. В полном собрании его работ не более 60 страниц, но они революционны для математики. Галуа изобрел язык, позволяющий опи-

сывать симметрии в математических структурах и выводить их следствия. Язык этот сегодня носит название «теория групп» и широко используется в современной физике (о жизни и работах Галуа см. [1, глава 7] и [6]). С позиций этой теории общее уравнение пятой степени нельзя решить с помощью формулы, потому что у него неправильные симметрии, но это уже другая история.

Библиографический список к Лекции 2

1. *Стюарт Иэн*. Истина и красота. Всемирная история симметрии. М.: Изд-во Астрель: CORPUS, 2010. 461 с.
2. *Кессельман В.* Занимательная математика. М.: АСТ-Астрель, 2008. 224 с.
3. *Гутер Р., Полунов Ю.* Джироламо Кардано. Гений времени и места. М.: ЭНАС, 2010. 256 с.
4. *Тихомиров В.* Абель и его великая теорема // Квант. 2003, № 1. С. 11.
5. *Оре О.* Замечательный математик Нильс Хенрик Абель. М.: Гос. изд-во физико-математической литературы, 1961. 343 с.
6. *Инфельт Л.* Эварист Галуа. Избранник Богов. М.: Изд-во ЦК ВЛКСМ «Молодая гвардия», 1958. 367 с.

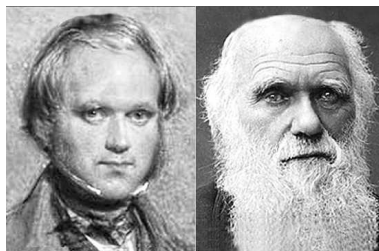
СОВРЕМЕННЫЕ ВЗГЛЯДЫ НА ЭВОЛЮЦИЮ: О РОЛИ ГОРИЗОНТАЛЬНОГО ПЕРЕНОСА ГЕНОВ

С. Ю. Щеголев

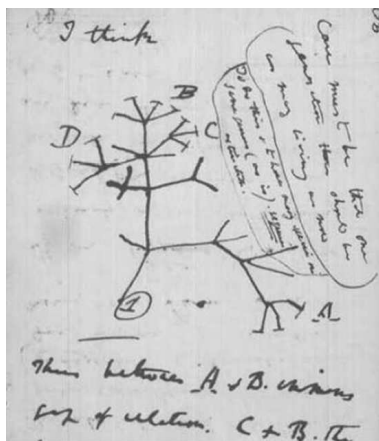
1. Теория Дарвина и открытые системы

В 2009 г. исполнилось 200 лет со дня рождения Чарльза Дарвина и 150 лет со времени выхода в свет первого издания его знаменитой книги [1], круто изменившей всю систему взглядов на происхождение жизни и оказавшей огромное влияние на ход мыслей ученых в самых разных отраслях естествознания. Выдающийся физик-теоретик Ю.Л. Климонтович (внесший большой вклад в развитие статистической физики и физики открытых систем) в своих трудах неоднократно отмечал [2], что один из величайших физиков Людвиг Больцман был, по его мнению, первым, кто отчетливо понимал общность и важность понятия Эволюция. Именно поэтому на рубеже двух веков Больцман назвал век XIX веком Дарвина.

Отдавая должное вкладу этого человека в мировую науку, взглянем на его портреты, отразившие неизбежную печать времени (так много значащего в историко-эволюционном развитии всего живого), и приведем цитату из упомянутой выше великой книги: «...Всякое существо, которое в сложных и нередко меняющихся



Ч. Дарвин – молодой ученый Ч.Р. Дарвин в зрелом возрасте
(1830-е годы) (1870-е годы)



Charles Darwin

Рис. 1. набросок древа жизни в блокноте Ч. Дарвина, 1837 г.

условиях его жизни хотя незначительно варьирует в выгодном для него направлении, будет иметь больше шансов выжить и таким образом подвергнется *естественному отбору*....Отобранная разновидность будет склонна размножаться в своей новой и модифицированной форме». Как говорится, «ни убавить, ни прибавить».

В связи с темой данной статьи отметим прежде всего черновой набросок филогенетического «древа жизни» (отражающего эволюционные взаимосвязи между различными видами или другими сущностями, имеющими общего предка), сделанный рукой Дарвина (рис. 1). Напомним, что хранение генетического материала в клетках и его распространение обеспечивается особенностями структуры двойной спирали ДНК. Делению клеток предшествует *репликация* ДНК, при которой образуются две дочерние спирали. Каждая из них включает одну материнскую и одну вновь синтезированную дочернюю последовательность, восстановленную по материнской в соответствии с правилом Чаргафа (А+Т, Г+Ц). При *дивергентной эволюции*, основной движущей силой которой является естественный отбор, разделение видов отражается на филогенетическом древе жизни в виде соответствующих разветвлений. На рис. 2 приведен пример такого построения, отражающего эволюционное сродство между тремя царствами ныне живущих организмов: растениями, животными и грибами. Несмотря на большое внешнее сходство многих известных грибов с растениями, современный филогенетический анализ указывает на то, что более близкими родственниками для них являются животные. В том числе люди.

В построениях такого типа отражена одна из долго существовавших генетических догм. Согласно этой догме, биологические виды могут приобретать новые черты лишь путем постепенного, шаг за шагом, накопления мутаций, передаваемых из поколения в поколение. Вариант так называемого *вертикального переноса генов*. Долгое время это считалось единственно возможным генетическим механизмом видообразования со строгим запретом преодоления неродственных межвидовых барьеров.

Однако с конца 50-х годов 20-го столетия стали появляться данные, свидетельствующие о возможности передачи генов не только от предков к потомкам, но и «по горизонтали». То есть реализации обмена генетической информацией между различными видами организмов, порой весьма отдаленно родственными. Вместо постепенного накопления мутаций в этих случаях может иметь место единовременное приобретение организмами большого количества генетического материала (рис. 3).

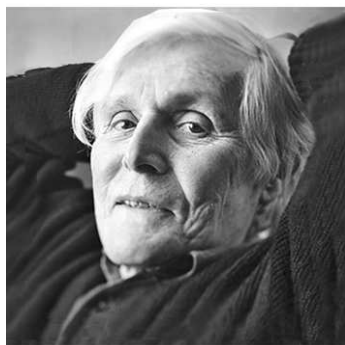
Таким образом, *горизонтальный перенос генов* – это процесс, в котором организм передаёт генетический материал другому организму, *не яв-*

ляющемуся его потомком. Изучение этого феномена и оценка его значения в эволюционном развитии жизни стало предметом пристального внимания многочисленных исследователей. Особенно активно проявляемого в последние годы в связи с бурным развитием вычислительной молекулярной биологии, оперирующей быстро растущими базами данных расшифрованных геномов и структур разнообразных биомолекул.

Упрощенный вариант филогенетического дерева, принятый в последние годы в качестве некоего исходного стандарта, показан на рис. 4. На нем отмечены три таксономические единицы наиболее высокого уровня, то есть *надцарства или домены*. Этот термин был введен в систематику в 1990 г. профессором Карлом Вёзе (C.R. Woese), выдающимся микробиологом и эволюционистом (кстати, физиком по образованию и изначальным научным интересам), который предложил разделить все живые организмы на три домена: бактерии, археи и эукариоты. Указанная транскрипция его имени, отражающая немецкое происхождение, часто встречается в русскоязычной литературе. (Хотя, учитывая, что он родился в 1928 г. и вырос в США, следует, возможно, транскрибировать его имя на американский лад как Воуз.)

Работы К. Вёзе с соавторами положили начало широкому внедрению в филогению *технологии 16S рРНК* (как универсального молекулярного *филогенетического маркера*) и послужили обоснованием отнесения архей к самостоятельному домену (надцарству) на предложенном им универсальном филогенетическом дереве.

Сравнение рис. 2–4 позволяет более четко определить феномен, отраженный в названии статьи, и круг рассматриваемых в ней объектов. Тема эволюции жизни охватывает широчайший спектр проблем, явлений и экспериментальных данных. Ее более или менее осмысленное рассмотрение в пределах одной статьи предполагает введение неких ограничений. Эти ограничения определяются, в первую очередь, научными интересами ИБФРМ РАН, который я имею честь представлять на этой школе-конференции, сосредоточенными на исследованиях микроорганизмов и растений, их разнообразных взаимоотношений, сложившихся в ходе эволюционного развития Жизни.



Prof. C.R. Woese
Иллинойский университет
в Урбане и Шампейне, США

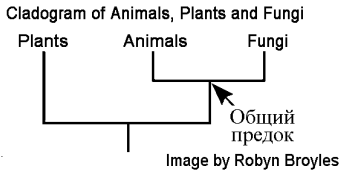


Рис. 2. Пример дивергентной эволюции (вертикальный перенос генов)

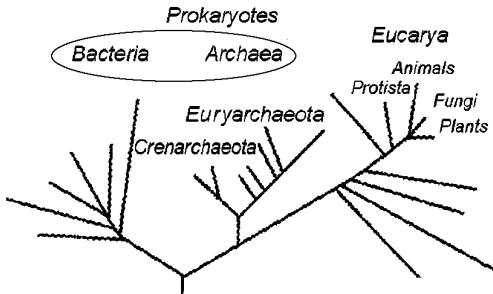


Рис.4. Универсальное филогенетическое дерево (16S рРНК), по данным работы [3]

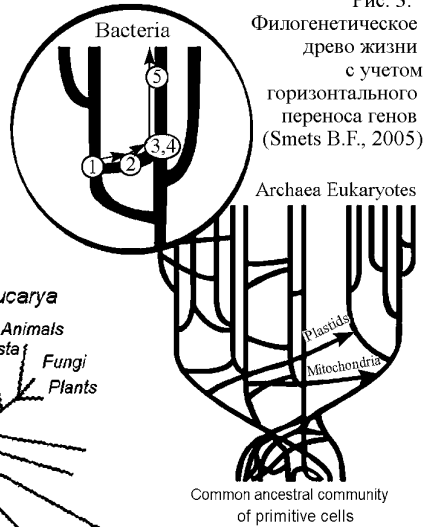


Рис. 3. Филогенетическое древо жизни с учетом горизонтального переноса генов (Smets V.F., 2005)

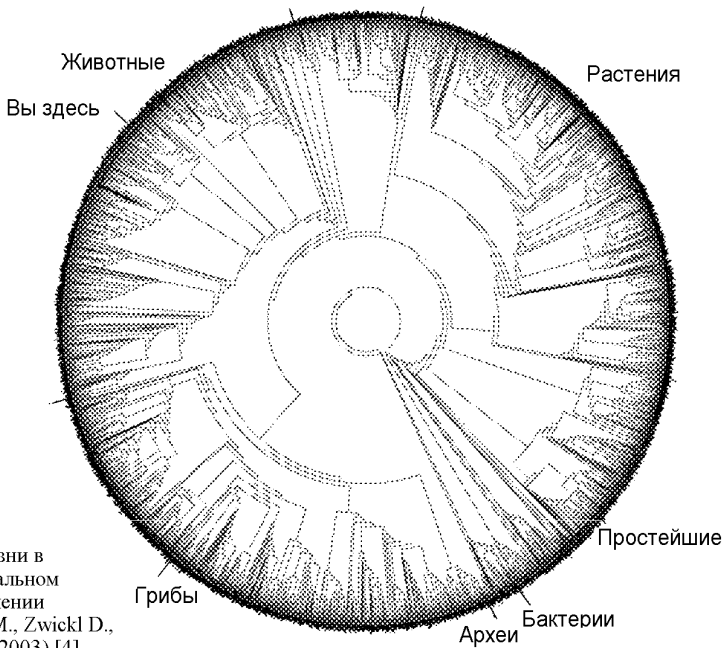


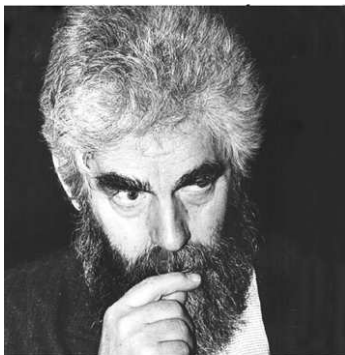
Рис. 5. Древо жизни в более детальном представлении (Hillis D.M., Zwickl D., Gutell R., 2003) [4]

Далее мы увидим, что, согласно результатам последних 10–15 лет, построение на рис. 4 следует рассматривать лишь как первое приближение, отражающее соотношение между таксономическими группами без учета межвидового (горизонтального) обмена генетическим материалом. В соответствии с комментарием самого Вёзе к этому рисунку данное построение справедливо для тех стадий эволюционного развития жизни, на которых *клетка становится достаточно целостной и устойчивой к «эрозивным»* (как считал Вёзе еще в 2000 году) *эффектам горизонтального переноса генов, чтобы могли существовать истинные клеточные линии организмов.* Позднее, однако, все более очевидной становится преимущественно конструктивная эволюционная роль этого явления, особенно актуального именно для *прокариотов*. Коими далее и будет ограничено, главным образом, наше рассмотрение.

На рис. 5 приведена более детализированная версия древа жизни, представленная сотрудниками университета штата Техас (США) [4]. Оно построено по результатам филогенетического анализа с использованием множественных выравниваний последовательностей нуклеотидов малой субъединицы рибосомальной РНК (16S рРНК). Эта макромолекула принята в качестве одного из наиболее стабильных филогенетических маркеров для всех известных организмов. Авторами использованы примерно 3000 образцов видов из всего многообразия древа жизни. Они старались включить в эту диаграмму большинство главных групп организмов, отобранных в пропорции, учитывающей число известных видов для каждой группы. Это составило около 0.2% от 1.7 миллионов описанных на то время (2003) видов.

В биологической систематике организмов таксоном самого высокого уровня до недавних пор считалось *царство*. Приведенный здесь список основных царств включает бактерии, археи, протисты (простейшие), грибы, растения, животные и вирусы. На диаграмме рис. 5 отмечено их систематическое положение. Кроме вирусов, чье причисление к категории живых существ является предметом дискуссии.

Со времени опубликования эпохальных работ Дарвина и по сию пору не утихают дискуссии относительно самой возможности существования естественного отбора как явления природы, являющегося главной (хотя и не единственной, по современным представлениям) движущей силой эволюции. Одним из аргументов в этих спорах до поры до времени было его якобы противоречие фундаментальной *H-теореме Больцмана*. Согласно этому закону, в термодинамически замкнутой системе при ее стремлении к равновесному состоянию энтропия возрастает с соответствующим уменьшением степени упорядоченности системы. При этом, однако, не принималось



Проф. Ю.Л. Климонтович
МГУ, лауреат Госпремии РФ 1991

во внимание то, что любая эволюционирующая живая среда представляет собой существенно *открытую систему*, в которой происходит активный обмен с окружающими ее объектами *энергией, веществом и информацией* (см. схему на рис. 6).

Теоретическое рассмотрение таких систем, начатое в 30–40-е годы прошлого столетия целым рядом выдающихся физиков и математиков, увенчалось к началу 1980-х годов формулировкой так называемой *S-теоремы Климонтовича* [5] (буква S в этом названии – от английского self-organization – самоорганизация). По значимости для развития естествознания эксперты ставят ее в один ряд с упомянутой выше Н-теоремой Больцмана.

Не вдаваясь в математические подробности, можно констатировать, что в ней впервые была строго доказана возможность при определенных условиях реализации процессов *самоорганизации* открытых систем с *уменьшением* энтропии, их усложнением и совершенствованием. Как утверждал профессор Климонтович, наличие выявленной им дисперсии энтропии определяет саму возможность выбора пути развития в процессе биологической эволюции, так как делает возможным (без внешнего вмешательства) *естественный отбор*.

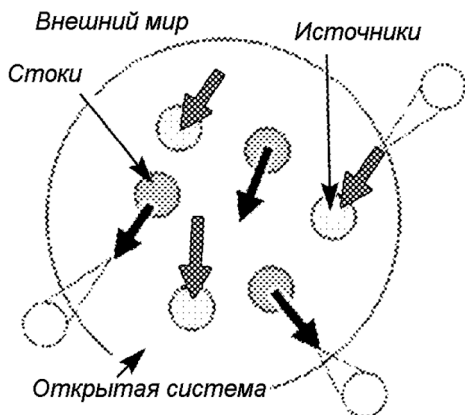


Рис. 6.
Схематическое
представление
открытой системы

Среди естественных наук есть основания по-настоящему точной наукой считать математику. Отсюда ясна фундаментальная обоснованность дарвиновской теории естественного отбора, привнесенная результатами работ Юрия Львовича Климонтовича в области статистической физики открытых систем.

2. О происхождении жизни

Изложение современных взглядов на эволюцию предполагает определение ее временных и пространственных границ. В первую очередь это связано с установлением возраста Земли и времени существования на ней биоты в соответствии с геологическими и палеонтологическими данными. Хотя, как будет видно из дальнейших материалов, результаты современных экспериментальных и теоретических исследований способны существенно раздвинуть эти границы.

На рис. 7 дано одно из наглядных представлений геолого-биологической истории Земли, насчитывающей около *4.5 миллиардов лет*. Если уподобить этот круг циферблату и принять, что эволюции земной жизни соответствует 1 час, то первые примерно 50 минут надо отвести эволюции микроорганизмов. Животным здесь будет принадлежать около 10 минут. И, наконец, только 1/100 секунды от этого часа приходится на развитие рода человеческого вида *Homo sapiens*. С этой точки зрения у нас с вами все только начинается!

Рассуждения о происхождении жизни имеют целью ответить на три принципиальных вопроса: *как, когда и где?* По первому из них (*как?*) уже довольно давно сложился консенсус, краткую историю которого отражает левый столбец таблицы. Этот список завершает гипотеза существования предорганизменного мира РНК, анализ и моделирование которого продолжает привлекать внимание многих исследователей.

Основные этапы развития представлений о происхождении жизни

<i>Как?</i>	<i>Когда и где?</i>
<i>Абиогенез</i> (химическая эволюция)	<i>Панспермия</i> (внеземное происхождение жизни)
Коацерваты, Опарин (1924) Аминокислоты, Миллер (1953)	Привнесение из космоса метеоритами, Рихтер (1865)
Рибозимы, Чек, Олтман (1981, Нобелевская премия 1989)	Бактериальная палеонтология, Розанов, Заварзин (1997)
Мир РНК, Вёзе (1968), Гилберт (1986)	

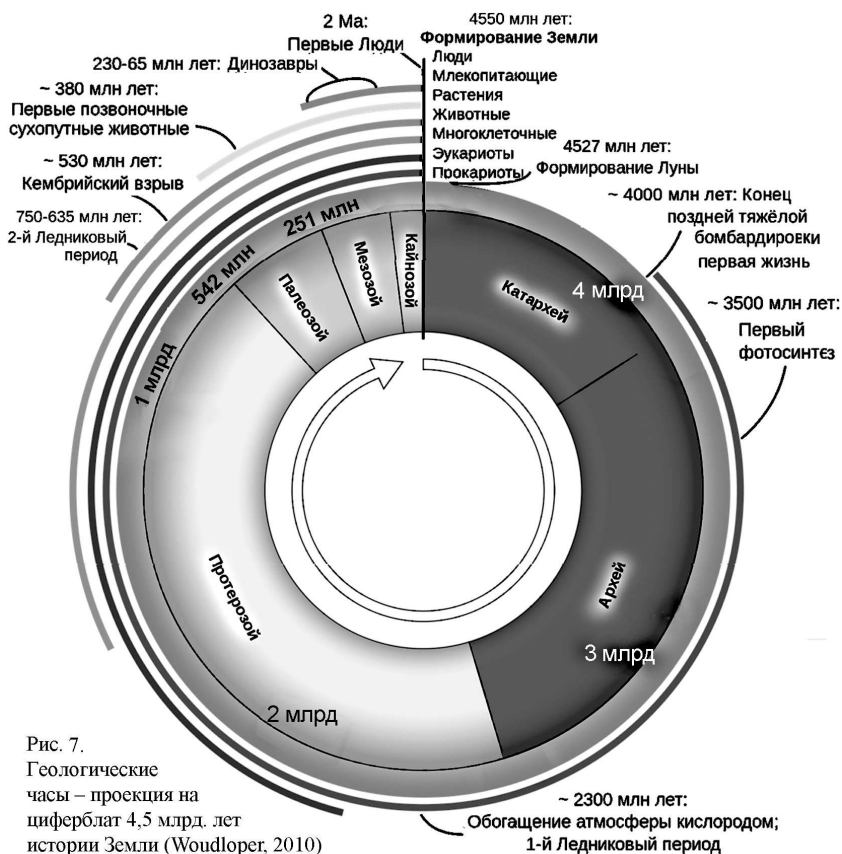


Рис. 7.
Геологические часы – проекция на циферблат 4,5 млрд. лет истории Земли (Woudloper, 2010)

Два других вопроса (*когда и где?* – правый столбец таблицы) остаются по-прежнему предметом острых дискуссий вокруг вариантов земного и внеземного происхождения жизни. Список основных этапов развития представлений о панспермии для краткости можно ограничить двумя пунктами, из которых ближайший к нам по времени связан со становлением и развитием в конце 20-го столетия *бактериальной палеонтологии*. В этой области науки были получены экспериментальные данные, свидетельствующие о возможном появлении на Земле простейших организмов уже около 4 миллиардов лет тому назад. При этом целый ряд оценок показывает, что остающихся «каких-то» 500 миллионов лет со времени возникновения Земли никак не хватает для абиогенетического возникновения и развития мира РНК как самоорганизующейся системы на основе естественного отбора.

Результаты исследований в области бактериальной палеонтологии достаточно полно и последовательно отражены в работах российских и американских специалистов. Их руководителем с российской стороны является академик Алексей Юрьевич Розанов. В серии публикаций последних лет (см., например, [6]) им приводятся данные (рис. 8, 9), свидетельствующие об обнаружении структур, интерпретируемых как окаменелые остатки древних микроорганизмов в осадочных горных породах и метеоритах, возраст которых достигает 4.5 миллиардов лет. Это дает основания академику Розанову для констатации высокой вероятности возникновения жизни в космосе гораздо раньше образования Земли, на планете «земного» типа, где была вода и подходящие температура, состав атмосферы и иные условия.

Также представляют интерес работы в этой области американских ученых [7], проводимые под руководством Ричарда Гувера (R.B. Hoover). В них морфологические исследования, проведенные с использованием самых современных вариантов полевой эмиссионной сканирующей микроскопии (рис. 10), дополняются результатами элементного анализа исследуемых метеоритных структур методом энергодисперсионной рентгеновской спектроскопии (рис. 11). Его результаты показали, что найденные в углеродсодержащих метеоритах C11 структуры, характерные для остатков прокариот, являются скорее аборигенными окаменелостями, а не современными наземными биологическими загрязнениями, которые могли проникнуть в метеориты после их прибытия на Землю.

Гувер обращает внимание на большое значение обнаруженных на Земле *живых микробных экстремофилов*. В сочетании с палеонтологическими данными это значительно увеличивает вероятность того, что микробная жизнь может существовать в ледяных полярных шапках и вечной мерз-



Акад. А.Ю. Розанов
Палеонтологический
институт РАН



R.B. Hoover Ph.D.
рук. группы астробиологии
NASA, США

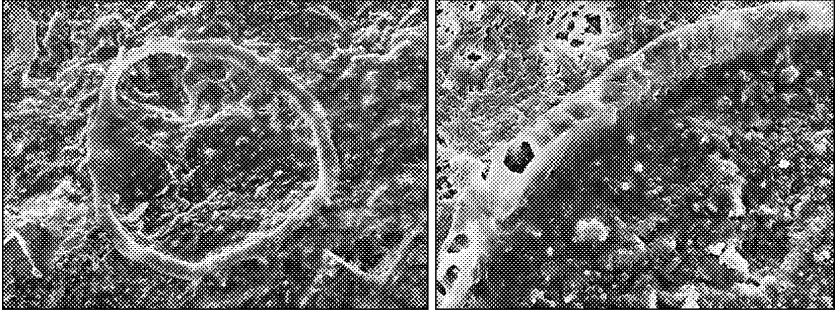


Рис. 8. Зелёные водоросли (*Pechengia*) в осадочных горных породах (фосфоритах) Карелии (2 млрд лет) [6]

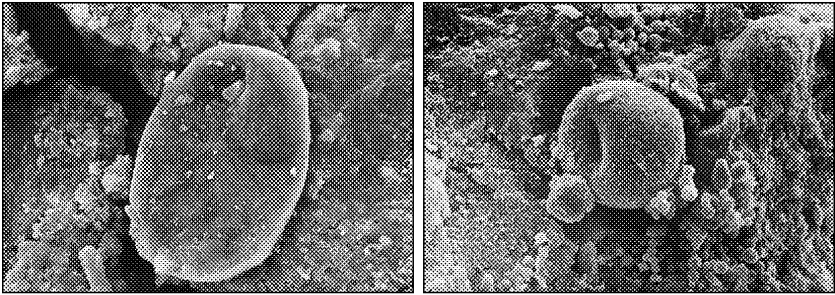


Рис. 9. Предполагаемые эукариотические организмы в метеорите Оргей (4,5 млрд лет) [6]

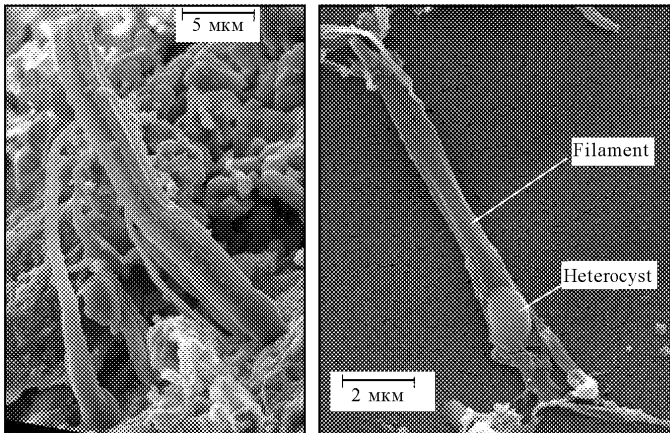


Рис. 10. Сравнение микроструктур из метеорита Оргей (4,5 млрд лет) (слева) с цианобактерией *Calothrix* с использованием полевой эмиссионной сканирующей электронной микроскопии [7]

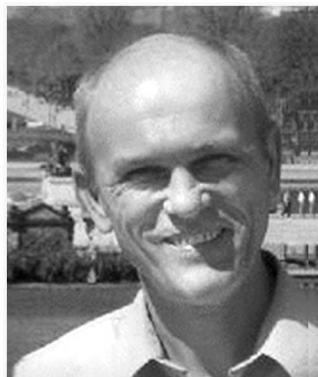
лоте Марса, в водосодержащих астероидах, ядрах комет, в поверхностных льдах ледяных лун, таких как *Европа* (Юпитер) и *Энцелад* (Сатурн).

В связи с результатами, полученными в области бактериальной палеонтологии, нельзя обойти вниманием начавшуюся в 2012 году экспедицию на Марс американской автоматической станции Curiosity (что переводится как «любопытность») (рис. 12). Замечу, что в ее конструкцию входит детектор для определения воды – разработка российских специалистов. При этом стоит процитировать первую строчку из сочинения 12-летней (в 2008 году) школьницы Клары Ма, ставшей победительницей конкурса на лучшее название марсианской автоматической лаборатории (специально организованного среди американских школьников): «Любопытность – это вечный огонь, который горит в сознании каждого». Мы будем надеяться на получение в скором времени новых конкретных данных по риторическому пока вопросу «есть ли жизнь на Марсе?».

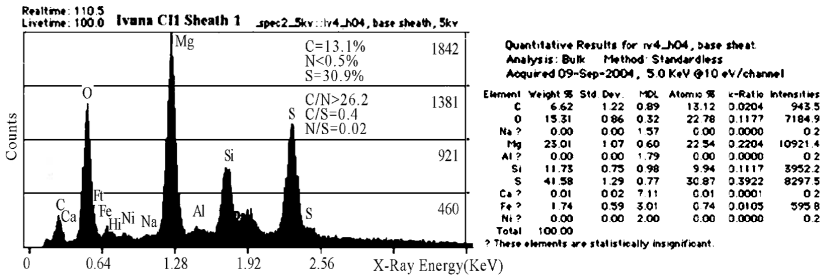
Таким образом, можно констатировать, что интересующий нас мир прокариотов (включающий бактерии, цианобактерии и археи) существует на Земле уже около 4 миллиардов лет и что этому периоду предшествовал этап ее интенсивной метеоритной бомбардировки. Все эти факты приводят А.Ю. Розанова к заключению о крайне малой вероятности возникновения жизни на Земле и возможном внеземном существовании мира РНК [6].

Приведенные выше наблюдения и выводы, озвученные в нынешнюю постгеномную эпоху, не могли не привлечь внимание специалистов, активно работающих с быстро растущими биоинформационными базами данных. В этой связи стоит отметить публикацию [8] нашего бывшего соотечественника Алексея Шарова, ныне сотрудника одного из подразделений Национального института здоровья США – Национального института по проблемам старения.

В серии публикаций, отраженных в обобщающей статье [8], он привел результаты статистической обработки геномов различных организмов – от прокариот до млекопитающих. Выделяя из них избыточные функциональные части и используя палеонтологические данные, автор оценил динамику изменения биологической сложности организмов в пределах 4 миллиардов лет. Эти



К.б.н. А.А. Шаров
Национальный институт
по проблемам старения США



Клара Ма,
победительница
конкурса
на лучшее назва-
ние марсохода
Curiosity

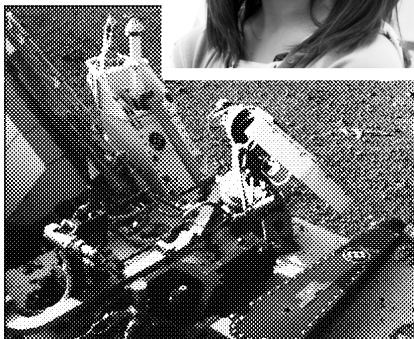


Рис. 12. Как себя «видит» Curiosity на фоне марсианского ландшафта

Рис. 11. Элементный анализ микроструктур из метеорита Оргей методом энергодисперсионной рентгеновской спектроскопии [7]

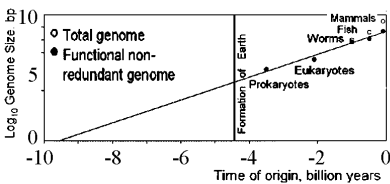


Рис. 13. Эволюция размера генома на Земле от прокариот до млекопитающих, ($R^2 = 0.97$), рост в 7.8 раз за 1 млрд. лет [8]

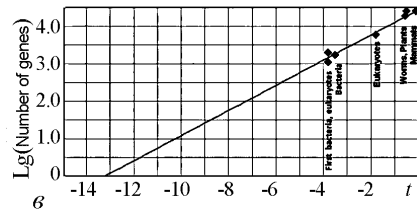
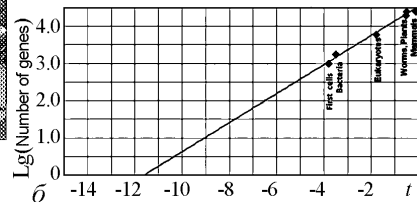
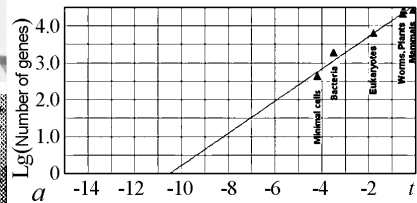


Рис. 14. Связь между числом генов организмов и временем их появления на Земле ($R^2 = 0.91-0.99$) [9]

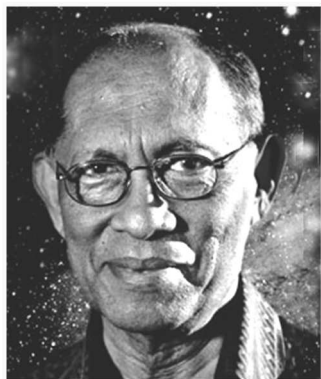
оценки, во-первых, выявили ее экспоненциальный рост во времени с высоким коэффициентом корреляции. Во-вторых, они подтвердили достаточно высокую генетическую сложность протобионтов, возможное существование которых приходится на начало этого периода. Наконец, в данной работе была сделана экстраполяция полученной экспериментальной зависимости на глубину более 4 миллиардов лет с учетом погрешности определения возраста и размера геномов организмов (рис. 13). Это привело автора к сенсационному предположению, что зарождение жизни, соответствующее минимальной биологической сложности (экстраполяция к нулевому значению логарифма размера генома), могло состояться *от 7 до 13 млрд лет тому назад*, и что возможность панспермии как источника жизни на Земле должна обсуждаться *наравне* с гипотезами зарождения жизни *de novo*.

Эти идеи были подхвачены и развиты в работах специалистов из США и Англии [9]. Авторы, R. Joseph и N. Wickramasinghe, использовали несколько генетических моделей, более широкий набор палеонтологических данных и также экстраполировали полученные зависимости к нулевому значению логарифма числа генов (рис. 14). Полученные результаты подтвердили допущение А. Шарова о том, что источник первого гена мог возникнуть примерно 10 миллиардов лет тому назад. То есть вскоре (по вселенским меркам, конечно) после зарождения нашей Вселенной, произошедшего в результате *Большого взрыва* около 14 миллиардов лет тому назад.

Таким образом, по мнению авторов работы [9], первый ген был сформирован примерно *за 6 млрд лет до возникновения Земли* путем внеземного абиогенеза, вероятно, во время образования нашей галактики.



R. Joseph, Ph.D.
Лаборатория исследований мозга,
Эмеритус, США



Prof. N. Wickramasinghe
Букингемский центр
астробиологии, Англия

Не менее важной частью работы А. Шарова [8] следует признать обоснование соображений о том, что мир РНК слишком сложен для того, чтобы в нем в разумные сроки могла возникнуть развитая система клетки по механизму спонтанной самосборки, и что миру РНК должен был предшествовать абиогенетический мир *более простых* саморазвивающихся систем типа *коэнзимов*. На рис. 15 приведена примерная схема такого коэнзимного мира из работы [8]. Одним из основных ее выводов остается то, что эволюционный (по Дарвину–Климонтовичу) переход от коэнзимного мира к миру РНК также должен был произойти задолго до того, как на Земле появились первые живые организмы.

В связи с этой темой следует отметить также две работы российских авторов [10, 11], опубликованные одна за другой в 2007 году в одном и том же выпуске Палеонтологического журнала. Первая принадлежит перу академика Александра Сергеевича Спирина, всемирно признанного эксперта в области биохимии и молекулярной биологии. К достаточно выразительному названию этой интересной работы следует добавить то, что автором констатируется *невозможность* возникновения, существования и эволюции мира РНК в клеточные формы жизни на Земле.

Вторая представлена сотрудником Института катализа Сибирского отделения РАН кандидатом физ.-мат. наук Валерием Николаевичем Снытниковым. В ней допланетный (по отношению к Солнечной системе) околозвездный диск отмечается как наиболее вероятное время (4.56 млрд лет тому назад) и место первичного абиогенного синтеза пребиотического органического вещества из простых молекул с миром РНК и самим возникновением жизни (около 500 млн лет). Однако эти временные рамки оказываются слишком узкими по сравнению с приведенными выше оценками американских авторов.

Отметим, что, по замечанию академика Розанова, до примерно 1997 года обсуждать всерьез проблему панспермии считалось неприличным. В свя-

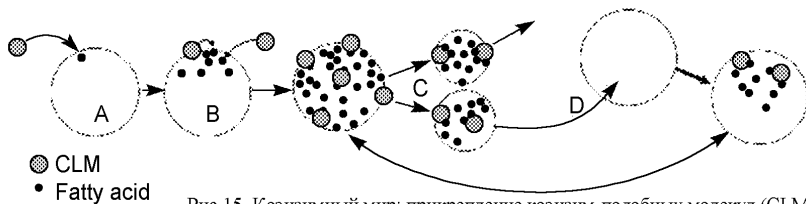


Рис. 15. Коэнзимный мир: прикрепление коэнзим-подобных молекул (CLM) к жировой микросфере и окисление углеводов (А, В), накопление жирных кислот и разделение микросферы (С), инфицирование больших микросфер малым с захватом нового жирового ресурса (D) [8]

зи с чем мне представляется уместным завершить очень краткий обзор некоторых работ по проблеме происхождения жизни цитатой из А. Шопенгауэра: «Новые истины проходят три стадии. На первой их высмеивают, на второй им резко оппонируют и затем, в конце концов, их принимают как само собой разумеющееся».

3. Эволюционные процессы в реальном масштабе времени

Выше было сказано о принципиальном значении S-теоремы Климонтовича как теоретическом обосновании существования естественного отбора в качестве движущей силы эволюции открытых систем. Однако подавляющая часть многочисленных экспериментальных доказательств естественного отбора в живой природе по необходимости имеет характер, существенно опосредованный большими временными интервалами с неизбежной утратой нативности исследуемых объектов. Зачастую это приводит к неоднозначным толкованиям полученных результатов, используемых оппонентами против дарвиновской теории.

Поэтому трудно будет переоценить значение *долгосрочного микробиологического эксперимента*, начатого в 80-х годах прошлого столетия и имеющего целью осуществить наблюдение эволюционного развития популяций в *реальном масштабе времени*. То есть за время, соизмеримое со временем активной жизни экспериментаторов. Эта уникальная возможность обеспечена физиологическими и биохимическими особенностями микроорганизмов, накопленным большим опытом работы с ними в лабораторных условиях.

Данный эволюционный эксперимент стартовал в 1988 г., поддерживается Национальным научным фондом США и проводится в университете штата Мичиган под руководством профессора Ричарда Ленски (R. Lenski). По состоянию на 1 сентября 2012 г. согласно счетчику, приведенному на официальном сайте проекта [12], в этом эксперименте сменилось примерно 56000 поколений кишечной палочки.

Было использовано 12 стартовых популяций *E. coli*, полученных от общего предка – 6 с геном Ara⁺ и 6 с геном



Prof. R. Lenski
университет штата Мичиган
США

Ara^- , отличающихся по способности усваивать арабинозу. Это позволяет отличать современные и предковые культуры по окраске колоний на чашках в сравнительных конкурентных экспериментах по адаптации. Родительские штаммы хранятся замороженными и оживляются для проведения тестов. Культуры размножаются ежедневно. Каждые 75 дней (через 500 поколений) образцы смешанных популяций замораживаются, хранятся бессрочно и могут быть использованы как «палеонтологическая летопись». Другие интересные детали эксперимента можно найти на сайте проекта [12].

Для оценки эволюционного масштаба эксперимента можно отметить, что 50 тысяч поколений, к примеру, в пределах человеческого рода соответствуют погружению в глубь веков примерно на 1,5 миллиона лет. Во времена широкого распространения на Земле *Homo erectus*. Его реконструированный портрет приведен на рис. 16 в сравнении с типичным «портретом» конгломерата кишечной палочки.

За время этого эксперимента по его результатам профессором Ленски с сотрудниками опубликовано 60 статей. Из них 4 – в *Nature* и 6 – в *Science* (текущий импакт-фактор обоих журналов более 30). Мы отметим здесь лишь некоторые из них, отражающие результаты, достаточно показательные с эволюционной точки зрения.

В работе [13], результаты которой отражены на рис. 17, отмечается, что эволюционное развитие микробных популяций в 12 исследуемых линиях выразилось в более высокой эффективности использования основного источника питания глюкозы в культуральной среде и существенном укрупнении клеток. В ней были прослежены основные эволюционные изменения, контролируемые естественным отбором. Например, параллелизм, реализуемый, однако, при движении культур по разным эволюционным траекториям. Отмечено также значение для адаптивной эволюции случайных событий, таких как мутации и дрейф генов.

Одним из открытий в этом долгосрочном эксперименте, описанном в работе [14], стало обретение одной из линий в эволюционных циклах, превышающих примерно 33 тысячи поколений, способности усваивать цитрат (рис. 18). Что было в принципе исключено для предкового штамма. Было показано, что это связано с согласованной работой двух мутантных генов. При том что мутации в каждом из них по отдельности не приводят к появлению способности усваивать цитрат кишечной палочкой.

В 2009 году группой Ленски в *Nature* были опубликованы результаты полногеномного секвенирования ДНК ряда эволюционирующих штаммов кишечной палочки [15] (рис. 19). Они продемонстрировали сложную взаи-

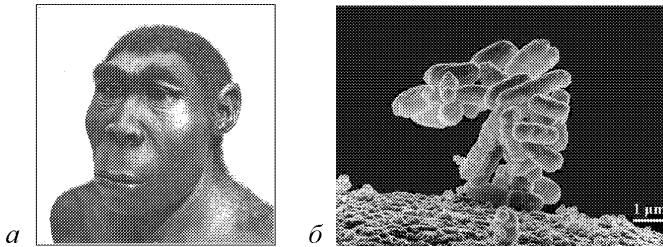


Рис. 16. *Homo erectus*, 0.3-2 млн лет тому назад (~ 50000 поколений) (а) и *Escherichia coli*, 1988-2012 гг. (~ 55000 поколений) (б)

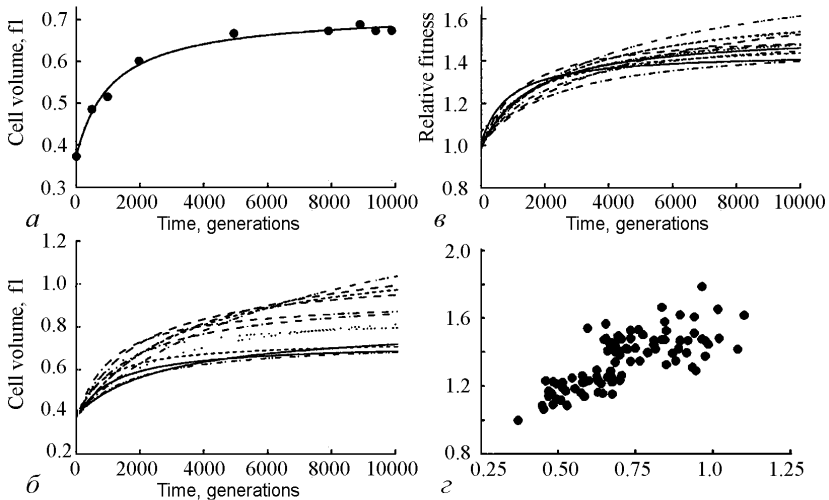


Рис.17. Зависимость размера (а, б) и относительной приспособляемости (в) клеток *E.coli* от времени эволюции в единичной (а) и 12 линиях (б, в); соотношение между приспособляемостью и объемом клеток (г) [13]

мосвязь между геномной эволюцией и адаптационными изменениями культур, отраженную в основных выводах этой работы:

- хотя адаптация резко замедлялась, геномная эволюция была почти постоянной на протяжении 20000 поколений;
- почти все из этих мутаций были полезными;
- впоследствии (до 40000 поколений) популяция аккумулировала сотни дополнительных мутаций с преобладанием нейтральных черт;
- полезные замещения были на удивление постоянными во времени, в то время как нейтральные – высоко вариабельными.

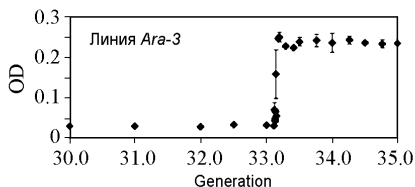


Рис. 18. Увеличение концентрации бактерий в ходе эволюции с приобретением уникальной способности усваивать цитрат при согласованной работе 2-х мутантных генов [14]

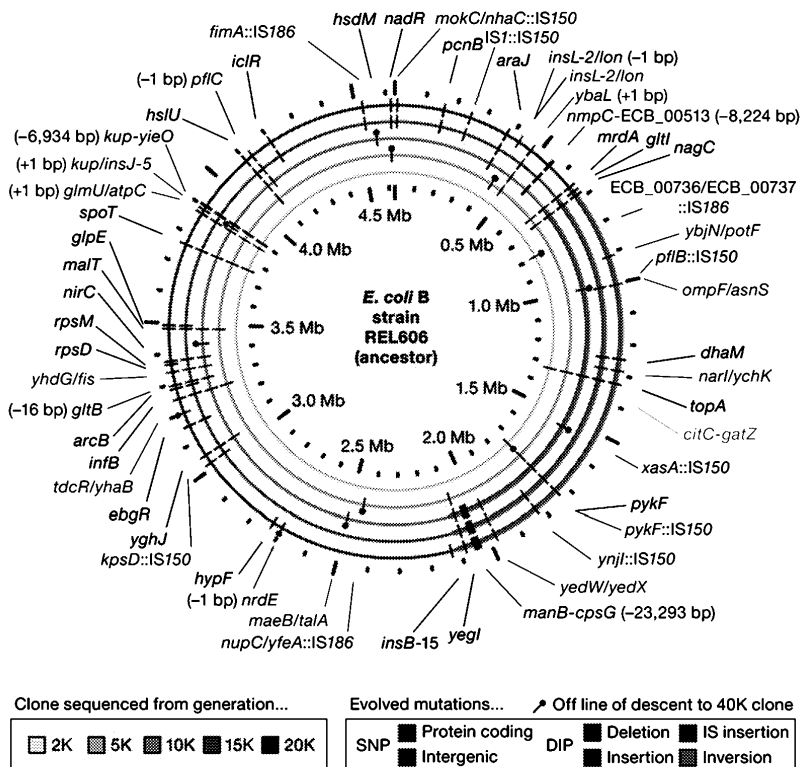


Рис. 19 Мутации, найденные при секвенировании геномов, отобранных между 2000 и 20000 поколений в эволюционном эксперименте с *E. coli* [15]

Это дало основания авторам заключить, что сопряжение между геномной и адаптивной эволюцией является сложным и может быть парадоксальным даже при неизменном внешнем окружении. Иными словами, даже для такого относительно несложного объекта, находящегося в неизменных стандартных условиях, в ходе данного эксперимента проявились как адаптивные, так и неадаптивные механизмы эволюционных процессов.

Надо заметить, что еще более коротким жизненным циклом обладают вирусы, что делает возможными еще более наглядные эксперименты в ходе их эволюционных изменений в реальном масштабе времени. И не только для регистрации, но и для практического использования эффектов естественного отбора. Например, в разработке подхода к борьбе со СПИДом, осуществленной американскими исследователями. В этих экспериментах они добились естественного эволюционного вытеснения в организме пациента клонов ВИЧ, устойчивых к действию лекарств, их нерезистентными конкурентами с последующим эффективным уничтожением вируса. Однако по сравнению с микроорганизмами вирусы не так интересны с общебиологической точки зрения, поскольку, паразитируя в организме хозяина, они не обладают собственными системами клеточного метаболизма.

В завершение данной части обзора я хотел бы присоединиться к оценке результатов и значения рассмотренного выше долгосрочного эволюционного микробиологического эксперимента, данной Ричардом Докинзом (R. Dawkins). В одной из своих книг [16], посвященных анализу современного состояния эволюционного учения с позиций дарвинизма, он отмечает, что работы группы Ленски выявляют процессы эволюции, происходящие путем естественного отбора, *многократно ускоренные* в масштабе микрокосма в лабораторных условиях. Ими продемонстрированы случайные мутации, за которыми следует неслучайный отбор; независимые пути адаптации к одним и тем же внешним условиям у разных популяций; эволюционные изменения за счет добавления успешных мутаций к существующим; зависимость эффектов некоторых генов от присутствия других генов. И все произошедшее зафиксировано за время, составляющее ничтожную долю срока, который обычно требуется для полномасштабных эволюционных изменений в живой природе.



Prof. R. Dawkins
Оксфордский университет
Англия

4. Современные представления о механизме эволюционных процессов



Проф. С.С. Четвериков
Горьковский
госуниверситет

Начало современного этапа в становлении эволюционного учения связано с бурным развитием генетики в первой половине 20-го столетия. Это направление получило название синтетической теории эволюции. Его ассоциируют, в первую очередь, с трудами Сергея Сергеевича Четверикова. В 1926 году им опубликована работа [17] с весьма характерным названием. В публикациях профессора Четверикова была сформулирована концепция адаптивных и неадаптивных процессов эволюции и подчеркнута важность *генетико-стохастических явлений*, впоследствии названных дрейфом генов (genetic drift). Ныне принято, что наряду с естественным отбором генетический дрейф является одной из основных движущих сил эволюции.

Короткий список наиболее часто упоминаемых эволюционных теорий можно представить, например, следующим образом:

- *синтетическая теория эволюции* (Четвериков, 1926; Шмальгаузен, 1939; Хаксли 1942, и др.), синтез генетики и дарвинизма, постулирует органическую эволюцию путем естественного отбора признаков, детерминированных генетически;
- *нейтральная теория молекулярной эволюции* (Кимура, 1968) утверждает, что подавляющее число мутаций на молекулярном уровне носит нейтральный по отношению к естественному отбору характер;
- *теория прерывистого равновесия* (пунктуализма) (Гулд и Эддридж, 1972) констатирует, что эволюция существ, размножающихся половым путём, происходит скачками, перемежающимися с длительными периодами, в которых не происходит существенных изменений;
- ... ?

Многоточие и вопросительный знак отражают то обстоятельство, что биологическая наука в последние десятилетия переживает период чрезвычайно бурного развития. И в ней можно найти набор экспериментальных данных, как хорошо укладывающихся, так и выходящих за рамки любой

известной теории эволюции. В связи с чем трудно не согласиться с высказыванием известного российского эволюциониста, ведущего научного сотрудника Палеонтологического института РАН Александра Владимировича Маркова: «Современная биология – это даже не лоскутное одеяло, скорее, это стремительно растущий ворох лоскутков, в котором будущее “одеяло” только начинает угадываться» [18].

С точки зрения S-теоремы Климонтовича, для реализации естественного отбора важно сохранение информации об оптимальном выборе эволюционного пути и его предыстории. По мнению упомянутого выше Р. Докинза – одного из известных и активнейших западных эволюционистов, такая природная база данных включает 4 составляющих, названных им «суперструктурой аппарата выживания» [16]:

- *репозиторий ДНК*, содержащий техники выживания, выработанные предками и записанные в генофондах популяций и видов;
- *иммунная система*, содержащая данные об окружающей среде в отношении заболеваний и ранений, которые перенесла особь;
- *нервная система*, хранящая данные о гибели и успехе прошлых поколений и собственном опыте индивидов;
- *культура*, аккумулирующая коллективные воспоминания, не генетически наследуемые от прошлых поколений.

Я позволю себе добавить, что культуру можно, вероятно, трактовать в широком смысле слова – от клинописи и наскальной живописи до Интернета. Последние два пункта этого списка привносят в эволюцию некое «разумное начало». Только не в смысле *креационизма* (см. ниже), а как результат интеллектуальной деятельности рода *Ното*.

Говоря о современных представлениях об эволюционных процессах, нельзя не упомянуть хотя бы кратко, о подходах, *альтернативных* классическому дарвинизму и неodarвинизму.

Среди западных ученых большей активностью в этом плане отличается известный биохимик профессор Майкл Бихи (M. Behe). Разработанная им концепция «несократимой сложности» является одной из идейных основ современного *креационизма*. То есть учения о сотворении и развитии



А.В. Марков, д.б.н.,
Палеонтологический
институт РАН



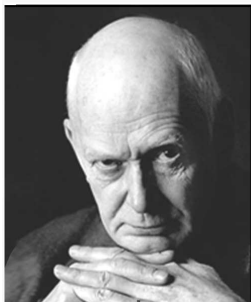
Prof. M. Behe
Лехайский университет,
Бетлехем, США

мира в соответствии с неким данным свыше «разумным замыслом». Одна из его книг [19] называется достаточно выразительно: «Черный ящик Дарвина. Биохимический вызов эволюции». Совсем недавно Майклом Бихи опубликована работа [20], в которой он дает свое толкование результатов описанного выше долгосрочного эволюционного эксперимента с кишечной палочкой.

Среди российских ученых, придерживающихся, в отличие от Бихи, материалистических взглядов, но отстаивающих собственные представления об эволюции, я бы отметил академиков Георгия Александровича Заварзина и Эрика Михайловича Галимова.

У академика Заварзина достаточно показательными являются уже сами названия работ, посвященных проблемам эволюционного развития жизни [21,22]. В статье [22] Георгий Александрович утверждает, что, поскольку в мире микробов, существующем на Земле около 4 млрд лет, не удастся найти общего предшественника, теория Дарвина в нем не работает. По его мнению, чтобы существовать в мире микробов, нужно соответствовать своей среде обитания, а в эволюции биосферы главную роль играет не происхождение, а функциональное взаимодействие.

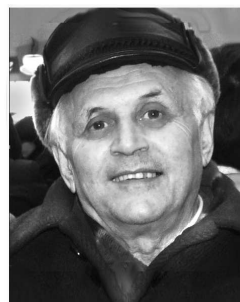
Точка зрения академика Галимова достаточно полно отражена в опубликованной им книге [23]. В ней утверждается, в частности, что дарвинизм



Акад. Г.А. Заварзин
Институт микробиологии
РАН



Акад. Э.М. Галимов
Институт геохимии и
аналитической химии РАН



Ю.В. Чайковский, к.т.н.,
ИИЕТ РАН

не дает исчерпывающего знания проблем эволюции, и обращается внимание на возможное существенное значение для эволюции комбинаторного видообразования и *горизонтального переноса генов*. Здесь мы постепенно начинаем приближаться к центральной теме нашего обзора.

Целая коллекция различных взглядов на эволюционное развитие биоты и их обобщений содержится в двух книгах [24,25] ведущего научного сотрудника Института истории естествознания и техники РАН Юрия Викторовича Чайковского. В них, в частности, перечисляются основные, так сказать, «зарегистрированные на сегодняшний день» крупные направления развития эволюционной мысли:

- *ламаркизм* (наследование приобретенных признаков, возможность передачи информации от фенотипа к генотипу);
- *жозеффруизм* (изменение под прямым воздействием среды, в особенности, изменение ранних зародышевых стадий);
- *дарвинизм* (естественный отбор случайных отклонений);
- *номогенез* (развитие на основе закономерностей, а не случайностей).

Ю.В. Чайковский считается учеником и последователем известного ученого, геолога и палеоботаника Сергея Викторовича Мейена. Здесь мы упоминаем С.В. Мейена как знаменитого эволюциониста, одного из разработчиков концепции *номогенеза* (чье развитие связывают также с работами Л.С. Берга – 1922, 1977 г.г.). Заметим, что в работах С.В. Мейена (см., например, [26]) предпринимались попытки сочетания принципов номогенеза



С.В. Мейен, д.г.-м.н.,
Геологический институт РАН,
лауреат Госпремии СССР 1989



Акад. А.Л. Тахтаджян
Ботанический институт РАН,
Герой соц. труда СССР 1990

с дарвинизмом. Ему же принадлежит и замечательное высказывание, весьма уместное на фоне нестихающих (порою весьма эмоциональных) споров приверженцев различных взглядов на эволюцию жизни: «В спорах рождается только склока, а истина рождается в работе».

Возвращаясь в лоно современного дарвинизма, отдадим должное еще одному выдающемуся армянско-российскому ботанику и эволюционисту академику Армену Леоновичу Тахтаджяну. Академик Тахтаджян является автором всемирно признанной филогенетической системы классификации высших растений и новой системы ботанико-географического районирования планеты. Им опубликована серия работ по теории эволюции (см., например, подборку [27]), получившая широкую известность. Стоит особо отметить блистательное эссе [28], написанное им в качестве комментария к изданиям на русском языке дарвиновского «Происхождения видов...».

5. О роли горизонтального переноса генов

Горизонтальный (межвидовой) перенос генетического материала между бактериями был впервые описан в 1959 году в публикации японских авторов [29]. В этой работе была продемонстрирована передача устойчивости к антибиотикам *между бактериями разных видов*.

Считается, что впервые *эволюционное значение* горизонтального переноса генов было отмечено в работах профессора Калифорнийского университета Майкла Сиванена (M. Sivanen). О чем свидетельствует, в частности, название и время опубликования его статьи [30]. В ней автор утверждает, что «модель межвидового переноса генов могла бы помочь объяснить многие наблюдения, запутавшие эволюционистов, такие как быстрые скачки в эволюции и широко распространенное проявление параллелизма в палеонтологической летописи». Впоследствии этот подход был развит в работах многих других специалистов.

Среди российских ученых наибольшую активность в описании и анализе эволюционных аспектов горизонтального переноса генов проявляют академик Сергей Васильевич Шестаков [31] и уже упомянутый нами сотрудник Палеонтологического института РАН А.В. Марков [18].

Принципиальная схема горизонтального обмена генетическим материалом у прокариот, представленная на рис. 20, включает хорошо известные механизмы трансформации, конъюгации и фаговой трансдукции.

Большое значение для исследований молекулярных и клеточных механизмов горизонтального переноса генов имеет также феномен агробактериальной трансформации растений [32,33]. В нем реализован возникший

в природе перенос генетического материала *от прокариот к эукариотам*, активно используемый в последнем десятилетии в генной инженерии растений. Его общая схема, показанная на рис. 21, отражает этапы прикрепления клеток, защиту Т-ДНК белками VirE2, ее перенос посредством Т-пилей и т.д.

Из результатов последних лет по механизмам межклеточных коммуникаций у бактерий, обеспечивающих им обмен разнообразными метаболитами, можно отметить работу [34]. В ней выявлены структуры типа *нанотрубок*, связывающие клетки как внутри вида, так и на уровне межвидовых взаимодействий (рис. 22).

Высшим уровнем межвидовых генетических и метаболических обменов следует, вероятно, признать эволюционную историю разнообразных *симбиозов*. В них зачастую реализуется захват целых геномов с их последующим возможным перераспределением между партнерами с соответствующими изменениями их физиолого-биохимических функций.

Одной из наиболее надежно обоснованных на сегодняшний день можно признать концепцию *симбиогенетического* происхождения клеточных органелл эукариотов, иллюстрацией которой служит схема на рис. 23, заимствованная из работы [35]. Случай «а» демонстрирует поглощение альфа-протеобактерий примитивной эукариотической клеткой из первоначально чисто трофических побуждений. Случай «b» показывает их превращение в симбионтов. Случай «с» иллюстрирует утрату симбионтом части генома с ее переносом в ядро клетки и превращением симбионта в митохондрию. Одновременно в этой части схемы показано поглощение эукариотом цианобактерий. Наконец, случай «d» отражает превращение цианобактерий в хлоропласты.

Среди многочисленных экспериментальных свидетельств в пользу теории симбиогенеза отметим публикацию российских авторов [36]. Средствами биоинформационного анализа они оценили распределение белковых доменов в надцарствах бактерий, архей и эукариот. Диаграмма на рис. 24 демонстрирует полученные ими результаты с наглядным указанием количе-



Prof. M. Syvanen

Калифорнийский университет, США



Акад. С.В. Шестаков
зав. каф. генетики МГУ,
лауреат Госпремии СССР
1988

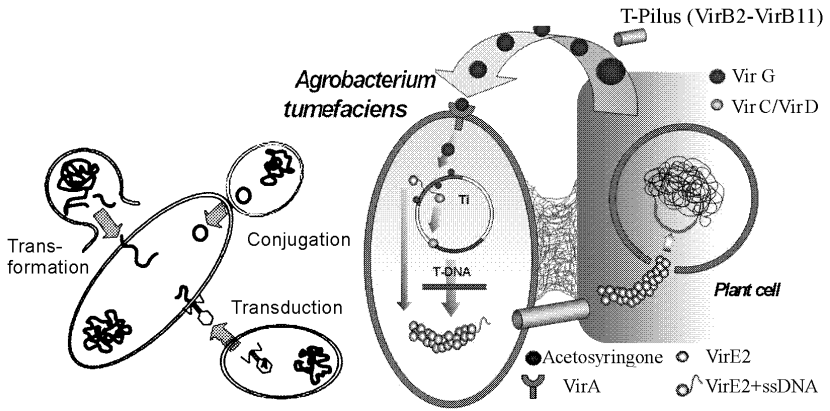


Рис. 20. Общая схема горизонтального обмена генами у бактерий

Рис. 21. Общая схема агробактериальной трансформации растений (<http://www.rasmusfrandsen.dk/atmt.htm>)

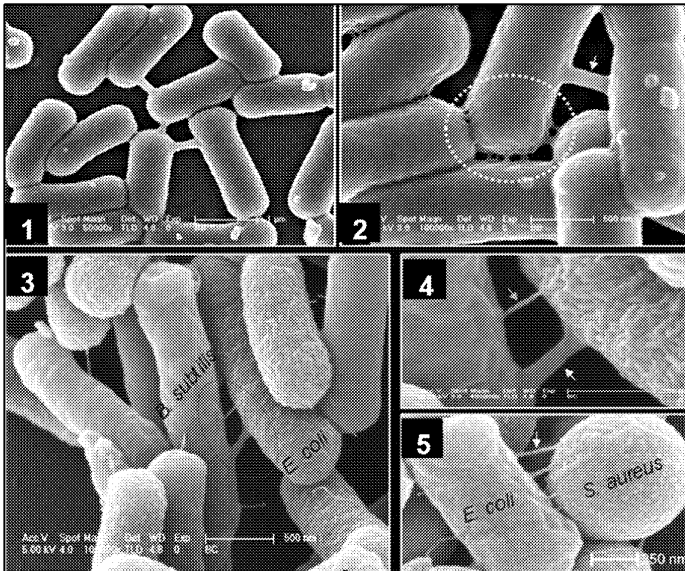


Рис. 22 . Клетки *Bacillus subtilis*, соединенные нанотрубками (1, 2), и межвидовые соединения посредством нанотрубок (3-5) [34]

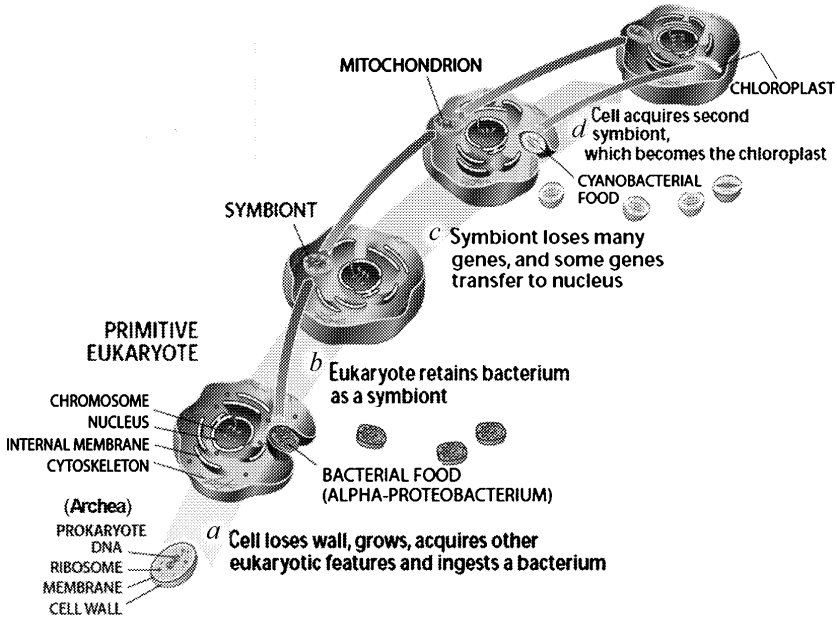


Рис. 23 Общая схема концепции симбиогенетического происхождения клеточных органелл эукариотов [35]

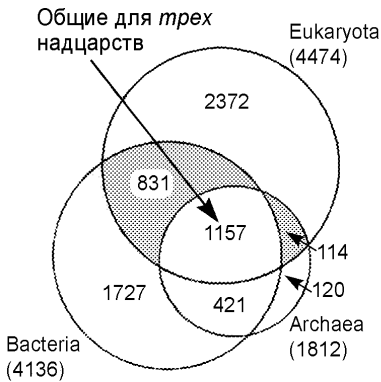


Рис. 24. Распределение в надцарствах общих и уникальных белковых доменов [36]

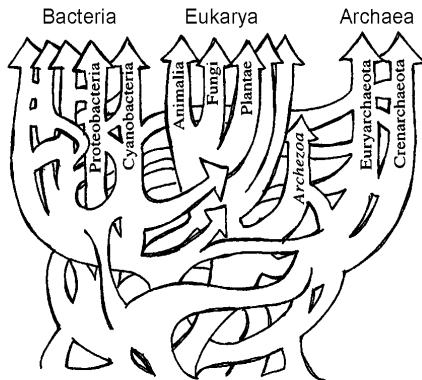


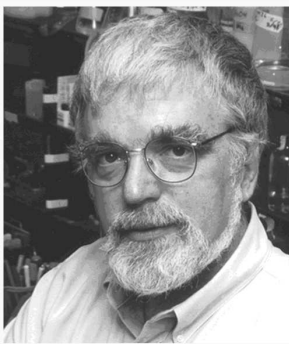
Рис. 25. Ретикулярное дерево или сеть, которая могла бы более адекватно представить историю жизни [37]

ства уникальных и обобществленных белковых доменов. Авторами охарактеризованы также типы важнейших биохимических функций, наследуемых при симбиотическом горизонтальном перераспределении генетического материала между партнерами из различных надцарств.

Схема Дулиттла (W.F. Doolittle) 2000 года была в 2005 году дополнена Марковым и Куликовым соображениями о том, что предком ядерно-цитоплазматического компонента эукариот могла стать симбиотическая архея (см. в нижней части рис. 23). Из-за существенного возрастания концентрации свободного кислорода на определенном этапе земной эволюции у таких архей мог резко активизироваться процесс инкорпорации чужеродного генетического материала из внешней среды.

Теперь можно вернуться к универсальному древу жизни, приведенному на рис. 4, и оценить его изменения с учетом симбиогенетического происхождения клеточных органелл у эукариотов (см. рис. 3). По-видимому, первые схемы такого типа, отражающие возможные пересечения ветвей филогенетического дерева, обусловленные горизонтальным переносом генов, были опубликованы тем же Фордом Дулиттлом в работе [37]. На одной из них (рис. 25) вместо укорененного по Вёзе древа жизни типа рис. 4 автором отражено наличие общего предполагаемого *предкового сообщества* бактерий и архей, выступающего в роли некоего «плавильного котла» эволюции. На этих ранних этапах весьма существенную (но отнюдь не эрозивную в эволюционном смысле) роль играл интенсивный горизонтальный обмен генов, придающий филогенетическому древу вид сильно переплетенной сети.

С ростом числа секвенированных геномов организмов и развитием математических методов биоинформационного анализа стал возможным



Prof. W.F. Doolittle
Почетный профессор,
Университет Далхаузи,
Галифакс, Канада

переход от умозрительных схем (вроде приведенных на рис. 3, 25) к более точным расчетам. На рис. 26 представлены такие данные, опубликованные в работе [38]. Здесь показана трехмерная реконструкция эволюции прокариот с учетом горизонтального переноса, полученная по *экспериментальным* результатам для примерно *полумиллиона* генов из около *двухсот* секвенированных прокариотических геномов.

По мере продвижения эволюции в сторону эукариот и многоклеточных организмов влияние горизонтального переноса ослабевало с одновременным возрастанием роли естественного отбора и генетико-стохастических процессов [28]. При этом горизонтальный перенос становится относительно более редким событием,



А. де Бари «Явление симбиоза» 1879
А.С. Фаминцин «О роли симбиоза в эволюции организмов» 1907
К.С. Мережковский «Теория двух плазм, как основа симбиогенезиса» 1909
Б.М. Козо-Полянский «Новый принцип биологии. Очерк теории симбиогенеза», 1924

и филогенетическая сеть трансформируется в стандартное ветвящееся древо жизни по Вёзе (см. рис. 4). Довольно обширную информацию о горизонтальном переносе генов в эволюции видов внутри *эукариотических* царств можно найти в книге [18].

Отмечая фундаментальную роль симбиозов в эволюции жизни на Земле, в данном обзоре по необходимости я ограничиваюсь лишь перечислением ученых, можно сказать, отцов-основателей, чей вклад в развитие симбиологии наиболее часто отмечается в литературе: А. де Бари, А.С. Фаминцин, К.С. Мережковский, Б.М. Козо-Полянский. Среди них видное место занимают представители российской научной школы. Здесь же представлены ученые, олицетворяющие современное состояние этого направления. Среди них два директора институтов РАН и РАСХН – О.В. Бухарин и И.А. Тихонович, бывший заведующий кафедрой физиологии МГУ М.В. Гусев и одна из наиболее активных представительниц зарубежной научной школы профессор Линн Маргулис.



О.В. Бухарин ИКВС УрО РАН, ассоциативные симбиозы в организме человека
И.А. Тихонович ВНИИСХМ РАСХН, бобовоозобильные симбиозы
М.В. Гусев биофак МГУ, экспериментальная симбиология, журнал *Symbiosis*
L. Margulis Массачусетский унив., США, «Роль симбиоза в эволюции клетки»,

Несколько замечаний следует сделать о молекулярно-генетических механизмах эволюционных процессов. Существует два в корне различных пути, по которым новые гены могут появиться в геноме [39]. Это а) – *дупликация* некоторых или всех имеющихся в геноме генов и б) – их приобретение от других видов (*горизонтальный перенос*). Давление естественного отбора на систему дублированных генов может отразиться либо на обоих, либо на одном из них. В первом случае велика вероятность сохранения обоих генов. Тогда как при избирательном давлении естественного отбора на один из дублированных генов он может либо деградировать, либо приобрести новую функцию. Примерами организмов, претерпевших полную дупликацию геномов, является красиво цветущее растение резуховидка Таля (Арабидопсис) и пекарские дрожжи (рис. 27).



E.P.C. Rocha, Ph.D.,
Институт Пастера, Франция



T. Treangen, Ph.D.,
Унив. Мэриленда, США

Как уже было сказано выше, горизонтальный перенос генов у эукариот наблюдается значительно реже. Исключением являются растения, способные образовывать новые полиплоиды путем слияния гамет родственных видов. В качестве примера на рис. 28 отмечен результат межвидового скрещивания культурной тучной пшеницы *Triticum turgidum* с дикорастущей травой эгилопсом оттопыренным. В результате был получен сорт мягкой летней пшеницы *T. aestivum*, отличающейся улучшенными хлебопекарными свойствами.

Из результатов исследований последних лет по теме молекулярных механизмов эволюции обращает на себя внимание работа [40]. В ней франко-американский авторский дуэт – Е.Р.С. Rocha, Т. Treangen – решал задачу оценки вклада дупликации и горизонтального переноса генов в экспансию белковых семейств в ходе эволюции прокариот.

Ими были исследованы 110 образцов геномов в широком диапазоне размеров из представительного набора семейств и родов бактерий. Методами сравнения последовательностей и кластеризации на 110 образцах геномов были идентифицированы около 60 тысяч белковых семейств, включающих приблизительно 400 тысяч белков.

Рис. 26

Трехмерная реконструкция эволюции с учетом горизонтального переноса среди 181 прокариотического генома [38]

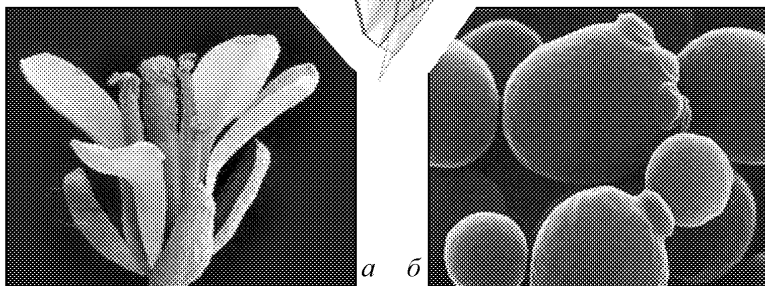
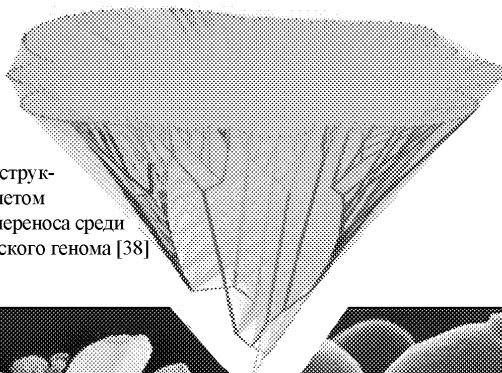


Рис. 27. Имеются доказательства возможной дубликации полных геномов *Arabidopsis thaliana* (а) и *Saccharomyces cerevisiae* (б)



Рис. 28. Мягкая летняя пшеница *Triticum aestivum* (в) как результат межвидового скрещивания *T. turgidum* (а) и *Aegilops squarrosa* (б)

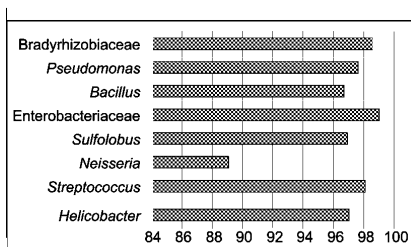


Рис.29. Относительный вклад (%) горизонтального переноса генов в экспансию белковых семейств [40]

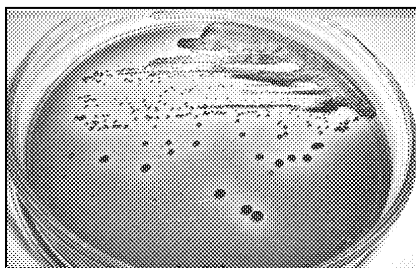


Рис. 30. Азоспириллы, выращенные на плотной питательной среде

Оценки относительного вклада горизонтального переноса в эволюционное распространение белковых семейств прокариот (рис. 29) показали, что для всех исследованных образцов он находится на уровне примерно 90–100%. Эти и другие приведенные в статье наблюдения дали авторам основания для выводов о том, что большинство экспансий белковых семейств обусловлено переносом; перенос и дупликация генов играют разные роли в формировании эволюции биологических систем; перенос делает возможным приобретение новых функций, тогда как дупликация приводит к более высокой дозе гена. В своем заключении авторы констатируют, что при изучении эволюции биологических систем следует однозначно учитывать *преобладающую роль* горизонтального переноса генов в диверсификации белковых семейств.

В завершающей части данной статьи я хотел бы остановиться на некоторых результатах, представляющих особый интерес с точки зрения научной тематики ИБФРМ РАН.

Согласно его Уставу, главной целью деятельности Института является осуществление фундаментальных и прикладных исследований в области растительно-микробных, иных *симбиотических систем* и биотехнологических разработок на их основе. Важнейшим инструментом этой работы является коллекция непатогенных микроорганизмов ИБФРМ РАН, созданная в 1981 г. и преобразованная ныне в *Коллекцию ризосферных микроорганизмов*, зарегистрированную во Всемирном электронном каталоге (WDCM) под номером 1021 (см. на http://ibppm.ru/kollekciya_mikrobnyh_kultur.html).

Коллекция включает около 300 культур бактерий, относящихся к родам: *Acidovorax*, *Aeromonas*, *Agrobacterium*, *Alcaligenes*, *Aquaspirillum*, *Arthrobacter*, *Azospirillum*, *Bradirhizobium*, *Brevundimonas*, *Camomonas*, *Ensifer*, *Enterobacter*, *Erwinia*, *Herbaspirillum*, *Kocuria*, *Micrococcus*, *Moraxella*, *Mycobacterium*, *Nocardioides*, *Paenibacillus*, *Pectobacterium*, *Pimelobacter*, *Pseudomonas*, *Rhizobium*, *Rhodococcus*, *Sinorhizobium*, *Xanthomonas*.

Центральное место в ней занимают бактерии рода *Azospirillum* (рис. 30) – 132 штамма, большая часть которых выделена из-под диких и культурных злаков Саратовской области. Это самая большая коллекция азоспирилл в России. Будучи ассоциативными азотфиксаторами, стимулирующими рост и развитие растений, эти бактерии служат одним из основных модельных объектов в исследованиях феномена растительно-микробной ассоциативности.

Нами разработана базовая концепция исследований механизмов взаимоотношений растений и ассоциативной микрофлоры с учетом традиций и последних достижений в области растительно-микробной симбиологии [41]. В ней предусмотрено познание симбиоза как *надорганизменной системы* с

разнообразными взаимодействиями, направленными на *адаптацию* партнеров к среде обитания. Важная роль отводится анализу генетических процессов, происходящих при эктосимбиозе, спонтанному и индуцированному горизонтальному переносу генов. А также перспективам изучения коэволюции как совокупности согласованных макро- и микроэволюционных процессов в эктосимбиотических системах.

В связи с чем большой интерес для нас представляют опубликованные недавно результаты полногеномного секвенирования ДНК ряда штаммов азоспирилл и анализа их *эволюционной истории* [42,43]. На рис. 31 приведен фрагмент статьи [42] японских авторов, отражающий ее основной результат. Обращает на себя внимание наличие большого числа единичных репликонов у штамма *Azospirillum sp.* B510. В работе [44] такое строение генома азоспирилл трактуется как вероятная основа высокой пластичности их метаболизма и адаптационного потенциала.

Следующая публикация [43] является результатом работы авторского коллектива 26 специалистов из Франции, США, Австралии и Мексики. Заметим, что координатором этой большой работы является бывший студент Саратовского госуниверситета и затем сотрудник ИБФРМ РАН, ныне профессор университета штата Теннесси и сотрудник Окриджской национальной лаборатории США Игорь Борисович Жулин. К исследованному ранее штамму *A. sp.* B510 [42] добавлены результаты полногеномного секвенирования ДНК еще двух – *A. lipoferum* 4B и *A. brasiliense* Sp245. Бактерии рода *Azospirillum* ассоциированы с *корнями наземных растений*. Однако, по результатам филогенетического анализа с использованием рибосомальной 16S РНК (рис. 32), в работе [43] показано, что в действительности все их близкие родственники являются *водными организмами*.

В основных выводах статьи [43] утверждается, что в соответствии с полученными данными азоспириллы перешли из водной в наземную среду обитания значительно позже (около 400 миллионов лет тому назад), чем при предполагаемом основном разделении водных и наземных бактерий (около 3 миллиардов лет). Это событие практически совпадает по времени с выходом на сушу судистых растений.



Проф. И.Б. Жулин
Университет штата Теннесси,
Окриджская национальная
лаборатория, США

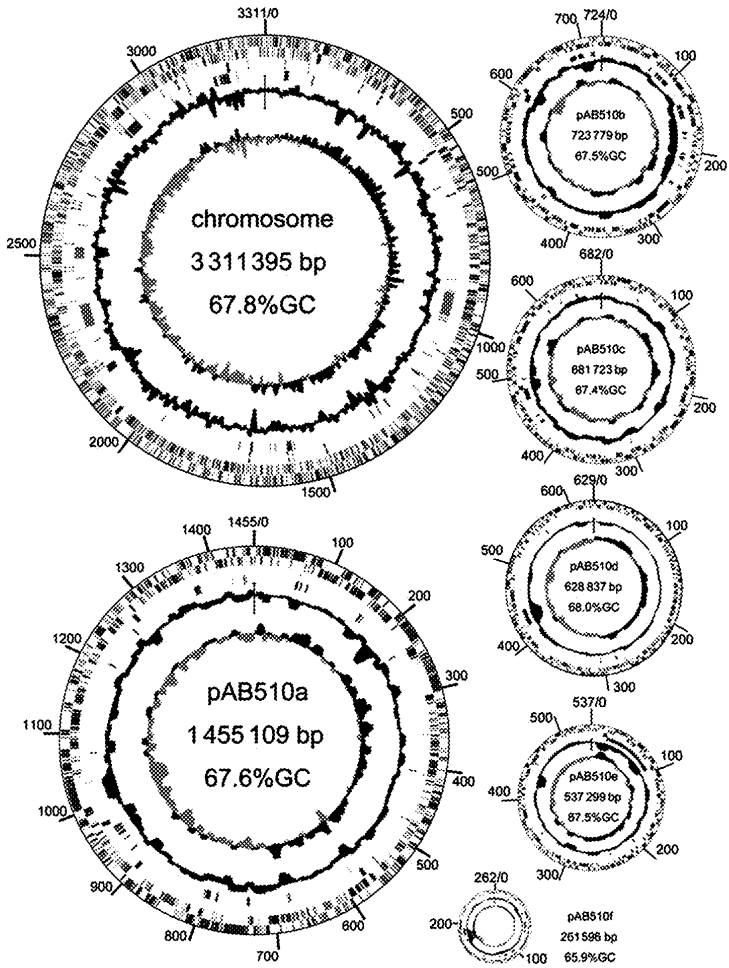


Рис. 31

Схематическое представление репликаонов в геноме
 diaзотрофного эндофита, выделенного из стебля
 культурного риса *Oryza sativa* cv. *Nipponbare* [42]

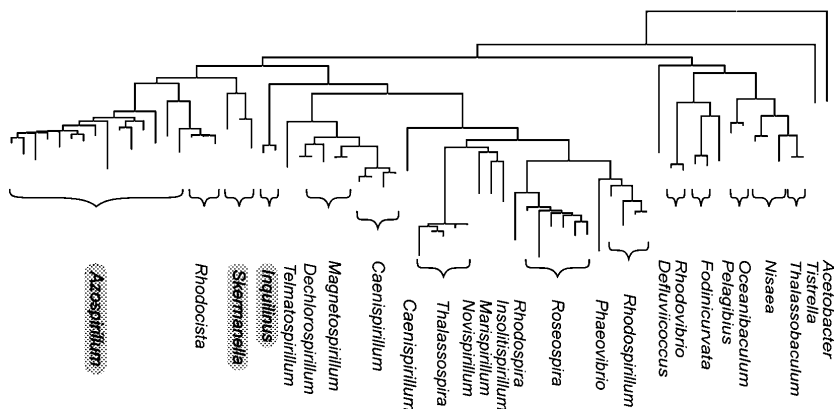


Рис. 32

Среда обитания рода *Azospirillum*
и его ближайшие аквабактериальные родственники [43]

Большинство конститутивных генов *Azospirillum* имеют ортологов у их близких водных родственников. Однако, почти половина генома азоспирилл была приобретена путем *горизонтального переноса* от отдаленно родственных *наземных бактерий*. Наибольшая часть горизонтально перенесенных генов кодирует функции, которые являются решающими для *адаптации* в ризосфере и *взаимодействия* с растениями-хозяевами.

Несколько слов о современных изданиях по обсуждаемой теме. В дополнение к цитированной выше книге А.В. Маркова [18] (ставшего лауреатом премии в области научно-популярной литературы «Просветитель» 2011 г.) отметим выход в свет еще двух его книг [45,46]. В течение многих лет Александр Владимирович ведет также в Интернете специальный сайт, посвященный проблемам эволюционной биологии (<http://evolbiol.ru>).

В 2011–2012 годах опубликованы переводы на русский язык двух книг известнейшего специалиста в области эволюционной биологии профессора Оксфордского университета Ричарда Докинза [16,47]. Профессор Докинз считается одним из самых последовательных и азартных сторонников учения Дарвина.

Что касается альтернативных дарвинизму подходов, то они достаточно обстоятельно изложены в упоминавшихся выше книгах Ю.В. Чайковского [24,25].

Завершая данный обзор, я хотел бы процитировать высказывание еще одного выдающегося ученого, нашего бывшего соотечественника профес-



Проф. Ф.Г. Добжанский
Калифорнийский университет
в Дэвисе, США

сора *Феодосия Григорьевича Добжанского*: «Ничто в биологии не имеет смысла кроме как в свете эволюции». В 2010 году вышел в свет перевод на русский язык 3-го издания его фундаментальной работы [48]. Эта книга считается одним из самых значительных трудов по синтетической теории эволюции. Ее первое издание было опубликовано Добжанским в Америке в 1937 г. И для тех, кто помнит печальную историю становления и развития генетики в нашей стране (а кто не помнит – пусть поинтересуется), год и место издания этой книги должны иметь глубоко символическое (и предостерегающее!) значение.

Библиографический список

1. *Дарвин Ч.* Происхождение видов путем естественного отбора или сохранение благоприятных рас в борьбе за жизнь. 2-е изд., доп. СПб.: Наука, 2001.
2. *Климонтович Ю.Л.* Введение в физику открытых систем // Сорос. обр. журн. 1996, № 8. С. 109.
3. *Woese C.R.* Interpreting the universal phylogenetic tree // PNAS. 2000. Vol. 97, № 15. P. 8392.
4. URL: <http://www.zo.utexas.edu/faculty/antisense/downloadfilestol.html>.
5. *Климонтович Ю.Л.* Турбулентное движение и структура хаоса: Новый подход к статистической теории открытых систем. Изд. 3. Синергетика: от прошлого к будущему. М.: URSS. 2010.
6. *Розанов А.Ю.* Когда появилась жизнь на Земле? // Вестник РАН. 2010. Т. 80, № 5–6. С. 533.
7. *Hoover R.B.* Fossils of cyanobacteria in CI1 carbonaceous meteorites: implications to life on comets, Europa and Enceladus // J. Cosmol. 2011. Vol. 13. P. 3811.
8. *Sharov A.A.* Genetic gradualism and the extraterrestrial origin of life // J. Cosmol. 2010. Vol. 5. P. 833.
9. *Joseph R., Wickramasinghe N.C.* Genetics indicates extra-terrestrial origins

- for life: the first gene. Did life begin following the big bang? // *J. Cosmol.* 2011. Vol. 16. 29. P. 6832.
10. *Спирин А.С.* Когда, где и в каких условиях мог возникнуть и эволюционировать мир РНК? // *Палеонтол. журн.* 2007, № 5. С. 11–19.
 11. *Снытников В.Н.* Абиогенный синтез пребиотического вещества для биосферы Земли как стадия самоорганизации на астрофизической и палеонтологической шкале времени // *Палеонтол. журн.* 2007, № 5. С. 3.
 12. URL: <http://myxo.css.msu.edu/index.html>.
 13. *Lenski R.E., Travisano M.* Dynamics of adaptation and diversification: A 10000-generation experiment with bacterial populations // *PNAS.* 1994. Vol. 91, № 15. P. 6808.
 14. *Blount Z.D., Borland C.Z., Lenski R.E.* Historical contingency and the evolution of a key innovation in an experimental population of *Escherichia coli* // *PNAS.* 2008. Vol. 105, № 23. P. 7899.
 15. *Barrick J.E., Yu D.S., Yoon S.H., Jeong H., Oh T.K., Schneider D., Lenski R.E., Kim J.F.* Genome evolution and adaptation in a long-term experiment with *Escherichia coli* // *Nature.* 2009. Vol. 461. P. 1243.
 16. *Докинз Р.* Самое грандиозное шоу на Земле: доказательства эволюции. М.: Астрель: CORPUS. 2012.
 17. *Четвериков С.С.* О некоторых моментах эволюционного процесса с точки зрения современной генетики // *Журн. эксперим. биол.* 1926. Т. 2. Вып. 1. С. 3; Вып. 4. С. 237.
 18. *Марков А.* Рождение сложности. Эволюционная биология сегодня: неожиданные открытия и новые вопросы. М.: Астрель: CORPUS, 2010.
 19. *Behe M.J.* Darwin's black box. The biochemical challenge to Evolution. N.Y.: Simon & Shuster, 1998.
 20. *Behe M.J.* Experimental evolution, loss-of-function mutations and the «first rule of adaptive evolution» // *Quart. Rev. Biol.* 2010. Vol. 85. № 4. P. 419.
 21. *Заварзин Г.А.* Недарвиновская область эволюции // *Вестник РАН.* 2000. Т. 70, № 5. С. 403.
 22. *Заварзин Г.А.* Составляет ли эволюция смысл биологии? // *Вестник РАН.* 2006. Т. 76, № 6. С. 522.
 23. *Галимов Э.М.* Феномен жизни: между равновесием и нелинейностью. Происхождение и принципы эволюции. М.: Едиториал УРСС, 2006.

24. *Чайковский Ю.В.* Наука о развитии жизни. Опыт теории эволюции. М.: Товарищество научных изданий КМК, 2006.
25. *Чайковский Ю.В.* Активный связный мир. Опыт теории эволюции жизни. М.: Товарищество научных изданий КМК. 2008.
26. *Мейен С.В.* Проблема направленности эволюции. Итоги науки и техники. Зоология позвоночных. Том 7. М.: ВИНТИ, 1975. С. 66.
27. *Тахтаджян А.Л.* Грани эволюции. Статьи по теории эволюции, 1943–2006 гг. СПб.: Наука, 2007.
28. *Тахтаджян А.Л.* Дарвин и современная теория эволюции. Чарлз Дарвин. Происхождение видов путем естественного отбора. 2-е изд., доп. СПб.: Наука, 2001. С. 517.
29. *Ochiai K., Yamanaka T., Kimura K., Sawada O.* Inheritance of drug resistance (and its transfer) between *Shigella* strains and between *Shigella* and *E. coli* strains (in Japanese) // *Hihon Iji Shimpou*. 1959. Vol. 1861. P. 34.
30. *Syvanen M.* Cross-species gene transfer; implications for a new theory of evolution // *J. Theor. Biol.* 1985. Vol. 112. P. 333.
31. *Шестаков С.В.* О ранних этапах биологической эволюции с позиций геномики // *Палеонтол. журн.* 2003, № 6. С. 50-57.
32. *Chilton M.-D., Drummond M.H., Merlo D.J., Sciaky D., Montoya A.L., Gordon M.P., Nester E.W.* Stable incorporation of plasmid DNA into higher plant cells: the molecular basis of crown gall tumorigenesis // *Cell*. 1977. Vol. 11. P. 263.
33. *Чумаков М.И., Моисеева Е.М.* Технологии агробактериальной трансформации растений *in planta* // *Биотехнология*. 2012, № 1. С. 8.
34. *Dubey G., Ben-Yehuda S.* Intercellular nanotubes mediate bacterial communication // *Cell*. 2011. Vol. 144, № 4. P. 590.
35. *Doolittle W.F.* Uprooting the tree of life // *Scientific American*. 2000, № 2. P. 90.
36. *Марков А.В., Куликов А.М.* Происхождение эукариот: выводы из анализа белковых гомологий в трех надцарствах живой природы // *Палеонтол. журн.* 2005, № 4. С. 3.
37. *Doolittle W.F.* Phylogenetic classification and the universal tree // *Science*. 1999. Vol. 284, № 5423. P. 2124.
38. *Dagan T., Artzy-Randrup Y., Martin W.* Modular networks and cumulative impact of lateral transfer in prokaryote genome evolution // *PNAS*. 2008. Vol. 105, № 29. P. 10039.

39. Браун Т.А. Геномы. / Пер. с англ. М.- Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2011.
40. Treangen T.J., Rocha E.P.C. Horizontal transfer, not duplication, drives the expansion of protein families in prokaryotes // PLoS Genetics. 2011. Vol. 7, № 1. e1001284. P. 1.
41. Тихонович И.А., Проворов Н.А. Симбиозы растений и микроорганизмов: молекулярная генетика агроэcosystem будущего. СПб.: Издательство Санкт-Петербургского университета, 2009.
42. Kaneko T., Minamisawa K., Isawa T., Nakatsukasa H., Mitsui H., Kawaharada Y., Nakamura Y., Watanabe A., Kawashima K., Ono A., Shimizu Y., Takahashi C., Minami C., Fujishiro T., Kohara M., Katoh M., Nakazaki N., Nakayama S., Yamada M., Tabata S., Sato S. Complete genomic structure of the cultivated rice endophyte *Azospirillum* sp. B510 // DNA Res. 2010. Vol. 17, № 1 P. 37.
43. Wisniewski-Dye F., Borziak K., Khalsa-Moyers G., Alexandre G., Sukhar-nikov L.O., Wuichet K., Hurst G.B., McDonald W.H., Robertson J.S., Barbe V., Calteau A., Rouy Z., Mangenot S., Prigent-Combarete C., Normand P., Boyer M., Siguier P., Dessaux Y., Elmerich C., Condemine G., Krishnen G., Kennedy I., Paterson A.H., Gonzalez V., Mavingui P., Zhulin I.B. *Azospirillum* genomes reveal transition of bacteria from aquatic to terrestrial environments // PLoS Genetics. 2011. Vol. 7, № 12. e1002430. P. 1.
44. Katsy E.I. Plasmid plasticity in plant-associated bacteria of the genus *Azospirillum* // In: Bacteria in agrobiolgy: plant growth responses / Ed. D.K. Maheshwari. Berlin: Springer, 2011. P. 139.
45. Марков А. Эволюция человека. В 2 кн. Кн. I. Обезьяны, кости и гены. М.: Астрель: CORPUS, 2012.
46. Марков А. Эволюция человека. В 2 кн. Кн. II. Обезьяны, нейроны и душа. М.: Астрель: CORPUS, 2012.
47. Докинз Р. Расширенный фенотип: длинная рука гена. М.: Астрель: CORPUS, 2011.
48. Добжанский Ф. Генетика и происхождение видов. Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2010.

Послесловие

В заключительном абзаце данной статьи имеются в виду драматические события в истории биологической науки, связанные с гонениями на

выдающихся российских ученых-генетиков (Н.К. Кольцова, Н.И. Вавилова, Н.В. Тимофеева-Ресовского, А.А. Баева и др.). В те незапамятные времена вмешательство властей в научную деятельность ограничивалось запретами отдельных научных направлений: генетики, а впоследствии кибернетики и квантовой механики. Что самым пагубным образом сказывалось на развитии фундаментальной науки в России, чей уровень с большими трудами и жертвами восстанавливался усилиями поколений российских ученых.

В июле 2013 года власти решили пойти дальше и предприняли попытку законодательного «реформирования» РАН, насчитывающей почти 300-летнюю историю, означающего на деле ее разгром с переподчинением институтов РАН чиновничьим структурам и отчуждением собственности, находящейся в ее оперативном управлении, постоянном (бессрочном) пользовании и т.д. Учитывая исторический опыт, нетрудно представить себе последствия этого очередного «регулирования» деятельности ученых, осуществленного законодателями в беспрецедентно короткие сроки (3 дня на два чтения закона в Госдуме!) без какого-либо обсуждения среди самих ученых и в экспертном сообществе.

НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА СИНТЕТИЧЕСКИХ СЕТЕЙ ГЕННОЙ РЕГУЛЯЦИИ

Иванченко М.В., Канаков О.И., Котельников Р.А., Крылов И.Б.

Введение

Жизнедеятельность клетки регулируется динамическими процессами взаимной активации и деактивации генов, составляющих геном клетки [1]. Такие ансамбли взаимодействующих генов называют генными сетями или цепями [2]. Подход синтетической биологии заключается в построении малых искусственных генных сетей, которые могут быть изучены достаточно детально как экспериментально, так и теоретически [3]. Синтетические генные сети обычно состоят из нескольких взаимодействующих генов, которые встраиваются в живую клетку и практически не взаимодействуют с собственными генами клетки. Хотя искусственные генные сети, доступные для реализации на текущем уровне развития синтетической биологии, существенно уступают в сложности реальным генным сетям живых клеток, они служат хорошей экспериментальной основой для проверки математических моделей, методов и подходов к описанию регуляторных сетей, в том числе, естественных. Искусственные генные сети имеют и собственные привлекательные перспективы практического применения в здравоохранении [4, 5], биоэнергетике [6], экологии [7] и в других областях.

К настоящему времени нелинейная динамика является основным математическим аппаратом исследования динамики сетей генной регуляции. Ее результаты блестяще подтверждаются биологическими экспериментами. Так, на основе синтетических генных сетей реализованы бистабильные элементы – переключатели [8], автоколебательные элементы – осцилляторы [9, 10] и счетчики событий [11]. В данной статье рассмотрены методы математического моделирования динамики синтетической генной регуляции [12], приведены примеры исследования базовых моделей и динамических режимов, а также дан краткий обзор основных современных результатов и актуальных направлений исследований.

1. Математические модели транскрипционной регуляции

В основе математических моделей динамики транскрипционной регуляции лежат кинетические уравнения биохимических процессов, которые обеспечивают производство белков в клетке. Непосредственным регулятором экспрессии гена является промоутер, область ДНК, предшествующая кодирующей ген последовательности. При конструировании синтетической генной сети в ее составе предусматриваются транскрипционные факторы – белки, которые могут связываться с используемыми промоутерами и модулировать таким образом активность гена. Различают регулируемые и постоянно активные промоутеры. Регулируемые промоутеры содержат элементы последовательности ДНК, называемые сайтами оператора, связываясь с которыми транскрипционные активаторы усиливают, а транскрипционные репрессоры ослабляют связывание РНК-полимеразы с этим участком ДНК и, как следствие, экспрессию гена в целом (рис. 1).

Рассмотрим метод построения математической модели на примере простейшего промоутера, содержащего единственный сайт оператора [12]. Многие белки, использующиеся в синтетической биологии, приобретают свойства транскрипционных регуляторов только в состоянии олигомеров (комплексов из нескольких молекул белка, обычно двух или четырех). Для иллюстрации в нашем примере используем случай димера. Предположим

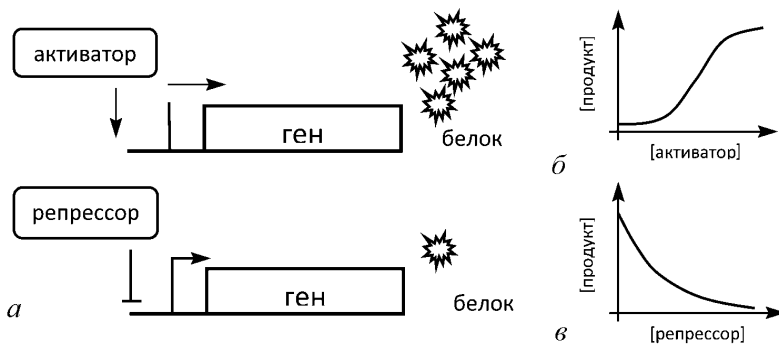


Рис. 1. Два основных типа транскрипционной регуляции – активация и репрессирование генов (а); типичный вид зависимости скорости генерации белка-продукта от концентрации молекул транскрипционного активатора (б) и репрессора (в)

также, что число молекул ДНК и транскрипционного фактора в клетке постоянно. Тогда можно записать следующие химические реакции:



где P и P_2 обозначают одиночные молекулы и димеры белка; O_b и O_u – связанные с димером белка и свободные операторы, соответственно; k_d, k_{-d}, k_b, k_{-b} – кинетические коэффициенты прямых и обратных реакций. Для соответствующих концентраций в равновесном состоянии получаем

$$\begin{aligned} k_d P^2 &= k_{-d} P_2, \\ k_b O_u P_2 &= k_{-b} O_b, \\ O_u + O_b &= N = \text{const}, \end{aligned} \quad (2)$$

где последнее уравнение вытекает из предположения о постоянстве числа молекул ДНК в клетке и, следовательно, постоянства полного числа операторов.

Решая эти уравнения, получаем выражения для числа связанных и свободных операторов в виде так называемых функций Хилла [13]

$$\begin{aligned} O_b &= N \frac{(P/K)^2}{1 + (P/K)^2}, \\ O_u &= N \frac{1}{1 + (P/K)^2}, \\ K &= \sqrt{\frac{k_{-b} k_{-d}}{k_b k_d}}. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь параметр K носит название константы Хилла и может быть интерпретирован как концентрация транскрипционного фактора, при которой половина операторов связана. Степень при концентрации мономера белка (в данном случае 2) называется коэффициентом Хилла или кооперативностью и соответствует степени олигомеризации транскрипционного фактора (заметим, что в случае сложного взаимодействия с промотором наилучшее совпадение с экспериментально измеренным откликом может дать дробная степень).

Итак, динамика концентрации продукта экспрессии гена, белка X , может быть записана следующим образом:

$$\dot{x} = \alpha_b N \frac{(P/K)^2}{1 + (P/K)^2} + \alpha_u N \frac{1}{1 + (P/K)^2} - r_{deg}(x), \quad (4)$$

где α_b, α_u – скорости производства белка геном со связанным и свободным операторами, соответственно; $r_{deg}(x)$ – функция, описывающая зависимость скорости деградации белка X от его концентрации в клетке. Для гена, регулируемого транскрипционным активатором, коэффициенты соотносятся как $\alpha_b \gg \alpha_u$, а для регулируемого транскрипционным репрессором – $\alpha_b \ll \alpha_u$.

Биохимические процессы в клетке представляют собой набор дискретных молекулярных событий. В отдельной клетке число копий синтетического гена обычно не превосходит нескольких десятков, поэтому эффекты дискретности могут наблюдаться в эксперименте [14]. В связи с этим результаты анализа нелинейных дифференциальных уравнений зачастую проверяются в численном моделировании соответствующих марковских случайных процессов [15], в данном случае – согласно уравнениям (1).

В простейшем случае эффект деградации белка может достигаться за счет уменьшения его концентрации в процессе роста и деления клетки. Тогда имеет место так называемая экспоненциальная деградация

$$r_{deg} = \gamma x, \quad (5)$$

где γ – некоторый кинетический коэффициент. Во многих случаях, однако, процесс деградации желателно ускорить и (или) сделать контролируемым. Для этого ген модифицируется специальной меткой, которая делает синтетический белок-продукт видимой целью для молекулярных механизмов точечной деградации. Скорость деградации при этом становится зависимой от числа участвующих в процессе молекул-ферментов (точнее – ограниченной этим числом), и формализм Хилла дает

$$r_{deg} = \gamma \frac{x}{K_m + x}, \quad (6)$$

где K_m – некоторая константа. Заметим, что хотя в некотором диапазоне зависимость (6) аппроксимируется линейной (5), необходимо помнить, что нелинейное ограничение может качественно изменить динамику исследуемой системы.

Важно иметь в виду, что процесс производства белка состоит из нескольких промежуточных этапов: прикрепление РНК-полимеразы к ДНК и создание матричной РНК (транскрипция), транспорт мРНК из ядра (у эукариотов), создание рибосомой белковой аминокислотной последовательности по мРНК (трансляция), олигомеризация белка к конечной функциональной форме (обычно димер или тетрамер). Моментальное изменение скорости наработки белка при изменении концентрации транскрипционного фактора, заложенное в уравнении (4), является не более чем аппроксимацией. Как мы увидим в следующем разделе, реальная динамика может оказаться существенно отличной.

Существует два основных подхода к построению более реалистичных моделей. Первый состоит в более детальном описании процесса. Например, можно выделить этапы транскрипции и трансляции (считая, что результатом последней является функциональный белок). Тогда получим систему дифференциальных уравнений второго порядка

$$\begin{aligned} \dot{m} &= \alpha_b N \frac{(P/K)^2}{1 + (P/K)^2} + \alpha_u N \frac{1}{1 + (P/K)^2} - r_m(m), \\ \dot{x} &= r_{tl}m - r_x(x), \end{aligned} \quad (7)$$

где m – количество молекул мРНК; $r_m(m)$, $r_x(x)$ – функции деградации мРНК и конечного белка; r_{tl} – скорость трансляции. Модель может быть детализирована и далее, например, учетом кинетики олигомеризации белка-продукта. Основная проблема этого подхода состоит в том, что количественные значения параметров промежуточных реакций в подавляющем большинстве случаев неизвестны.

Другим распространенным подходом является феноменологическое описание каскада биохимических реакций как системы с задержкой

$$\dot{x} = \alpha_b N \frac{(P(t - \tau)/K)^2}{1 + (P(t - \tau)/K)^2} + \alpha_u N \frac{1}{1 + (P(t - \tau)/K)^2} - r_{deg}(x), \quad (8)$$

где τ – некоторый хорошо определенный параметр, как было показано в [16].

2. Автоколебания

Рассмотрим простейший пример регуляторной генной динамики – модель авторепрессора. Биологически он может быть реализован в виде

гена с промотором, ингибируемым белком – продуктом экспрессии гена (рис. 2, *a*). С точки зрения нелинейной динамики, это система с отрицательной обратной связью, которая при определенных условиях может демонстрировать неустойчивость стационарного режима и возникновение автоколебаний через бифуркацию Андронова–Хопфа. Действительно, в недавнем эксперименте подобный синтетический генный осциллятор был сконструирован, как и более сложный вариант, дополнительно содержащий транскрипционный активатор [10]. В природных генных сетях подобные принципы организации автоколебаний обнаруживаются, например, в циркадных осцилляторах, управляющих суточной активностью клеток [17].

Легко видеть, что для любого значения коэффициента Хилла n одномерная модель

$$\dot{x} = \frac{\alpha}{1 + x^n} - x, \quad (9)$$

где часть параметров исключена за счет масштабирования переменной и времени, имеет единственное устойчивое состояние равновесия (рис. 2, *б*), являющееся корнем полинома

$$x_0^{n+1} + x_0 - \alpha = 0. \quad (10)$$

Интересно отметить, что учет динамики мРНК наподобие (7) не дает автоколебаний. Состояние равновесия в двумерном фазовом пространстве – либо

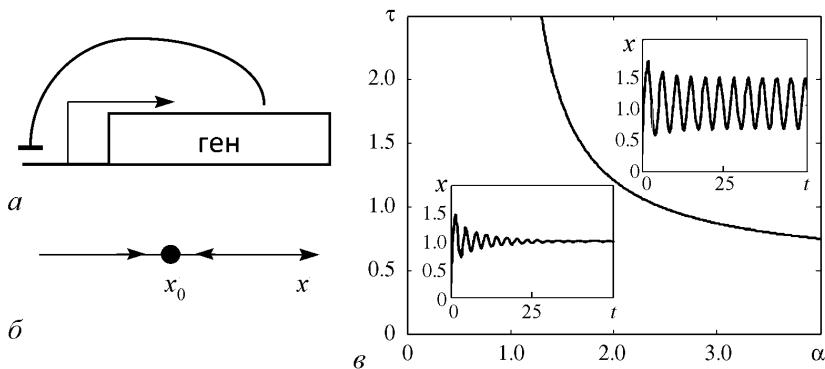


Рис. 2. *a* – принципиальная схема авторепрессора; *б* – глобально асимптотически устойчивое состояние равновесия в одномерной модели без задержки (9); *в* – разбиение пространства параметров $\{\alpha, \tau\}$ модели с задержкой (11) на области стационарной и автоколебательной динамики и типичные реализации

устойчивый узел, либо фокус. Однако добавление третьего компонента (который может быть интерпретирован как промежуточная, неактивная форма белка, возможно требующая активации неким ферментом или разворачивания) позволяет получить автоколебательный режим, например, в модели осциллятора Гудвина [18].

Более биологически ясная математическая модель системы с задержкой

$$\dot{x} = \frac{\alpha}{1 + x^n(t - \tau)} - x \quad (11)$$

также демонстрирует автоколебания. В самом деле, линеаризуя систему (11) вблизи состояния равновесия (10)

$$x(t) = x_0 + \xi(t), \quad |\xi(t)/x_0| \ll 1, \quad (12)$$

после несложных преобразований получаем

$$\dot{\xi}(t) \approx n \left(\frac{x_0}{\alpha} - 1 \right) \xi(t - \tau) - \xi(t). \quad (13)$$

Предполагая $\xi(t) \sim e^{\lambda t}$, приходим к характеристическому уравнению

$$\lambda = n \left(\frac{x_0}{\alpha} - 1 \right) e^{-\tau\lambda} - 1. \quad (14)$$

В точке бифуркации Андронова–Хопфа характеристические показатели являются чисто мнимыми $\lambda = \pm i\omega$. Разделяя действительную и мнимую части (14), получаем

$$\begin{aligned} \omega^2 &= n^2 (1 - x_0/\alpha)^2 - 1, \\ \cos \omega\tau &= -\frac{1}{n(1 - x_0/\alpha)}. \end{aligned} \quad (15)$$

Принимая во внимание, что $x_0 \leq \alpha$ (10), получаем необходимое условие для возникновения автоколебаний $n \geq 2$. Заметим, что авторепрессор *LacI*, использовавшийся в эксперименте [10], становится транскрипционным фактором в состоянии тетрамера, то есть его кооперативность равна 4. Система (15) определяет соотношение между мнимой частью характеристического показателя в точке бифуркации (которая может служить оценкой частоты автоколебаний недалеко от бифуркационной границы) и временем задержки

$$\cos \omega\tau = -\frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2}}. \quad (16)$$

В частности, для $\omega > 1$ получаем $\omega t \sim \pi/2$ и период $T = 2\pi/\omega \sim 4t$. Этот результат показывает, что период возникающих колебаний не обязательно близок по величине к времени задержки и может существенно превосходить его.

Бифуркационная кривая может быть получена численным решением уравнений (10) и (15). Пример такой кривой для $n = 4$ и характерные динамические режимы представлены на рис. 2, в. Более глубокий анализ динамики системы авторепрессора заинтересованный читатель может найти в работе [19].

3. Бистабильный элемент

Другим крайне важным типом регуляторной динамики является возможность выбора системой одного из нескольких устойчивых состояний в зависимости от начальных условий, бистабильность или мультистабильность. Такое поведение может лежать в основе изменчивости поведения клеток в зависимости от внешней среды, внешних воздействий, от предыстории. Самым известным подобным контуром среди природных является, пожалуй, генный переключатель λ -бактериофага между пассивным и активным состояниями [20].

Синтетический аналог в виде взаимно репрессирующих генов (рис. 3, а) был впервые экспериментально реализован в двух вариантах и исследован в работе [8]. В обоих контурах одним из репрессоров был выбран *lacI*, вторым – либо температурно-чувствительный λ репрессор, либо *tetR*. Переключение между состояниями с доминирующей экспрессией

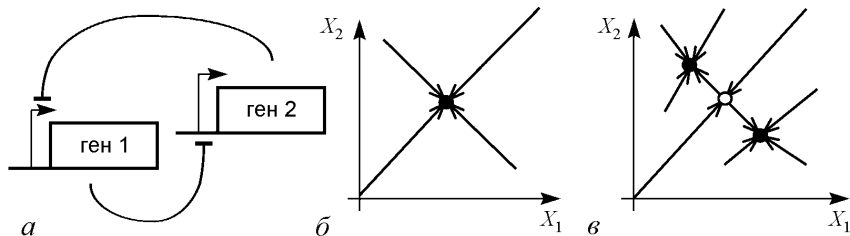


Рис. 3. а – принципиальная схема бистабильного элемента, построенного на базе двух взаимных репрессоров; качественный вид фазового портрета системы (17) в режимах моностабильности (б) и бистабильности (в)

одного или другого репрессора было реализовано с помощью «импульсов» концентраций химических веществ, понижающих активность избранных репрессоров, либо «импульсов» температуры.

Простейшая математическая модель динамики взаимных репрессоров имеет вид

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \frac{K_1}{1 + x_2^{n_2}} - x_1, \\ \dot{x}_2 &= \frac{K_2}{1 + x_1^{n_1}} - x_2,\end{aligned}\tag{17}$$

где $x_{1,2}$ – безразмерные концентрации молекул белков-репрессоров, $n_{1,2}$ – их кооперативность, $K_{1,2} > 0$ – скорости производства белков в отсутствие репрессирующего действия оппонента.

Рассмотрим частный случай $K_1 = K_2 = K$, $n_1 = n_2 = n$. В силу симметрии системы уравнений (17), состояния равновесия либо лежат на биссектрисе $x_1 = x_2$, либо образуют симметричные пары (x_1, x_2) , (x_2, x_1) . Решения первого типа являются корнями полинома

$$x^{n+1} + x - K = 0.\tag{18}$$

Легко видеть, что (18) всегда имеет ровно один действительный положительный корень. Линеаризация (17) в окрестности этого состояния равновесия дает характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 - \frac{n^2}{K^2}x^{2(n+1)} = 0\tag{19}$$

с корнями

$$\lambda_{1,2} = -1 \pm \frac{n}{K}x^{n+1}.\tag{20}$$

Используя (18) и (20), получаем, что симметричное состояние равновесия устойчиво при

$$K < K^* = \frac{n}{n-1} \frac{1}{\sqrt[n]{n-1}}\tag{21}$$

и становится седловым при $K > K^*$. Отметим, что потеря устойчивости возможна, только если кооперативность репрессоров больше 1.

Для $n = 2$ ($K^* = 2$) несложно найти все состояния равновесия системы (17), воспользовавшись тем, что симметричное решение удовлетворяет

уравнению (18). После понижения степени полинома, уравнение для асимметричных состояний равновесия будет иметь вид

$$x^2 - Kx + 1 = 0, \quad (22)$$

откуда

$$x_{1,2} = \frac{K \pm \sqrt{K^2 - 4}}{2}, \text{ при } K \geq K^* = 2. \quad (23)$$

Таким образом, при $K = 2$ имеет место бифуркация трехкратного состояния равновесия, и при $K > 2$ система действительно демонстрирует бистабильность

(рис. 3, б, в). В одном из устойчивых состояний доминирует один из репрессоров ($X_1 > X_2$), в другом – другой ($X_1 < X_2$). Выбор состояния зависит от расположения начальных условий на фазовой плоскости относительно сепаратрис седла, или от положения изображающей точки в результате внешнего воздействия на систему. Результаты исследования более общего случая $K_1 \neq K_2$ и $n_1 \neq n_2$ можно найти в работе [8].

Интересное развитие работы в области динамических механизмов принятия клеточных решений получили в недавней статье [21]. В ней авторы исследовали влияние скорости принятия клеточных решений на исход процесса. В рассмотренной ими модели бифуркационные параметры (аналоги $K_{1,2}$ в модели (17)) изменялись во времени так, что регуляторная система переходила от моностабильного состояния к бистабильному. Оказалось, что в условиях асимметрии между репрессорами прохождение бифуркационной точки с медленной скоростью приводило к режиму доминирования более сильного репрессора, в то время как быстрое прохождение обеспечивало практически равную вероятность доминирования сильного или слабого.

Эти эффекты, по мнению авторов, могут играть существенную роль в процессах принятия генно-регулируемых клеточных решений в нестационарных условиях, таких как дифференциация, развитие клеток и онкогенез [22–24].

4. Последовательная активность

Последовательная, упорядоченная активация генов является еще одним базовым типом генной регуляции. Первая экспериментальная реализация такой синтетической генной динамики – так называемый «репресслятор» – была выполнена в работе [9]. В конструкции контура авторы

воплотили принцип игры «камень, ножницы, бумага»: каждый из трех репрессоров (*LacI*, *TetR*, *cI* λ -фага) ингибировал экспрессию «следующего», как показано на рис. 4, а. В результате в надлежащих условиях наблюдалось возникновение автоколебаний с попеременной экспрессией генов.

Для теоретического анализа авторы использовали следующую математическую модель, детализирующую динамику каждой мРНК m_i и белка-продукта x_i :

$$\begin{aligned} \dot{m}_i &= \frac{\alpha}{1 + x_j^n} - m_i, \\ \dot{x} &= -\beta(x_i - m_i), \\ i &= \{lacI, tetR, cI\}, \\ j &= \{cI, lacI, tetR\}. \end{aligned} \quad (24)$$

Координаты состояний равновесия данной системы уравнений определяются из

$$\begin{aligned} m_i &= x_i = x, \\ x^{n+1} + x - \alpha &= 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Несложно показать, что положительное решение (25) всегда существует и единственно. Линеаризуя систему (24) вблизи состояния равновесия, получаем характеристическое уравнение

$$\begin{aligned} (1 + \lambda)^3(\beta + \lambda)^3 + \beta^3 d^3 &= 0, \\ d &= \frac{\alpha n x^{n-1}}{(1 + x^n)^2}, \end{aligned} \quad (26)$$

корни которого удовлетворяют

$$\begin{aligned} (1 + \lambda)(\beta + \lambda) + \beta d &= 0, \\ (1 + \lambda)(\beta + \lambda) + \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}\beta d &= 0. \end{aligned} \quad (27)$$

Корни первого из уравнений всегда отрицательны. Корни второго могут удовлетворять критерию бифуркации Андронова–Хопфа $\text{Re } \lambda = 0$, $\text{Im } \lambda \neq 0$. Область автоколебаний в пространстве параметров задается неравенством

$$\frac{(\beta + 1)^2}{\beta} < \frac{3d^2}{4 - 2d}. \quad (28)$$

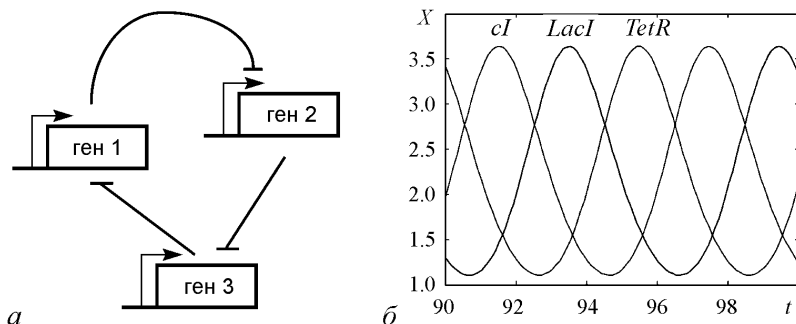


Рис. 4. *a* – принципиальная схема контура на базе трех репрессоров; *б* – пример последовательной автоколебательной динамики: показана динамика концентраций белков в клетке при $n = 4$, $\alpha = 10$, $\beta = 5$, над максимумами указаны названия конкретных белков-репрессоров, использовавшихся в работе [9]

В частности для репрессоров-димеров $n = 2$ при $\alpha = 10$ имеем координаты состояния равновесия $x_i = m_i = 2$, параметр $d = 1.6$ и автоколебания при $\beta < (19 + 4\sqrt{21})/5$. Пример последовательной автоколебательной генерации белков-репрессоров для $\beta = 5$ представлен на рис. 4, *б*.

Пионерские результаты [9] стимулировали большой объем исследований [25, 26]. В частности, для систем дифференциальных уравнений с n репрессорами было показано существование не только периодических решений, но и мультистабильности состояний равновесия, а также гетероклинических циклов [27, 28].

5. Коллективная динамика

До сих пор мы рассматривали способы организации динамики генной регуляции внутри одной клетки. Естественным дальнейшим шагом является инженерия межклеточного взаимодействия. Наиболее употребительный способ основан на природном механизме «кворум-сенсинга» (quorum sensing), который используется некоторыми бактериями и микроорганизмами [29]. Механизм основан на синтезе небольших молекул, которые могут легко диффундировать через мембрану клетки и служить лигандами, активирующими транскрипционные факторы (обычно применяются молекулы семейства N-ацил-гомосеринлактонов, англоязычная аббревиатура AHL). С помощью межклеточной коммуникации реализованы такие динамические

эффекты, как синхронизация колебаний [30], взаимная синхронизация в больших ансамблях [31], синхронизация внешним периодическим сигналом [32], взаимная синхронизация клеточных колоний [33], режим взаимодействия «хищник-жертва» [34], формирование пространственных структур с помощью градиента AHL [35], выделение контуров для обработки изображений [36], а также продемонстрирована возможность выполнения логических операций с помощью клеток [37, 38]. Здесь мы рассмотрим одну из задач этого класса.

В благоприятных условиях клетки в колонии делятся, и их плотность возрастает, достигая со временем некоторого предельного значения. Сдерживание роста может быть обусловлено рядом факторов, среди которых – ограниченное количество питательных веществ, физического пространства, скопление токсичных продуктов метаболизма. В этих условиях могут активироваться сигнальные регуляторные пути, тормозящие деление клеток. В поле синтетической биологии возникает задача об управлении численностью клеток в популяции с помощью искусственных регуляторных сетей. Помимо фундаментальной стороны вопроса присутствует и практическая. Например, может быть желательным не допустить «перенаселенности» колонии, когда полезная функциональность клеток может оказаться подавленной или ограничить рост одного из штаммов клеток в пользу другого.

Одна из возможных схем была реализована в работе [39]. Синтетический контур в каждой клетке содержит фермент *LuxI*, производящий молекулы *AHL*, которые в комплексе с белком *LuxR* являются транскрипционным активатором для другого фермента, активирующего процесс апоптоза – гибели клетки (рис. 5, а). Концентрация молекул *AHL* в клетках и межклеточном пространстве пропорциональна плотности клеток, а весь контур работает как система отрицательной обратной связи.

В наиболее простом виде динамику генной регуляции можно описать уравнениями

$$\begin{aligned}\dot{N} &= N(k - N) - dEN, \\ \dot{A} &= N - A, \\ \dot{R} &= A - R, \\ \dot{E} &= R - E,\end{aligned}\tag{29}$$

где N, A, R, E – безразмерные концентрации клеток, *AHL*, комплекса *AHL*–*LuxR* и фермента апоптоза, соответственно; k – максимальная безразмерная

концентрация клеток в отсутствие синтетической регуляции; d – коэффициент активации апоптоза ферментом.

Система (29) всегда имеет единственное нетривиальное состояние равновесия

$$N^* = A^* = R^* = E^* = \frac{k}{1+d}. \quad (30)$$

Его устойчивость определяется корнями λ характеристического уравнения

$$(N^* + \lambda)(1 + \lambda)^3 + dN^* = 0. \quad (31)$$

Несложно показать, что состояние равновесия может терять устойчивость в результате бифуркации Андронова–Хопфа, которой на плоскости параметров (k, d) отвечает линия

$$k^* = \frac{(3N+1)(3N^2+9N+8)}{(N+3)^3}, \quad (32)$$

$$N^* = \frac{k^*}{1+d^*}.$$

При $d > d^*(k)$ система демонстрирует периодические колебания плотности клеток (рис. 5, б). В эксперименте колебания численности клеток также получить удалось [39].

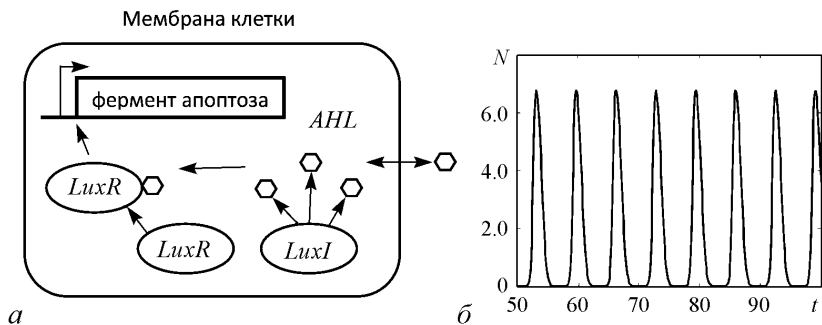


Рис. 5. а – принципиальная схема синтетического контура, способного регулировать плотность клеток в популяции; б – пример динамики плотности клеток в автоколебательном режиме $k = 10$, $d = 5$ (29)

Заключение

Исследование механизмов генной регуляции является сегодня одной из наиболее актуальных задач нелинейной динамики. Особую привлекательность этой проблематике придают постоянно возрастающие возможности синтетической биологии, которые позволяют конструировать в хорошей степени изолированные и небольшие регуляторные системы, допускающие контролируемые эксперименты. В данном обзоре на простейших примерах показано как методы нелинейной динамики могут быть использованы для анализа и предсказательной инженерии синтетических регуляторных генных сетей. Естественно, в работах высокого уровня используются не только простейшие математические модели – низкоразмерные системы дифференциальных уравнений, но и многомерные системы, и стохастические модели, весьма детализировано описывающие молекулярные процессы в клетке и позволяющие достичь не только качественного, но и количественного согласования с экспериментом. Исследование таких моделей, как правило, сугубо численное и следует за качественным анализом низкоразмерных моделей.

Помимо экспериментально реализованных систем существует много интересных теоретических предсказаний, которые только ожидают своего эксперимента. Среди них отдельно отметим мультистабильность и кластеризацию в условиях антагонистического взаимодействия между клетками [40], коллективные механизмы дифференциации клеток в условиях мультистабильности и кластерообразования [41], зависимость режима синхронизации (синфазной или противофазной) от характеристик транскрипции и кинетики мРНК [42], влияние скорости изменения параметров и интенсивности шума на результат конкуренции синтетических подсетей [21, 43]. Несомненно, в ближайшем будущем нас ждут экспериментальные подтверждения, по крайней мере, некоторых из них, а также новые увлекательные открытия.

Работа выполнена при поддержке гранта ФЦП «Кадры», соглашение № 14.В37.21.1234, и гранта РФФИ 13-02-00918-а.

Библиографический список

1. *Jacob F., Monod J.* Genetic regulatory mechanisms in synthesis of proteins // *J. Mol. Biol.* 1961. Vol. 3. P. 318.
2. *Hasty J., McMillen D., Collins J.J.* Engineered gene circuits // *Nature.* 2002. Vol. 420. P. 224.

3. *Nandagopal N., Elowitz M.B.* Synthetic Biology: Integrated Gene Circuits // *Science*. 2011. Vol. 333. P. 1244.
4. *Lu T.K., Khalil A.S., Collins J.J.* Next-generation synthetic gene networks // *Nat. Biotechnol.* 2009. Vol. 27. P. 1139.
5. *Ro D.K. et al.* Production of the antimalarial drug precursor artemisinic acid in engineered yeast // *Nature*. 2006. Vol. 440. P. 940.
6. *Lee S.K. et al.* Metabolic engineering of microorganisms for biofuels production: From bugs to synthetic biology to fuels // *Curr. Opin. Biotechnol.* 2008. Vol. 19. P. 556.
7. *Sayler G.S., Simpson M.L., Cox C.D.* Emerging foundations: Nano-engineering and bio-microelectronics for environmental biotechnology // *Curr. Opin. Microbiol.* 2004. Vol. 7. P. 267.
8. *Gardner T.S., Cantor C.R., Collins J.J.* Construction of a genetic toggle switch in *Escherichia coli* // *Nature*. 2000. Vol. 403. P. 339.
9. *Elowitz M.B., Leibler S.* A synthetic oscillatory network of transcriptional regulators // *Nature*. 2000. Vol. 403. P. 335.
10. *Stricker J. et al.* A fast, robust and tunable synthetic gene oscillator // *Nature*. 2008. Vol. 456. P. 516.
11. *Friedland A.E. et al.* Synthetic gene networks that count // *Science*. 2009. Vol. 324. P. 1199.
12. *O'Brien E.L., van Itallie E., Bennett M.R.* Modeling synthetic gene oscillators // *Math. Biosciences*. 2012. Vol. 236. P. 1.
13. *Hill A.V.* The possible effects of the aggregation of the molecules of haemoglobin on its dissociation curves // *J. Physiol.* 1910. Vol. 40. No. vi-vii.
14. *Elowitz M.B. et al.* Stochastic gene expression in a single cell // *Science*. 2002. Vol. 297. P. 1183.
15. *Gillespie D.T.* Stochastic simulation of chemical kinetics // *Annual Review of Physical Chemistry*. 2007. Vol. 58. P. 35.
16. *Bel G., Munsky M., Nemenman I.* The simplicity of completion time distributions for common complex biochemical processes // *Phys. Biol.* 2010. Vol. 7. P. 016003.
17. *Ishiura M. et al.* Expression of a gene cluster *kaiABC* as a circadian feedback process in cyanobacteria // *Science*. 1998. Vol. 281. P. 1519.
18. *Goodwin B.C.* Oscillatory behavior in enzymatic control processes // *Adv. Enzyme Regul.* 1965. Vol. 3. P. 425.
19. *Mather W. et al.* Delay-induced degrade-and-fire oscillations in small genetic circuits // *Phys. Rev. Lett.* 2009. Vol. 102, P. 068105.

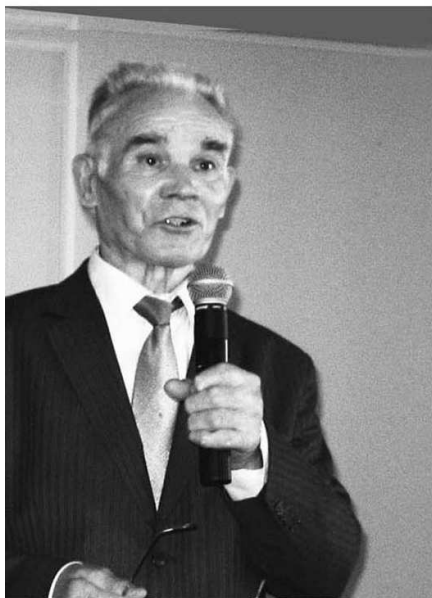
20. *Johnson A.D. et al.* Lambda Repressor and cro-components of an efficient molecular switch // *Nature*. 1981. Vol. 294. P. 217.
21. *Nene N., Garcia-Ojalvo J., and Zaikin A.* Speed-dependent cellular decision making in nonequilibrium genetic circuits // *PLoS ONE*. 2012. Vol. 7. P. e40085.
22. *Huang S. et al.* Bifurcation dynamics in lineage-commitment in bipotent progenitor cells // *Dev. Biol.* 2007. Vol. 305. P. 695.
23. *Cohen M. et al.* Dynamic filopodia transmit intermittent delta-notch signaling to drive pattern refinement during lateral inhibition // *Dev. Cell*. 2010. Vol. 19. P. 78.
24. *Widschwendter M. et al.* Epigenetic stem cell signature in cancer // *Nat. Genet.* 2007. Vol. 39. P. 157.
25. *Bennett M.R. et al.* Transient dynamics of genetic regulatory networks // *Biophys. J.* 2007. Vol. 92. P. 3501.
26. *Buse O., Perez R., Kuznetsov A.* Dynamical properties of the repressilator model // *Phys. Rev. E*. 2010. Vol. 81. P. 066206.
27. *Muller S. et al.* A generalized model of the repressilator // *J. Math. Biol.* 2006. Vol. 53. P. 905.
28. *Strelkowa N., Barahona M.* Transient dynamics around unstable periodic orbits in the generalized repressilator model // *Chaos*. 2011. Vol. 21. 023104.
29. *Miller M.B., Bassler B.L.* Quorum sensing in bacteria // *Annu. Rev. Microbiol.* 2001. Vol. 55. P. 165.
30. *McMillen et al.* Synchronizing genetic relaxation oscillators by intercell signaling // *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*. 2002. Vol. 99. P. 679.
31. *Danino T. et al.* A synchronized quorum of genetic clocks // *Nature*. 2010. Vol. 463. P. 326.
32. *Mondragon-Palomino O. et al.* Entrainment of a population of synthetic genetic oscillators // *Science*. 2011. Vol. 333. P. 1315.
33. *Prindle A. et al.* Sensing array of radically coupled genetic biopixels // *Nature*. 2012. Vol. 481. P. 39.
34. *Balagadde F.K. et al.* A synthetic Escherichia coli predator-prey ecosystem // *Mol. Syst. Biol.* 2008. Vol. 4. P. 187.
35. *Basu S. et al.* A synthetic multicellular system for programmed pattern formation // *Nature*. 2005. Vol. 434. P. 1130.
36. *Tabor J.J. et al.* A synthetic genetic edge detection program // *Cell*. 2009. Vol. 137. P. 1272.

37. *Tamsir A., Tabor J.J., Voigt C.A.* Robust multicellular computing using genetically encoded NOR gates and chemical 'wires' // *Nature*. 2011. Vol. 469. P. 212.
38. *Regot S. et al.* Distributed biological computation with multicellular engineered networks // *Nature*. 2011. Vol. 469. P. 207.
39. *Balagadde F.K. et al.* Long-term monitoring of bacteria undergoing programmed population control in a microchemostat // *Science*. 2005. Vol. 309. P. 137.
40. *Ullner E., Zaikin A. et al.* Multistability and clustering in a population of synthetic genetic oscillators via phase-repulsive cell-to-cell communication // *Phys. Rev. Lett.* 2007. Vol. 99. P. 148103.
41. *Koseska A. et al.* Cooperative differentiation through clustering in multicellular populations // *J. of Theor. Biol.* 2010. Vol. 263. P. 189.
42. *Potapov I., Volkov E., Kuznetsov A.* Dynamics of coupled repressilators: The role of mRNA kinetics and transcription cooperativity // *Phys. Rev. E*. 2011. Vol. 83. P. 031901.
43. *Nene N., Zaikin A.* Interplay between path and speed in decision making by high-dimensional stochastic gene regulatory networks // *PLoS ONE*. 2012. Vol. 7. P. e40085.



ОКНО
В
НАУКУ

Приглашенные лекторы



В.С.Степанчук, профессор СГУ



Д.И.Трубецков, чл-кор.РАН, СГУ

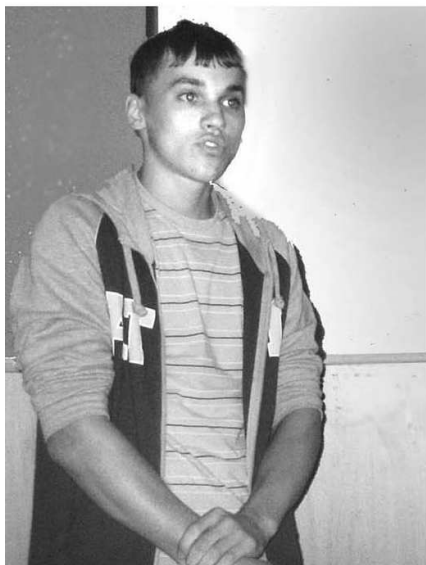


А.В.Савин, доцент СГУ



Г.Т.Гурия, профессор ГНЦ, Москва

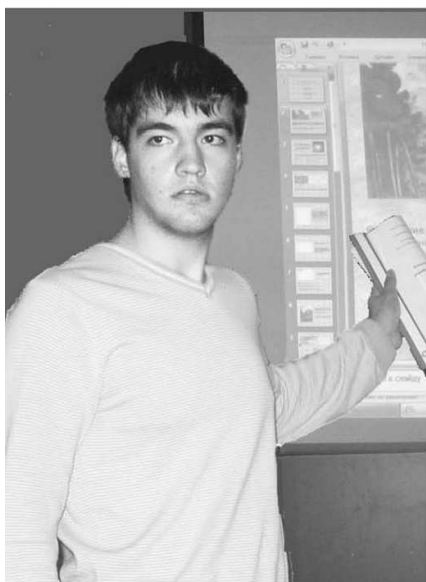
Доклады школьников



Воличенко Анатолий, Лицей №37, 11 класс



Булыгина Анна, ЛПН, 11 класс



Исаев Дима, СОШ №59, 11 класс



Постаногов Григорий, ЛПН, 11 класс

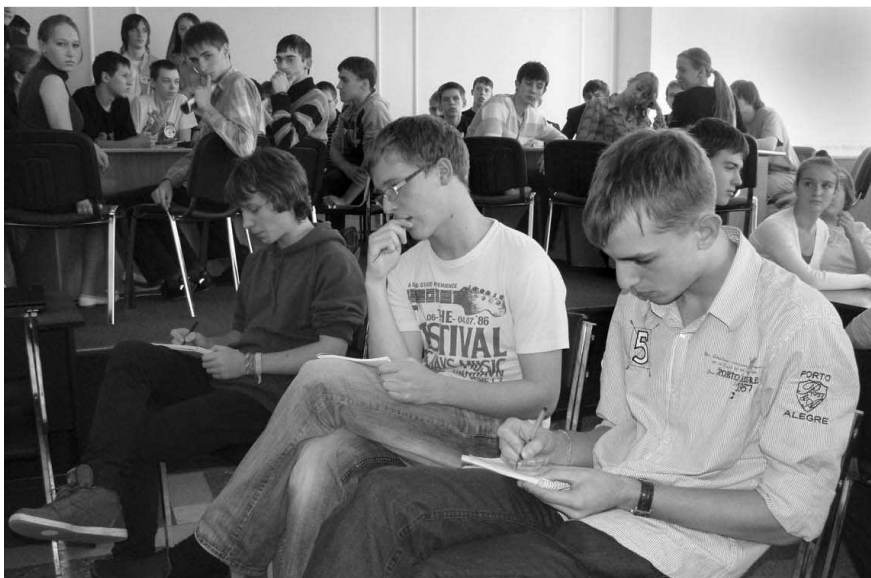


Олимпиада





Сборная команда Академбоя



Академбой. Конкурс капитанов, слева направо: Чумачков К., ФТЛ, 10 класс;
Киселев Н., Лицей № 37, 11 класс; Агеев Н., ЛПН, 11 класс



Академбой, слева направо: Короновский А., ФТЛ, 10 класс; Чумачков К., ФТЛ, 10 класс;
Коссович Д., Гимназия №4, 10 класс; Киселев Н., Лицей № 37, 11 класс



Академбой. Обсуждение задач

Награждение победителей



Шилин Александр, СОШ № 2, 9 класс, Аркадак



Тарасов Сергей, СОШ № 2, 10 класс, Аркадак



Макарова Наталья, ЛПН, 9 класс, Саратов



Лученкова Александра, ЛПН, 10 класс, Саратов

«КОЛЫБЕЛЬКА» НЬЮТОНА И ЕЁ НЕСТАНДАРТНОЕ ПОВЕДЕНИЕ

Агеев Николай, МОУ ЛПН, 11-й класс

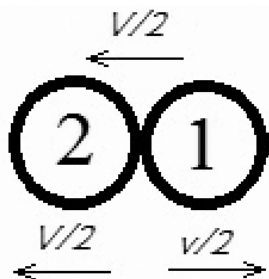
Введение



Игрушка «Колыбелька Ньютона», представляющая пять подвешенных в одну линию стальных шаров, известна многим с давних времён. Отведём крайний шар и ударим им по остальным. При этом с другого конца «колыбели», с такой же скоростью отскакивает один шар. Если отвести два или три шара, с другого конца симметрично отскакивают два

или три. Привлекательность игрушки состоит в том, что промежуточные шары представляются монолитом и, казалось бы, совсем не участвуют в движении. Это, однако, не так.

Столкновение двух шаров



Для детального рассмотрения процесса возьмем два одинаковых шарика. Когда шар 1, двигаясь со скоростью V , налетает на шар 2, он останавливается не мгновенно – в нём распространяется волна упругой деформации (звука): начиная от самых ближних к нему участками и заканчивая самыми дальними. В результате этого шар деформируется и

происходит это за время, которое можно оценить как d/c где d – диаметр шара, а c – скорость звука в данной среде. При этом его кинетическая энергия перейдет в энергию упругой деформации двух шаров и кинетическую

энергию системы. Для всей системы в целом запишем уравнения сохранения энергии и импульса:

$$\frac{mV^2}{2} = 2\frac{kx^2}{2} + 2\frac{mU^2}{2}, \quad mV = 2mU.$$

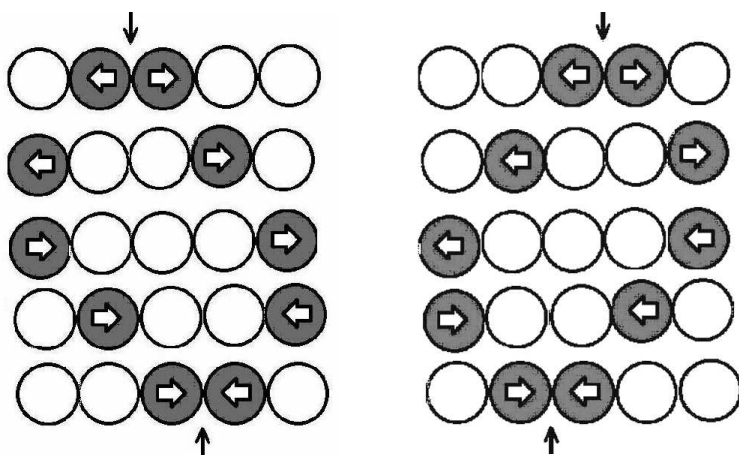
Отсюда следует, что скорость системы составляет $U = V/2$. Здесь применена известная формула для энергии сжатия пружины. При необходимости можно использовать более сложную формулу для деформации шаров (закон Герца).

Доходя до левого края шара 2 и правого края шара 1, волны звука начинают распространяться в обратном направлении. При одинаковых скоростях и размерах шаров волны встретятся на границе двух шаров. При этом, каждый шар приобретет скорость в соответствии с законом сохранения энергии: $(kx^2)/2 = (mU^2)/2$, откуда, с использованием предыдущего результата, получим $U = V/2$. Если учесть скорость системы, равную $V/2$, то, сложив векторы скоростей, получим, что шар 1 останется на месте, а шар 2 полетит со скоростью V (см. рис). Таким образом, мы подтвердили известные результаты наблюдений для двух шаров. Случай движения в системе с несколькими шарами существенно не отличается от рассмотренного, но некоторые пояснения, всё-таки, необходимо сделать.

Если не учитывать проходящей волны деформации и считать что промежуточные шары не участвуют в движении, то можно получить неверные ответы. Так, применив законы сохранения для случая, когда будут отклонены, например, два шара, можно получить, что лишь последний шар в цепочке отскочит со скоростью в два раза большей, чем скорость, двух, первоначально налетающих шаров. Нельзя также представить все четыре шара, испытавшие удар, в виде единого тела. В этом случае по закону сохранения импульса получим, что все эти шары должны двигаться со скоростью $V/4$.

Таким образом, необходимо обязательно учитывать, что удар происходит не мгновенно, а занимает некоторое время. Согласно изложенному выше расчёту, волны звука, частично отражаются назад, а частично переходят из одного шарика в другой. Пройдя по всем шарикам, волны встретятся на границе последнего и предпоследнего шара. При этом импульс системы постепенно передается от одного шара к другому, а не всем шарам сразу.

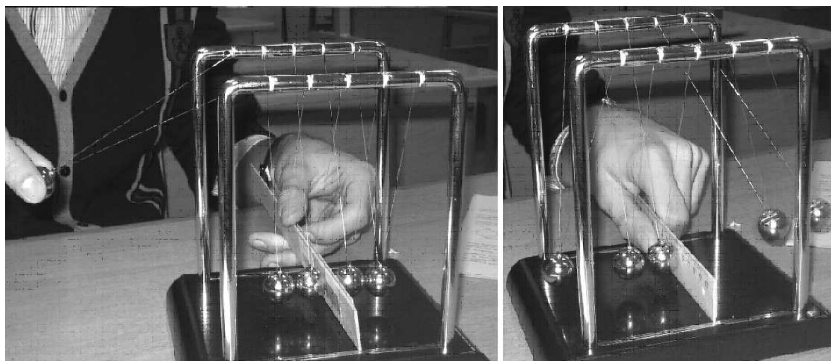
Ниже представлена серия рисунков, демонстрирующая, как распространяются волны звука в шарах, для случая, когда первоначально отклонены два шара. Здесь деформированные в данный момент шары закрашены серым цветом и показаны направления распространения звука в них. Каждый ряд серии представляет состояния шаров через промежуток вре-



мени $\Delta t = d/c$, начиная с момента расталкивания после удара. Как видим, описываемая игрушка симметрична. При отклонении двух шариков с одной стороны, с другого конца цепочки отлетают тоже два шара. Если отклонить три шарика, то и с другой стороны отлетают тоже три шара. Следующая серия иллюстрирует и эту ситуацию и является зеркальной по отношению к первой серии.

Нарушение равновесия системы

Проводя опыты, мы заметили, что, если один из шаров заменить шаром того же размера, но с другой плотностью, то симметрия системы нарушается. Так, при ударе только одним шариком справа, в движение слева придут все шары после чужеродного. При нашем способе рассуждения понять это явление можно. Так, если мы возьмем шар из материала, в котором скорость звука меньше, то и волна деформации в ней будет распространяться медленнее, и с другой амплитудой. Вследствие этого, прежде всего, будет нарушена фазировка, и волны упругой деформации встретятся впервые не на границе шаров, а где-то внутри одного из тел системы. Вероятно, волны будут «гулять» по системе до тех пор, пока не встретятся на одной из границ. То же самое происходит, если между любимыми шарами просто поставить чужеродный предмет, например, пластину картона или пластика. В экспериментах мы заменяли один из стальных шаров деревянным и пластиковым, и даже заменяли его пружинку. При этом, чтобы не нарушать конструкцию игрушки, мы использовали специально изготовленную горку



с желобом. Всегда оказывается, что граница отталкивания приходится на начало группы шаров, расположенных после инородного тела. При этом все они приходят в движение со скоростями, уменьшенными в сравнении со скоростью налетающей группы, а мнолитность системы рассыпается. На данном этапе исследований мы не можем объяснить именно этот факт, хотя механизм нарушения интерференции волн упругости в целом понятен.

Научный руководитель: *Князев А.А.*, доцент ФНП СГУ.

КОМПЬЮТЕРНАЯ ЦВЕТОМЕТРИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА ИЗОБРАЖЕНИЙ

Исаев Дмитрий, ученик 11 класса,

МОУ «СОШ № 59 с углубленным изучением предметов», Саратов

Представленная работа рассматривает возможность распространения механической концепции центра масс на цифровое пространство графических файлов для введения математического критерия красоты.

Внутренние связи между математикой и искусством являются очень глубокими т.к. обусловлены единством законов природы и искусства. Поэтому, изучение математических закономерностей в искусстве является формой постижения самого искусства.

Математический подход к пониманию красоты был предложен еще древними греками. В нашей работе рассматривается применение принципов золотого сечения и цветового центра изображения к пониманию объективного понятия красоты.

В 1853 году Г. Гроссман установил существование бесконечного множества троек линейно независимых цветов.

В 1931 году Международная комиссия по освещению приняла RGB-систему в качестве стандарта.

I. Центр масс (центр инерции или барицентр) система материальных точек представляет собой одну из характеристик распределения массы в системе. По аналогии введем цветовой центр системы пикселей.

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_i \vec{r}_i m_i}{\sum_i m_i}, \quad (1)$$

где \vec{r}_c – радиус-вектор цветового центра системы пикселей, \vec{r}_i – радиус-вектор i -ого пикселя, m_i – цветовой вес i -ого пикселя.

II. Золотое сечение, деление отрезка на две части в таком отношении, при котором длина меньшей часть относится к большей, как большая к длине всего отрезка. При золотом сечении отношение меньшей части к большей составляет $(\sqrt{5} + 1)/2 \approx 0.618$.

Золотое сечение часто встречается в природе, поэтому произведения художников, где используется принцип золотого сечения эмоционально воспринимаются завершенными.

Для вычисления положения цветового центра изображения было разработано приложение, позволяющее вычислить положение цветового центра и золотых сечений изображения.

Программа создавалась с помощью средств языка программирования Delphi, и для ее создания были использованы: компонент `image` для открытия и обработки изображения, диалоговые окна открытия и сохранения изображения, кнопки для реализации различных процедур, а также надписи и текстовые поля.

При запуске программы, мы видим дизайн, состоящий из трёх кнопок: «открыть», «расчет», «сохранить». (рис. 1).

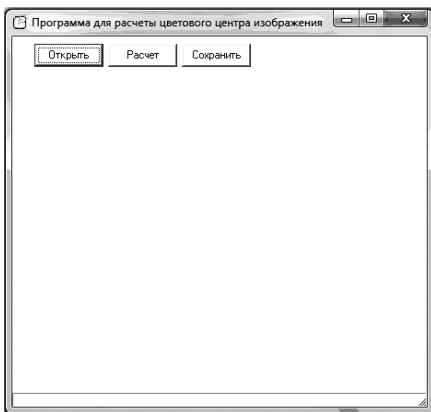


Рис. 1. Скриншот программы

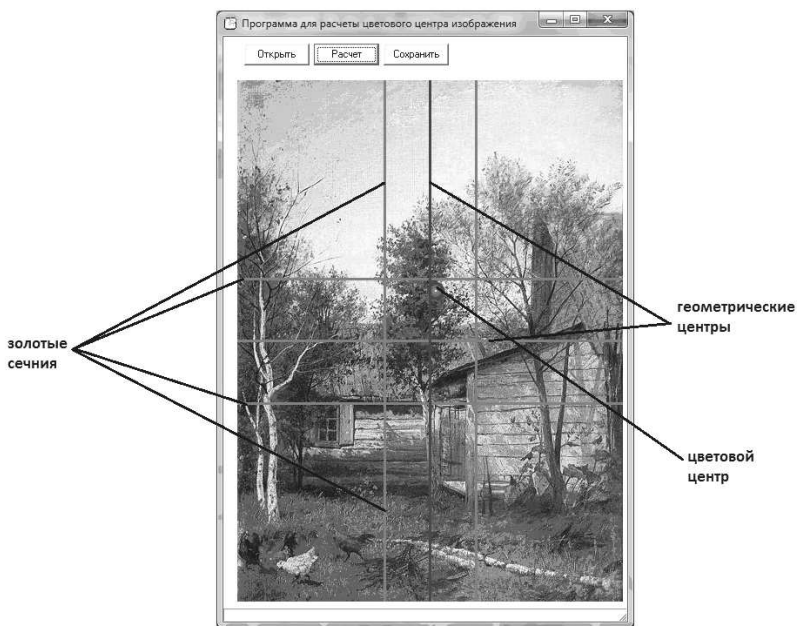


Рис. 2. Пример работы программы

Возьмем для примера картину Левитана «Солнечный день». Сначала, нажав на кнопку «открыть» мы открываем файл с изображением. После нажатия на кнопку «расчет», мы увидим, как действует наша программа.

Сначала идет поиск цветового центра картины по формуле (1).

Далее строятся золотые сечения на изображении.

С помощью данной программы были проанализированы картины известных художников, таких как: Куинджи, Левитан, Леонардо да Винчи, и другие.

Полученные результаты были сгруппированы в таблицу (рис. 3).

Результаты:

1. Работы учеников СОШ № 59 г. Саратова, не занимающихся в художественных школах и студиях.

Цветовой центр совпадает с геометрическим центром изображения.

2. Работы учеников нашей школы, занимающихся в художественных школах и студиях.

Цветовой центр расположен между геометрическим центром и золотым сечением

	A	B	C	D	E
1		По горизонтали		По вертикали	
2	Название	От центра	От золотого сечения	От центра	От золотого сечения
3	IMG_2261	2	10	1	15
4	IMG_2263	6	6	6	13
5	IMG_2266	6	6	2	8
6	IMG_2269	3	9	3	13

	A	B	C	D	E	F
1		По горизонтали		По вертикали		
2	Название	От центра	От золотого сечения	От центра	От золотого сечения	
3	енина 001	3	9	1	15	
4	енина 002	0	12	0	9	
5	енина 003	1	11	0	8	
6	енина 004	4	7	2	15	
7	енина 005	1	11	1	8	
8	енина 006	8	4	2	8	
9	енина 008	1	11	1	8	
10	енина 009	1	11	1	10	
11	енина	1	11	0	16	

Рис. 3. Результаты, сгруппированные в таблицу

3. Работы великих художников

Цветовой центр приближен к одному из золотых сечений, а геометрический центр и противоположное золотое сечение совпадают с композиционным центром картины.

Вывод: Чем ближе цветовой центр к одному из золотых сечений, тем она красивее, с точки зрения восприятия.

С помощью данной программы можно исследовать любые изображения. Будь то рекламные баннеры, скриншоты интернет – сайтов и т.д.

Библиографический список

1. *Фирстов В.В.* Концепция барицентра и компьютерная колориметрия живописных произведений. А.В. Волошинов, В.В. Фирстов // Математика. Компьютер. Образование: сб. науч. Трудов. М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2005. Ч. 2. С. 502-511.
2. *Фирстов В.В.* Концепция колориметрического барицентра и некоторые структурные закономерности цветового пространства живописи / А.В.Волошинов, В.В. Фирстов // Вестник Саратовского государственного технического университета. 2006. № 2 (13), вып. 2. С. 150-160.

Научный руководитель: *Барабонин С.Ю.*, учитель информатики МОУ «СОШ № 59 с углубленным изучением предметов» г. Саратова.

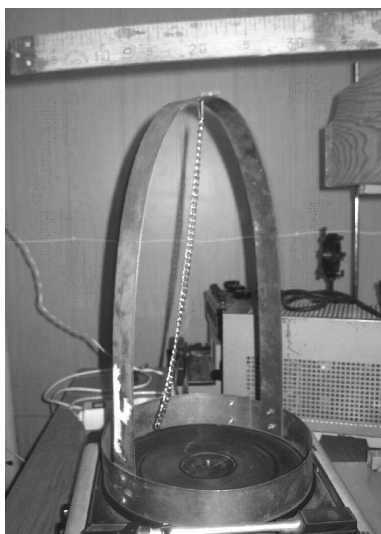
ФОРМА КРИВОЙ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ТРОСА

Куликов Александр, 11 класс,
МОУ Лицей прикладных наук, Саратова

Подвесим гибкую нерастяжимую массивную нить (трос) на конце вертикального вала, который может вращаться с постоянной угловой скоростью. По мере раскручивания вала нить начинает вовлекаться в движение, изгибается и через некоторое время принимает некоторую стационарную форму.

Качественные наблюдения показывают, что кроме тривиальной формы висящего вертикального отрезка возможны еще две стационарные формы плоского расположения троса в процессе вращения с постоянной угловой скоростью.

Первая форма (назовем ее временно «конической») возникает при малых скоростях вращения и представляет некоторую кривую, удаляющуюся от оси с увеличением длины, отсчитываемой от точки закрепления. Эта форма является образующей конической поверхности вращения, отсюда и название.



При увеличении скорости возникает *вторая форма*, когда нить как бы разделяется на несколько частей, которые имеют форму выпуклой кривой, напоминающей отрезок синусоиды или дуги окружности, опирающийся на воображаемую ось вращения. Условно назовем эту форму «формой стоячих волн» по аналогии с формой возбужденной струны. Несмотря на, казалось бы, разные физические причины возбуждения формы струны и вращающегося каната имеют сходство (особенно если на конце каната закреплен массивный груз).

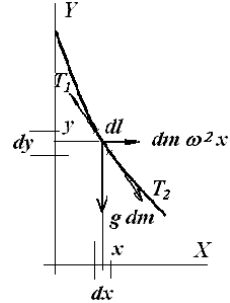
Задачей нашего исследования мы выбрали определение «кониче-

ской» формы вращающегося троса со свободным концом, как наиболее интересной. По крайней мере мы не нашли подобного исследования ни в известных нам учебниках, ни в Интернете.

Теоретические рассуждения

Рассмотрим причины возникновения «конической» формы вращения троса. Рассмотрим бесконечно малый произвольный отрезок троса и запишем для него условие стационарного равновесия при данном соотношении действующих сил. Так, уравнение моментов сил относительно, например, верхней точки отрезка дает:

$$dm \cdot g \cdot dx/2 = dm \cdot \omega^2 x t \cdot |dy/2|.$$

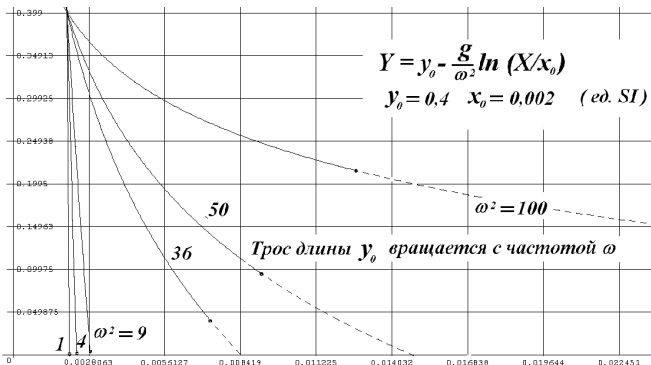


Здесь мы пренебрегли малым отличием направлений сил натяжения T_1 и T_2 в начале и в конце выделенного бесконечно малого отрезка длины dl . Если теперь учесть, что $dy = -|\Delta y|$, то уравнение приобретает вид: $dy = -(g/\omega^2)(dx/x)$.

Этим уравнением можно определить форму кривой $y(x)$. Проинтегрируем:

$$\int_{y_0}^y dy = -\frac{g}{\omega^2} \int_{x_0}^x \frac{dx}{x}.$$

Получаем: $y = y_0 - g/\omega^2 \ln(x/x_0)$.



Видно, что, независимо от своей длины трос при увеличении частоты вращения уходит от оси, стремясь вытянуться в горизонтальной плоскости вращения. На представленном рисунке константы выбраны в значительной мере произвольно. Как мы увидим дальше, при значении квадрата частоты около 100 с^{-2} логарифмическая форма троса может нарушиться.

Анализ результата

Математически происхождение величин y_0 и x_0 понятно – они отражают процедуру интегрирования и свойства получившейся логарифмической функции. Однако, для нашей задачи у них есть и некоторый физический смысл, связанный с реализацией данного режима вращения троса.

Дело в том, что, у троса подвешенного строго по оси вращения, отсутствуют причины возникновения отклоняющей его центробежной силы: вдоль всего троса действует лишь сила тяжести, направленная вниз. Вывести трос из положения равновесия можно, либо сообщив хотя бы одному из его участков горизонтальную скорость, либо расположив трос на некотором расстоянии x_0 от оси. Экспериментально идеальные условия вращения троса без отклонения реализовать довольно сложно – эта форма является неустойчивой. Даже если утяжелить отрезок конечной длины (y_0), то при вращении трос – через некоторое время, зависящее от скорости вращения – придет в круговое движение из-за неизбежного раскачивания установки и далее действия сил сопротивления воздуха. Эти две причины придают движению трехмерный характер – трос приобретает форму сложной трехмерной спиральной конической кривой. Еще через некоторое время нижние участки троса начинают значительно отставать от верхних и приходят в режим «заметающего» движения, пересекая в какой-то момент ось вращения. После этого трос приобретает форму кривой «стоячих волн», упомянутую в начале доклада – с несколькими самопересечениями. Если же трос закреплен с некоторым смещением от центра вращения, то исследуемый нами режим устанавливается на довольно долгое время.

Мы сосредоточили внимание именно на конической форме вращающегося троса – теперь ее вполне можно назвать «логарифмической формой».

Эксперимент

Для реализации стабилизированной частоты вращения мы выбрали из имеющегося оборудования массивный вращающийся диск электрофона, имеющий три фиксированных скорости вращения: 33 об/мин, 45 об/мин и 78 об/мин для раскручивания грампластинок. На диске мы укрепили металлическую арку с отверстием для подвеса массивного троса (метал-

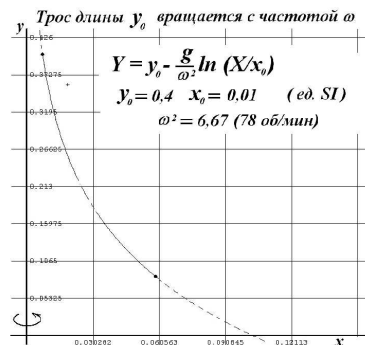
лической цепочки). Высота арки позволяет использовать отрезок цепочки не более 35...38 см. Делать арку более высокой не позволяет конструкция крепления подпружиненной платформы электрофона. Установленная арка начинает неизбежно раскачиваться, а закрепление платформы приводит к возбуждению высокочастотного дрожания всей конструкции, нарушающего стабилизацию частоты вращения двигателя.

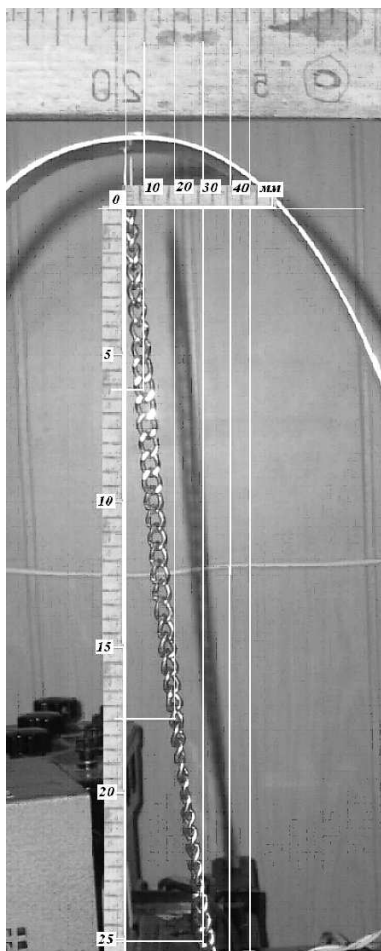
Первые эксперименты оказались неудачными. При небольших угловых скоростях вращения (3.45 рад/с, 4.71 рад/с) движение цепочки, тщательно вывешенной почти по центру вращения (отклонение x_0 мы оценили не более 2 мм) укладывалось в полученные теоретические представления. При значениях квадрата частоты $\omega^2 = 11.9 \text{ с}^{-2}$ и 22.18 с^{-2} отклонение конца цепочки от оси составляло около 3...5 миллиметров (см. графики). При этом, при вращении отмечалось небольшое покачивание цепочки. Однако при угловой скорости 8.17 рад/с ($\omega^2 = 66.7 \text{ с}^{-2}$) теоретические предсказания явно разрушались. Цепочка быстро раскручивалась, отклоняясь более чем на 12 см, затем быстро (менее чем за десяток оборотов) переходила в режим формы трехмерной конической спирали и далее касалась опоры арки на примерно на 2/3 своей длины. После этого происходило закручивание вокруг опоры. Согласно нашей теории подобные отклонения требовали более чем вдвое больших значений квадрата частоты вращения.

Дальнейшие наблюдения привели нас к мысли о возможном резонансе между качанием платформы и раскачиванием собственных маятниковых колебаний цепочки из-за негоризонтального расположения платформы электрофона на лабораторном столе.

Собственную частоту маятниковых колебаний цепочки можно оценить по приближенной формуле для физического маятника, считая цепочку почти прямым стержнем (в начале опыта) $\omega_0 \approx \sqrt{(Mgy_0)/J} \approx \sqrt{3g/y_0} = 8.7 \text{ рад/с}$. Это довольно близко к значению 8.17 рад/с – именно при 78 об/мин. Таким образом, влияние резонанса вполне возможно.

Учтя возможные возмущения, мы выровняли горизонтальность платформы электрофона на лабораторном столе. Кроме того, установили шкалу сантиметровой линейки над верхом вращающейся арки для контроля ухода оси при вращении из-за несимметричности изготовленной арки и прочих факторов. После этого раскачива-





ния почти прекратились, движение стабилизировалось, а результаты наблюдения, с учетом реального отклонения точки закрепления троса $x_0 \approx 10$ мм, практически приблизились к теоретическим предсказаниям.

На снимке приведен фрагмент одной из фотографий, подготовленный для цифровой обработки. А ниже приведена таблица измерений по фотографиям. Наиболее сложным этапом оказалось точное проведение координатной оси Oy и измерение величины x_0 . Небольшие отклонения в ориентации снимка и оптические искажения перспективы ведут к ошибкам в определении координат, особенно для конца цепочки (на таблице они отмечены звездочкой). Кроме того, конец цепочки представляет маятник малой длины и поэтому постоянно покачивается: как из-за влияния высокочастотных колебаний, так и по причинам развивающейся трехмерной неустойчивости. В целом при анализе нескольких фотографий точность отсчета измерения линейных величин в эксперименте, по серии фотографий и по анализу киносъемки мы оцениваем не выше ± 5 мм.

Верхняя строчка таблицы, соответствует измерениям значениям значений $y - y_0$. Она же представляет левую часть уравнения теоретической кривой $y_0 - y = g/\omega^2 \ln(x/x_0)$. Самая нижняя строчка таблицы, соответ-

$y - y_0$, м	0	0.06	0.17	0.25	0.28*	0.31**
x , мм	10	16	27	37	46	53
x/x_0	1	1.6	2.7	3.7	4.6	5.3
$\ln(x/x_0)$	0	0.47	0.99	1.31	1.50	1.67
$0.15 \ln(x/x_0)$	0	0.07	0.15	0.20	0.23	0.25

ствует правой части уравнения рассчитанной по измеренным значениям x и при заданном значении x_0 , оцененном в ходе эксперимента и по киносьемке (здесь $g/\omega^2 \approx 0.15$). При идеально проведенных измерениях значения верхней и нижней строчек таблицы должны совпадать.

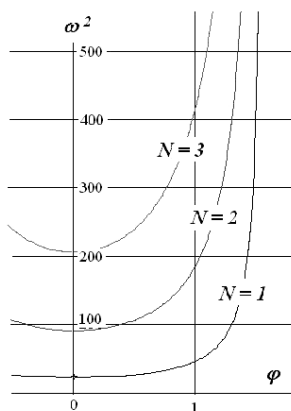
Видно, что даже при той невысокой точности, с которой был проведен эксперимент соответствие результатов эксперимента с теоретическими представлениями можно считать удовлетворительным.

Дополнительные исследования

Попытка экспериментально исследовать тонкую легкую нить приводит к возникновению явления, при котором начинается развиваться распространяющаяся вдоль нити волна. Это явление довольно очевидно, достаточно изучено, и мало связано с вращением нити. Как известно, длина волны в струне связана с частотой возмущения, силой натяжения и погонной массой нити соотношением $\lambda \sim (1/\omega)\sqrt{T/\rho}$ (его легко получить из соображений размерности). Для нашего случая получаем для оценки $\lambda \sim \sqrt{gL}/\omega \approx 28$ см – *очень близкое к тому, что видно на рисунке (примерно три полуволны на длине 38 см)!* При малых значениях массы нити роль центробежной силы падает, а длина волны может оказаться меньшей, чем длина струны. Повидимому, учет волновых явлений может быть важен при изучении сценария возникновения второй из устойчивых форм троса – на высоких частотах. Именно волновые свойства троса могут определять продольный масштаб конфигурации.

Наблюдение формы троса при высоких скоростях вращения. Изменение угловой скорости троса приводит к возникновению касательных ускорений, которые скачком переводят форму троса из плоской – в трёхмерную. Естественно, что используемая ранее двумерная запись уравнения должна смениться волновым уравнением второго порядка в частных производных. Мы провели соответствующий эксперимент, однако не стали его развивать,





обнаружив подобную конкурсную работу в Интернете, в безымянной публикации одного из московских школьников (<http://nau-ra.ru/science/issledovaniya/shkolnikovstudentov/item/исследование-поведения-нити-в-поле-центробежных-сил>).

В этой работе, в частности, приведена грубая оценка параметров установившейся формы вращающейся нити от частоты вращения – в диапазон больших частот. Предполагается, что трос длины L нагружен грузом массы M и разделен на N отрезков в форме дуг окружностей с радиусом кривизны R (см. рисунок). Для нас полезна оценка частот вращения, при которой начинается данная форма неустойчивости. Ограничимся воспроизведением хода рассуждений в указанной работе.

Для вращающегося отрезка массы Δm в центре дуги записывается уравнение движения по окружности:

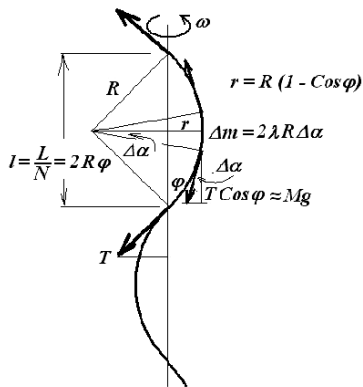
$$\Delta m \omega^2 r \approx 2T \sin(\Delta \alpha).$$

Если переписать это уравнение с учетом записанных на полях рисунка соотношений, то можно получить: $\lambda R^2 \omega^2 (1 - \cos \varphi) \approx (Mg) / \cos \varphi$.

Выражая радиус дуги, через длину нити и проведя простые преобразования, авторы работы получают трансцендентное выражение, определяющее параметр выпуклости φ кривой в точке узла через частоту вращения нити:

$$\omega^2 \approx \frac{4N^2 \varphi^2 Mg}{\lambda L^2 \cos \varphi (1 - \cos \varphi)}$$

Используя это приближенное соотношение, полученное в упомянутой работе, графически (см. рисунок)



оценим минимальные частоты вращения ω , соответствующие появлению на нити узлов N , считая для нашей, ненагруженной, нити $M \approx \lambda L$ ($L = 0.35$).

Учтя, что полученная очень упрощенная формула не будет хорошо работать для первого узла, если трос не нагружен дополнительным грузом массы M , получаем, что квадрат минимальной частоты можно оценить значением близким к 100 с^{-2} . Наша нить, при квадрате частоты 67 с^{-2} , действительно, находится на грани срыва с логарифмического режима на волновой. А при небольшом увеличении частоты (с помощью ручной дрели) цепочка окончательно выходит на волновой режим формы.

Выводы

Таким образом, вращающийся трос имеет три моды плоского вращения, из которых одна – тривиальная и неустойчивая, а две других обладают устойчивостью относительно малых возмущений. При изменении частоты вращения в сторону увеличения, переходная форма кривой может стать трехмерной, после чего установившееся движение вновь станет плоским. Заметим, однако, что возможность смены формы не всегда связана с обязательной реализацией этих форм. Так трос, вращающийся в дрели, даже при высоких оборотах может сохранять логарифмическую форму, если внешним вмешательством предотвратить бифуркацию (например, вытолкнуть конец троса из приосевой области). Переход от одного устойчивого режима к другому всегда провоцируется внешними воздействиями.

Мы теоретически и экспериментально (на полукачественном, но удовлетворительном уровне) изучили одну из мод плоского вращения, назвав ее «логарифмической формой». Произведены численные оценки других сопутствующих явлений, проявляющихся в эксперименте. Все эти оценки также удовлетворительно согласуются с наблюдениями.

Научный руководитель: *А.А. Князев*, доцент ФНП СГУ.

МАЯТНИК С ПРЯМОЛИНЕЙНОЙ ТРАЕКТОРИЕЙ

Макарова Наталья, 9 класс, ЛПН, Саратов



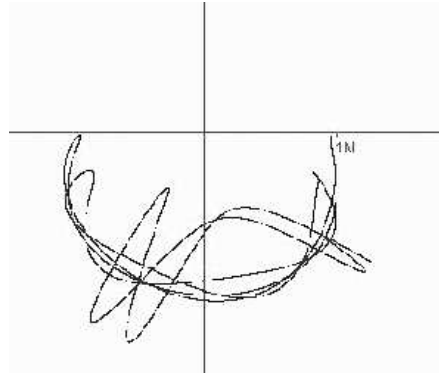
Здесь рассматривается маятник на растяжимом подвесе и один из типов его траектории. В отличие от известного математического маятника с нерастяжимым подвесом, этот вид маятника интересен разнообразием своих траекторий. Здесь одновременно сочетаются два механизма колебательного движения. Первый механизм связан с действием на тело суммы сил тяжести и натяжения нити. Первая из этих сил остаётся по-

стоянной независимо от положения подвешенного тела, а вторая сила изменяет своё направление и численное значение в зависимости от угла отклонения тела. При этом векторная сумма этих сил создаёт возвращающую силу, направленную к положению равновесия при отклонениях тела по горизонтали. Это механизм действует, например, в математическом маятнике и, как известно, при малых углах отклонения приводит к возникновению гармонических колебаний. Траектория математического маятника в этом случае представляет дугу окружности, обращённую выпуклостью вниз.

Второй механизм связан с действием на тело силы упругости подвеса. По сути это тоже сила натяжения, однако, говоря об этой силе, обычно подразумевают, что растяжение подвеса имеет конечное значение, сравнимое с длиной этого подвеса, в отличие от случая математического маятника, когда значением величины растяжения можно пренебречь. Сила упругости всегда направлена вдоль подвеса, к положению его невозмущённой длины, и уже она одна, без наличия других сил, может привести к возникновению продольных колебаний маятника, которые могут быть гармоническими, если сила натяжения линейно зависит от растяжения по закону Гука.

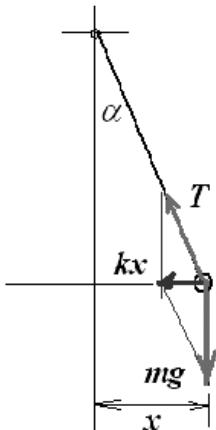
Совместное действие перечисленных сил приводит в возникновению в рассматриваемом маятнике колебаний с разнообразными траекториями. В этом разнообразии можно выделить два больших класса. Речь идёт,

во-первых, о петлеобразных траекториях, обращенных, в среднем, выпуклостью вниз. Во-вторых, это траектории, обращенные, в среднем, выпуклостью вверх (см. рис). Иллюстрирующий рисунок получен с помощью моделирующей программы, составленной в 2001 г учеником 8-го класса ЛПН Василием Моржаковым (ныне выпускник МФТИ). Эти траектории получаются на маятнике с неизменными параметрами – длиной, жесткостью и массой, при различных начальных условиях возбуждения. Так отклоняя маятник от положения равновесия с разной степенью растяжения нити, мы можем получить оба класса таких траекторий.



Логично предположить, что для каждого такого маятника существует одна единственная траектория, разделяющая эти классы. Это траектория горизонтального и прямолинейного движения маятника. Очевидно, что реализация этого режима требует тщательного выполнения эксперимента. В данной работе описывается эксперимент по осуществлению именно такого плана.

1. Теоретические рассуждения



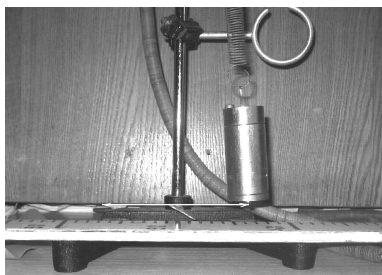
Проанализируем теоретическую возможность существования такой, уникальной, траектории. Для горизонтальных гармонических колебаний необходимо, чтобы сумма сил, действующих на маятник, была постоянно направлена по горизонтали и имела вид квазиупругой силы. То есть $kx = mg \cdot \operatorname{tg}(\alpha) = mg \cdot x/L$. Отсюда получаем необходимую связь между жесткостью пружины, длиной и массой маятника (массой легкой пружины пренебрегаем): $k/m = g/L$. Как видим, это условие эквивалентно условию резонанса между собственной частотой пружинного маятника и частотой независимого математического маятника. Осталось лишь подобрать эти значения в эксперименте.

2. Эксперимент

Для его осуществления мы подвесили груз массой около 100 г на имеющуюся в нашем распоряжении легкую и длинную пружину с цилиндрической навивкой. Длина пружины могла легко изменяться перемещением в лапке зажима лабораторного штатива и, в подобранном нами варианте необходимый отрезок составил около 70 см. В результате период колебаний маятника был равен примерно 1.7 с и немного изменялся с каждым опытом. Заметим, что точный расчёт периода маятника требует учета массы пружины. Это можно сделать, следуя, например, известному приближению Рэля. При этом к массе груза необходимо добавлять треть массы пружины. В нашем эксперименте мы, однако, не ставили целью реализацию маятника с заданным периодом.

Необходимо отметить, что процедура подбора оказалась довольно кропотливой, поскольку длину пружины пришлось регулировать с точностью до части витка в месте закрепления её в лапке зажима. Вместе с тем, такая методика оказалась более удобной, чем подбор массы груза, взятого в первоначальном варианте в виде флакона с металлическими деталями (гайками). Дело в том, что при изменении массы груза одновременно немного изменялось и положение его центра масс, а значит, изменялся и другой параметр маятника – эквивалентная длина подвеса.

При выполнении эксперимента первоначально нами планировалось два варианта маятника: на пружине и на резиновом подвесе. Дело в том, что именно этот последний вариант был представлен независимо В. Майером в недавно вышедшем номере журнала «Физика ПС». При немного отличном от нашего ходе рассуждений (безусловно, с теми же результатами упрощенного расчета!) эксперимент был проведён с резиновым подвесом. Однако, и мы, и авторы упомянутой публикации столкнулись с проблемой нелинейного поведения растягиваемой резины, когда сила упругости не точно следует



закону Гука. Для осуществления опыта необходимо предварительно снять экспериментальную зависимость силы от растяжения и выбрать на графике линейный участок. Используя эластичный медицинский бинт, мы убедились в возросшей сложности эксперимента, воспроизводимость которого оказалась, к тому же, значительно худшей, чем с длин-

ной пружиной. Необратимое вытягивание длинной резины при значительной массе груза требовало постоянной подстройки маятника с каждым новым опытом. В результате мы отказались от этой, крайне неудобной, демонстрации.

Считаем, что приведённая нами демонстрация вполне может использоваться в учебном процессе: как в школе, так и в вузе. При изучении темы о колебаниях в связанных маятниках, рекомендуем сочетать этот опыт с другими опытами. Например, удачными могут быть опыты резонансов в маятнике Горелика и в маятнике Уилберфорса. В этих случаях изменение параметров маятников приводит к возникновению перекачки энергии из поперечных колебаний в продольные, и продольных – во вращательные, соответственно. Все эти опыты рассматривались в разные годы учащимися Лицея прикладных наук.

Научный руководитель: *А.А. Князев*, доцент ФНП СГУ.

ВОДЯНОЙ МОСТИК

Мартыненко Андрей,

11 класс, МОУ Лицей прикладных наук, Саратов

На сайтах Интернета (например, <http://www.epochtimes.ru/content/view/12999/5/>) мы встретились с интересным экспериментом, проведенным в 2007 году одной из лабораторий Технологического университета в Граце.

Под воздействием высокого постоянного напряжения от 15 кВ между двумя соседними стаканами с деионизованной водой и опущенными в них платиновыми электродами, возникает довольно устойчивый водяной мостик длиной до двух с половиной сантиметров. Мостик, представляющий собой висящий над пустотой цилиндр диаметром 1–3 мм, оставался устойчивым, когда один из стаканов отодвигали. При повышении напряжения до 25 кВ стакан можно было отодвинуть на два с половиной сантиметра. Мостик являлся динамической структурой: по нему вода переходила из одного стакана в другой (как правило, от анода к катоду). Он просуществовал 45 минут, после чего распался: вероятно, из-за нагревания воды.

Данное явление известно более ста лет. Впервые отмечено в 1893 году Уильямом Армстронгом и теперь переоткрыто в данном эксперименте. Причины такого поведения воды, по утверждению исследователей, пока неясны. Исследователи предполагают, что мостик возникает из-за взаимодействия электростатических зарядов на поверхности воды. Подаваемое высокое напряжение и низкая проводимость хорошо очищенной воды приводят к тому, что под воздействием электрического поля молекулы воды располагаются особым образом, создавая высокоупорядоченную микроструктуру. Существующие гипотезы привлекают очень сложные модели жидкостей, но удовлетворительного объяснения всё-таки не предлагают.

В нашей работе мы повторяем эксперимент с доступными нам средствами и предлагаем классическую версию теории.

Наш эксперимент

В качестве источника высокого напряжения мы использовали малую электрофорную машину, а стаканы, для повышения напряженности поля, заменили двумя пробирками с кипяченой водой, изолированными от держателей штатива и с опущенными в них проволочными электродами.

Мы убедились, что описанное явление действительно наблюдается. При подаче напряжения на поверхности жидкости возникает структура, напоминающая структуру поля диполя. Жидкость начинает перемещаться к краю пробирки с положительным электродом. Далее возникает капля с острым краем, направленным в сторону отрицательного электрода. Эта капля вытягивается и касается другой пробирки – с отрицательно заряженным электродом (см. рис). На рисунке видно как жидкость в положительно заряженной пробирке надувается пузырьком в сторону отрицательного электрода, а на поверхности воды возникает сетка вздутий, напоминающих рисунок силовых линий диполя. Известно, например, что в электролитах линии тока жидкости повторяют картину электростатических силовых линий. Математически это показывается сравнением уравнений для электростатического поля и уравнения закона Ома для электрического тока (в дифференциальной форме). Условия возникновения мостика можно облегчить, наливая воду в пробирки как можно полнее, чтобы исключить дополнительное преодоление силы тяжести жидкости. Особенно важно это для демонстрации явления с помощью не очень сильных источников электростатического поля. Это и было выполнено в нашем эксперименте.

Таким образом, между пробирками устанавливается устойчивый водяной мостик. Перед началом образования водяного мостика между пробирками начинается пробой воздуха – возникает искра, поэтому эксперимент требует осторожности. Направление перемещения наблюдается визуально, но мы усилили эффект, подкрасив воду красителем, не содержащим ионов (синь метиленовая). Фотографии производились обычным цифровым фотоаппаратом с расстояния нескольких сантиметров.

Ясно также, что если в пробирки налить раствор соли – жидкость, содержащую смесь одиночных ионов, электростатические силы обеспечат полную симметрию картины и никакого преимущественного направления движения в растворе не возникнет. В нашем случае наличие в кипячёной



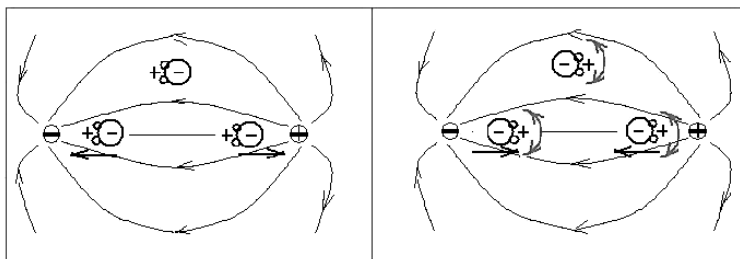
воде ионов делает эффект, наверное, менее выраженным, чем в эксперименте учёных из университета Гарца. Более того, направление потока может сместиться в обратную сторону

Наша гипотеза

По нашему мнению, для объяснения главных черт явления возникновения водяного мостика достаточно простой модели воды как жидкости, состоящей из упругих полярных молекул – симметричных по заряду диполей (диэлектрическая проницаемость воды 81 – значительная величина в сравнении с многими другими диэлектриками). При этом отрицательный заряд представляется ионом кислорода, а положительный – двумя ионами водорода. В этом случае известно, что диполь, попавший в неоднородное электрическое поле, испытывает втягивающую или выталкивающую силу, пропорциональную градиенту напряженности, и описывается известным соотношением: $\vec{F} = pd\vec{E}/dl$. Здесь $p = ql$ – дипольный момент молекулы ($6.2 \cdot 10^{-30}$ Кл·м), где q – заряд, а l – расстояние между зарядами.

На рисунке изображена схема действия такой силы. Здесь диполи, находящиеся в неоднородном поле двух электродов изображены в различных ориентациях относительно внешнего поля. Прямыми стрелками указаны силы, действующие на диполи в различных областях поля. Видно, что при любой ориентации диполей у каждого электрода диполи находятся в равноправном положении. Половина диполей – ориентированные по полю, притягиваются к данному электроду, другая половина, ориентированная противоположно полю – отталкивается от него.

В принятой нами модели жидкости эффект водяного мостика заключается в том, что равновесие по какой-то причине немного сдвигается в сторону движения – от положительного к отрицательному электроду. Мы считаем, что здесь этой причиной может оказаться сильное различие (в 16 раз) масс положительного и отрицательного зарядов. В результате этого, ускорен-



ния, приобретаемые положительными и отрицательными зарядами, различны. Ускорение водородного иона, как более лёгкого оказывается большим, далее молекула начинает дополнительно поляризоваться, растягивается и весь диполь получает изменение скорости в сторону большего ускорения. Диполи у катода ускоряются, а диполи у анода тормозятся.

В ситуации, изображенной на левом рисунке, легкие атомы водорода оказавшиеся вблизи отрицательного электрода и ориентированные по полю, приобретают ускорение, обратно пропорциональное своей массе и втягивают за собой массивный ион кислорода. У противоположного электрода молекулы, ориентированные также приобретают меньшее ускорение вследствие большой массы ближайшего к электроду иона кислорода. Этот тяжелый и большой ион «тащит» за собой ионы водорода. В результате диполи также втягиваются в поле, уже положительного электрода, однако с меньшим ускорением, чем диполи у отрицательного электрода.

В ситуации, изображенной на правом рисунке, легкие атомы водорода оказавшиеся вблизи отрицательного электрода и ориентированные против поля, первоначально выталкиваются массивным ионом кислорода. Однако такое положение диполя оказывается неустойчивым и под действием теплового движения диполь может легко перевернуться, создав уже описанную выше ситуацию. Картина у положительного электрода полностью аналогична предыдущей. Таким образом, в результате различия масс ионов всё движение воды в пространстве между электродами получает преимущественное направление: от положительного полюса – к отрицательному.

Теоретические соотношения

Несмотря на то, что при реально квантовом устройстве молекул делать какие-либо численные оценки в классической модели неоправданно, можно записать некоторые соотношения, подтверждающие приведённые рассуждения. Так для ускорений ионов водорода и кислорода можно записать: $a = (q/m) [E(x + dx) - k \cdot \Delta l]$, $A = (q/M) [k \cdot \Delta l - E(x)]$.

Отсюда отношение ускорений обратно пропорционально отношению масс при прочих почти равных условиях.

Рассуждая далее, можно получить отношение кинетических энергий ионов:

$$\frac{W_H}{W_O} \sim \frac{M}{m} \left(\frac{dE}{dx} \right)^2 p^2.$$

Здесь предполагается, что жесткость диполя k намного больше разрывающего усилия поля.

Гидростатическая устойчивость мостика

Независимо от модели механизма образования водяного мостика можно численно оценить возможность длительного его существования. Это может происходить лишь в том случае, когда масса воды в мостике удерживается от растекания силами поверхностного натяжения. Для этого сравним давления сил электростатического поля внутри воды и сил поверхностного натяжения на границе водяного цилиндра.

$$\frac{p_E}{p_\sigma} \sim \frac{\varepsilon \cdot \varepsilon_0 E^2}{4 \cdot \sigma / d} \sim \frac{\varepsilon_0 U^2 d}{4 \cdot \varepsilon \cdot L^2 \cdot \sigma}.$$

Так, для мостика длиной $L = 2$ см диаметром $d = 3$ мм при напряжении порядка $U = 10$ кВ это отношение несколько меньше единицы, то есть мостик существует на грани устойчивости – силы поверхностного натяжения способны удержать форму водяного цилиндра. При значительном превышении давления сил поверхностного натяжения последние пережмут мостик, разделив его на капли. Для повышения устойчивости необходимо повысить напряжение, а для увеличения толщины мостика необходимо увеличить поток жидкости, увеличивая градиент поля, например, сближая электроды.

Выводы

1. Проведен качественный эксперимент.
2. На основании модели воды как набора симметричных по знаку, но несимметричных по массе диполей предложен механизм возникновения мостика. Показывается что симметрия течений в воде нарушается в сторону течения жидкости от положительного электрода к отрицательному – за счет большей кинетической энергии зарядов водорода.
3. Оценено условие гидростатической устойчивости водяного мостика находящегося в мощном электростатическом поле

Научный руководитель: *А.А. Князев*, доцент ФНП СГУ.

КРИВЫЕ МЕХАНИЧЕСКОГО ПРОИСХОЖДЕНИЯ

Ростунцова А.А.

ученица 9” класса МОУ «Лицей прикладных наук», Саратов

Широко известно применение кривых механического происхождения в теории и практике. Геометрические и механические свойства кривых используются в различных механизмах, деталях машин, строительных конструкциях, в оптике, в изобразительном искусстве, в архитектуре, в теории и практике геометрических построений, в черчении и других областях. Некоторые кривые непосредственно реализуются в физических явлениях, в природе и в обычной жизни. Поэтому изучение образования отдельных кривых и их свойств, как указывают ряд авторов [1–3], является актуальной задачей, связывающей математическое мышление и практический опыт.

Для построения любой кривой нужно знать уравнения, описывающие её в какой-либо системе координат. Система координат – это способ определять положение точки или тела с помощью чисел или других символов.

Существуют различные системы координат: прямоугольная, цилиндрическая, эллиптическая, полярная. Наиболее простой и часто используемой системой является прямоугольная (декартова) система координат с взаимно перпендикулярными осями на плоскости или в пространстве.

Необходимо учесть, что уравнения в декартовых координатах, описывающие кривые обычно неявные, и поэтому для их построения используется полярная система координат. Полярная система координат – двумерная система координат, в которой каждая точка на плоскости определяется двумя числами – полярным углом и полярным радиусом.

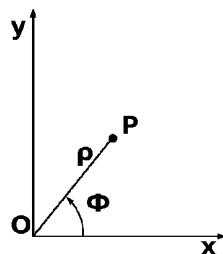
Переход от декартовых координат к полярным осуществляется по формулам:

От полярных к декартовым:

$$\begin{cases} X = \rho \cos \varphi, \\ Y = \rho \sin \varphi. \end{cases}$$

От декартовых к полярным

$$\rho^2 = Y^2 + X^2.$$



Последнее уравнение является уравнением окружности в неявном виде.

Существуют различные способы задания кривой [2]: неявный способ ($F(x, y) = 0$); параметрический способ ($x = x(t)$; $y = y(t)$) при помощи дифференциальных уравнений и ряд других способов.

Одной из интереснейших задач является задача построения кривых механического происхождения на языке программирования PascalABC.

Рассмотрим цикл построения кривой:

```
r := 50;
for i: = 1 to 360 * 10 do begin
t := i * pi/180;
x := round(A);
y := 480-round(B);
circle(x,y,8);
end;
```

где А – уравнение координаты X кривой; Б – уравнение координаты Y кривой.

С использованием разработанной задачи проведено построение следующих кривых, которые описываются системой уравнений или уравнением:

1. **Кривая вида: Циклоида.**

$$\begin{aligned}x &= rt - \sin(\varphi); \\y &= r - r \cos(\varphi).\end{aligned}$$

2. **Кривая вида: Эпициклоида.**

$$\begin{aligned}x &= r(k+1)(\cos(\varphi) - (\cos((k+1)\varphi)/(k+1))); \\y &= r(k+1)(\sin(\varphi) - (\sin((k+1)\varphi)/(k+1))).\end{aligned}$$

Введен параметр $K = R/r$, где R – радиус неподвижной окружности, а r – радиус катящейся.

3. **Кривая вида: Гипоциклоида.**






















$$\begin{aligned}x &= r(k-1)(\cos(\varphi) + (\cos((k-1)\varphi)/(k-1))); \\y &= r(k-1)(\sin(\varphi) - (\sin((k-1)\varphi)/(k-1))).\end{aligned}$$

Введен параметр $K = R/r$, где R – радиус неподвижной окружности, а r – радиус катящейся.

4. **Кривая вида: Фигура Лиссажу.**

$$\begin{aligned}x &= r \cos(\varphi l); \\y &= r \sin(\varphi k),\end{aligned}$$

где l и k – заданные числа, φ – угол.

Вид кривой	Построение кривой					
Циклоида						
Эпициклоида	Построение кривой в зависимости от параметра «К»					
	К=1 (кардиоида)	К=2 (нефроида)	К=3	К=2, 1	К=3, 8	К=7, 2
						
Гипоциклоида	Построение кривой в зависимости от параметра «К»					
	К=3 (Дельтоида)	К=4 (Астроида)	К=2, 1		К=7, 2	
						
Фигура Лиссажу	Построение кривой в зависимости от l и k					
	l=9; k=8	l=5; k=6	l=1; k=2		l=3; k=4	
						
Циссоида Диокла						
Эвольвента окружности						
Роза или кривая Гвидо Гранди	Построение кривой в зависимости от a и k					
	a=100; k=0,1	a=100; k=0,2	a=100; k=0,3	a=100; k=0,9		
						

5. **Кривая вида: Циссоида Диокла.**

$$P = (2a \sin^2 \varphi) / \cos.$$

6. **Кривая вида: Эвольвента окружности.**

$$X = r(\cos(\varphi) + \varphi \sin(\varphi)),$$
$$Y = r * (\sin(\varphi) - \varphi * \cos(\varphi))$$

7. **Кривая вида: Роза или кривая Гвидо Гранди [1].**

$$P = a \sin(k\varphi),$$

где a и k – постоянные, определяющие размер (a) и количество лепестков (k) данной розы.

Построение данных кривых можно выполнить в Microsoft Excel. Примеры результатов работы программы представлены в таблице.

Выводы

Рассмотрен способ задания кривых механического происхождения с использованием языка программирования PascalABC. Выполнено построение кривых вида: циклоида, эпициклоида, гипоциклоида, фигура Лиссажу, циссоида Диокла, эвольвента окружности, роза.

Библиографический список

1. *Савёлов А.А.* Плоские кривые. Систематика, свойства, применение (справочное руководство). М.: Физматгиз, 1960. 294 с.
2. *Шикин Е.В., Франк-Каменецкий М.М.* Кривые на плоскости и в пространстве. М.: ФАЗИС, 1997
3. *Артоболевский И.И.* Теория механизмов для воспроизведения плоских кривых. М.: Изд-во Академии наук СССР, 1959.
4. *Выгодский М.Я.* Справочник по высшей математике. М.: Изд-во «Наука», 1997.

Научный руководитель: *Сурчалова Л.В.*, к.п.н., учитель информатики МОУ «Лицей прикладных наук».



СЕКЦИЯ
АСПИРАНТОВ
И МОЛОДЫХ
УЧЕНЫХ

МУЛЬТИСТАБИЛЬНЫЕ СОСТОЯНИЯ В ГЕНЕРАТОРЕ ВАН ДЕР ПОЛЯ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Балакин М.И., аспирант ФЭТиП СГТУ им. Гагарина Ю.А.

В данной работе проведено исследование механизма формирования мультистабильности на примере генератора ван дер Поля с запаздывающей обратной связью. Установлено, что развитая мультистабильность формируется в результате двух видов бифуркаций – суперкритической бифуркации Андронова–Хопфа и субкритической бифуркации Неймарка–Сакера. При вариации управляющих параметров неподвижная точка в фазовом пространстве многократно претерпевает суперкритическую бифуркацию Андронова–Хопфа, что ведет к увеличению числа седловых циклов. Устойчивость они приобретают после последовательности субкритических бифуркаций Неймарка–Сакера.

Генератор ван дер Поля с запаздыванием будем рассматривать в виде

$$\begin{aligned}\dot{x}(\tau) &= y(\tau), \\ \dot{y}(\tau) &= -\lambda y(\tau) + [\varepsilon - x^2(\tau - \tau_d)]y(\tau - \tau_d) - x(\tau),\end{aligned}\quad (1)$$

где $\dot{x}(\tau)$, $y(\tau)$ – динамические переменные, τ_d – время запаздывания, λ – параметр диссипации, ε – параметр подкачки.

В фазовом пространстве рассматриваемой системы, которая имеет бесконечную размерность, существует одна неподвижная точка в начале координат.

Для исследования условия устойчивости состояния равновесия, используя стандартные метода [1], запишем характеристическое уравнение

$$\rho^2 + [\lambda - \varepsilon e^{-\rho\tau_d}]\rho + 1 = 0, \quad (2)$$

из которого, применяя метод D-разбиений [2], несложно получить систему уравнений

$$\begin{aligned}\varepsilon^2 &= \lambda^2 + \frac{(1 - \omega^2)^2}{\omega^2}, \\ \tau_d &= \frac{1}{\omega} \arctg\left(\frac{1 - \omega^2}{\lambda\omega}\right) + \frac{k\pi}{\omega},\end{aligned}\quad (3)$$

которая определяет в пространстве параметров границы областей возбуждения автоколебаний.

На рис. 1 на плоскости параметров $(\varepsilon - \tau_d)$ построены линии бифуркационных значений для различных $k(k = 0, 2, 4, 6)$, которые обозначены $l_{ah}^1, l_{ah}^2, l_{ah}^3, l_{ah}^4$, соответственно. Линии, построенные методом D-разбиения, полностью совпадают с бифуркационными линиями, полученными с помощью пакета программ DDE-BIFTOOL [3]. Кроме линий бифуркационных значений для неподвижной точки P , на рисунке построены бифуркационные линии l_{ns}^i предельных циклов $C_i (i = 1, 2, 3, 4)$, ограничивающие области их устойчивости.

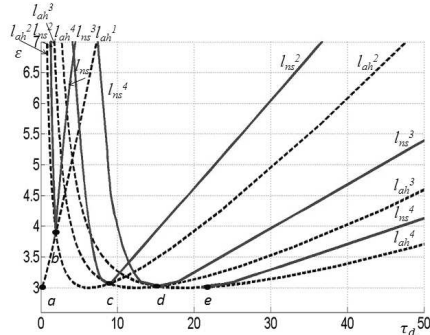


Рис. 1. Линии бифуркационных значений неподвижной точки и предельных циклов, $\lambda = 3$

Каждая из бифуркационных l_{ah}^i линий имеет точку минимума, которой опирается на прямую $\varepsilon = \lambda$. Граница мягкого возбуждения автоколебаний состоит из отрезков ab, bc, cd, de , принадлежащих бифуркационным линиям $l_{ah}^1, l_{ah}^2, l_{ah}^3, l_{ah}^4$, соответственно. На этих отрезках действительные части старшей пары комплексно сопряженных собственных значений неподвижной точки P переходит через ноль от отрицательных значений к положительным, точка претерпевает супекритическую бифуркацию Андронова–Хопфа.

В отличие от осциллятора ван дер Поля, где неподвижная точка претерпевает только одну бифуркацию рождения цикла, в генераторе с запаздывающей обратной связью может наблюдаться целая серия бифуркаций Андронова–Хопфа, что ведет к формированию развитой мультистабильности.

Проследим за бифуркациями неподвижной точки P в зависимости от τ_d при $\varepsilon = 3.5$. На рис. 2 представлена бифуркационная диаграмма для неподвижной точки P и предельных

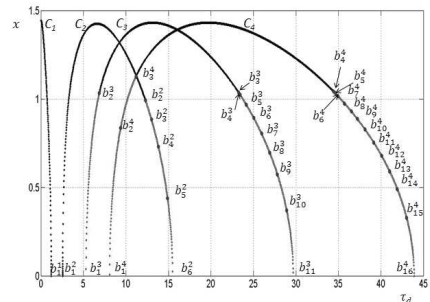


Рис. 2. Бифуркационная диаграмма для неподвижной точки P и предельных циклов C_1, C_2, C_3, C_4 в зависимости от параметра τ_d

циклов C_1, C_2, C_3, C_4 . В интервале между b_1^1 и b_1^2 , в фазовом пространстве имеется устойчивая неподвижная т. P . С уменьшением τ_d при пересечении b_1^1 т. P становится седловой, в ее окрестности рождается устойчивый предельный цикл C_1 , происходит суперкритическая бифуркация Андронова–Хопфа. При дальнейшем уменьшении τ_d до нуля никаких бифуркаций не происходит. С ростом τ_d при пересечении b_1^2 точка т. P претерпевает суперкритическую бифуркацию Андронова–Хопфа, в ее окрестности рождается устойчивый предельный цикл C_2 . Седловая т. P с двумерным неустойчивым многообразием при пересечении b_1^3 демонстрирует еще одну бифуркацию Андронова–Хопфа и превращается в седло с четырехмерным неустойчивым многообразием, а в ее окрестности рождается седловой цикл C_3 с двумерным неустойчивым многообразием. При пересечении b_1^4 пространстве появляется еще один седловой цикл (C_4) с четырехмерным неустойчивым многообразием. Структура фазового пространства существенно усложняется, в окрестности неподвижной точки рождаются новые и новые седловые предельные циклы. При движении по плоскости управляющих параметров каждый из них в результате определенных бифуркаций может стать устойчивым. Например, седловой цикл C_3 выше b_1^3 рождается с двумерным неустойчивым многообразием. При пересечении точки b_2^3 он претерпевает субкритическую бифуркацию Неймарка–Сакера и становится устойчивым. Седловой цикл C_4 за точкой b_1^4 имеет четырехмерное неустойчивое многообразие. С увеличением параметра τ_d он приобретает устойчивость в результате последовательности двух субкритических бифуркаций Неймарка–Сакера (точки b_2^4, b_3^4).

Рождение устойчивых сосуществующих предельных циклов в фазовом пространстве системы происходит и при уменьшении времени задержки τ_d в цепи обратной связи. На плоскости управляющих параметров (рис. 1) со стороны больших задержек рождение C_2 из неподвижной точки происходит на правой ветви линии суперкритической бифуркации Андронова–Хопфа l_{ah}^2 . По мере уменьшения τ_d этот цикл становится устойчивым при пересечении бифуркационной линии l_{ns}^2 . Однако, прежде чем стать устойчивым, при движении по параметрам между линиями l_{ah}^2 и l_{ns}^2 он претерпевает целый каскад бифуркаций. Они представлены точками на диаграмме рис. 2. При b_6^2 из неподвижной точки рождается седловой предельный цикл с 8-мерным неустойчивым многообразием. Далее он приобретает устойчивость в результате последовательности из 4 субкритических бифуркаций Неймарка–Сакера (b_4^2, b_3^2, b_2^2). Цикл C_3 приобретает устойчивость через по-

следовательность из восьми субкритических бифуркаций Неймарка–Сакера, а цикл C_4 – через последовательность из двенадцати бифуркаций.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 12-02-01298-а.

Библиографический список

1. Рубаник В.П. Колебания квазилинейных систем с запаздыванием. М.: «Наука», 1969. 287 с.
2. Неймарк Ю.И. D-разбиение пространства квазиполиномов. (к устойчивости линеаризованных распределенных систем) // Прикл. математ. и механ. 1949. Т. 13, вып. 4.
3. Engelborghs K., Luzyanina T., and Roose D. Numerical bifurcation analysis of delay differential equations using DDE-BIFTOOL, ACM Trans. Math. Softw. 28 (1), pp. 1–21, 2002.

Научный руководитель: Астахов В.В., д.ф.-м.н., профессор, заведующий кафедрой РТ ФЭТиП СГТУ им. Гагарина Ю.А.

ВЫНУЖДЕННАЯ СИНХРОНИЗАЦИЯ В СИСТЕМЕ СВЯЗАННЫХ КВАЗИГАРМОНИЧЕСКИХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ С АСИММЕТРИЧНОЙ СВЯЗЬЮ

Гулай А.П., студент 2 курса физического факультета СГУ

Синхронизация, пожалуй, наиболее важное и распространенное явление, наблюдаемое во взаимодействующих автоколебательных системах [1,2]. Несмотря на то, что это явление привлекает внимание исследователей уже не одну сотню лет, до сих пор остаются неразрешенными ряд важных задач. Например, лишь недавно был предложен бифуркационный сценарий синхронизации двухчастотных квазипериодических колебаний в фазовой модели [3,4]. Позже данный сценарий был подтвержден и в полных, не укороченных системах [5]. Однако влияние асимметричности и отталкивающего характера взаимодействия осцилляторов не были учтены. В данной работе мы рассмотрим влияние отталкивающей асимметричной связи на известный бифуркационный сценарий синхронизации.

Рассмотрим систему двух взаимодействующих осцилляторов ван дер Поля под воздействием внешней периодической силы:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 - \varepsilon(1 - x_1^2)\dot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 = \gamma_1(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + C_0 \cos(\omega_0 t), \\ \ddot{x}_2 - \varepsilon(1 - x_2^2)\dot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 = \gamma_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_2), \end{cases} \quad (1)$$

где $x_{1,2}$ – динамические переменные, $\omega_{1,2}$ – частоты первого и второго осцилляторов, $\gamma_{1,2}$ – коэффициенты связи, ε – управляющий параметр, C_0 – амплитуда внешнего воздействия, ω_0 – частота внешнего воздействия. Используя процедуру квазигармонического приближения

$$x_{1,2} = a_{1,2}(t) \cos(\omega_0 t + \varphi_{1,2}(t)), \quad (2)$$

перейдём к системе укороченных уравнений, описывающих фазовую динамику системы (1):

$$\begin{cases} \dot{\varphi}_1 = \Delta_1 + g_1 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) - \frac{C}{1 - \Delta_1} \cos \varphi_1, \\ \dot{\varphi}_2 = \Delta_1 + \delta - g_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1), \end{cases} \quad (3)$$

где $\varphi_{1,2}$ – разность фаз между внешней силой и колебаниями первого и второго осцилляторов в (1) соответственно, $g_{1,2} = \gamma_{1,2}/2$ – коэффициенты связи, $\Delta_{1,2} = (\omega_{1,2}^2 - \omega_0^2)/(2\omega_0)$, $\delta = \Delta_1 - \Delta_2$, $C = C_0/(2a_1\omega_0)$. Эта

система имеет 4 состояния равновесия, которые существуют в той области пространства параметров, где выполняются следующие условия:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left| \frac{1 - \Delta_1}{\Delta_1 + \delta} \left(\Delta_1 + \frac{g_1}{g_2} (\Delta_1 + \delta) \right) \right| \leq 1, \\ \left| \frac{\Delta_1 + \delta}{g_2} \right| \leq 1. \end{array} \right. \quad (4)$$

Рассмотрим трансформацию бифуркационной диаграммы системы (2). Установив значения параметров $g_1 = g_2 = 0.15$, $\delta = 0.1$, получим систему, исследованную в [1]. Бифуркационная диаграмма и фазовый портрет системы в области B представлены на рис. 1.

Будем теперь уменьшать параметр g_2 , тем самым вводя асимметричную связь. Установим значение $g_2 = 0.05$. На рис. 2, *a* видно, что область существования состояний равновесия начинает сужаться. В фазовом пространстве системы не наблюдаются качественные изменения, и типы состояний равновесия остаются теми же.

При переходе параметра g_2 через нулевое значение происходит вырождение области B в прямую (рис. 2, *б*) с последующим расширением. На рис. 2, *в* видно, что области касания инвариантных кривых попадают

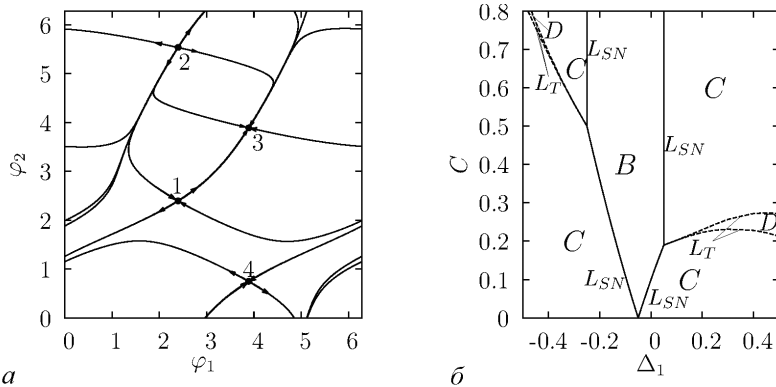


Рис. 1. *a* – фазовый портрет системы (2) в области B ; *б* – бифуркационная диаграмма системы (2) при $g_1 = g_2 = 0.15$, $\delta = 0.1$. B – область существования состояний равновесия (синхронизации на одной частоте), C – область существования замкнутых инвариантных кривых (двухчастотных колебаний), D – область касания инвариантных кривых (трёхчастотных колебаний), L_{SN} – линия седло-узловой бифуркации состояний равновесия, L_T – линия касания замкнутых инвариантных кривых

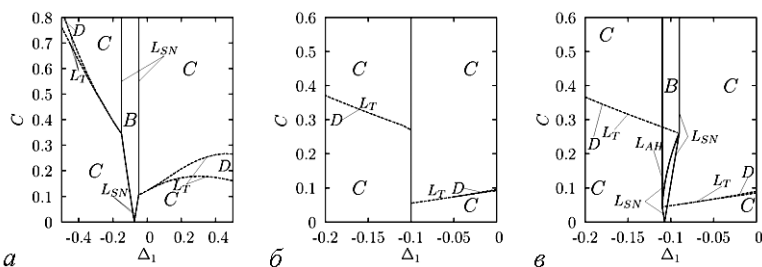


Рис. 2. Трансформация бифуркационной диаграммы системы (2): $a - g_2 = 0.05$, $б - g_2 = 0$, $в - g_2 = -0.01$

в область существования состояний равновесия. Другое важное изменение в системе с введением отрицательной связи – узлы могут становиться фокусами, для которых возможна реализация бифуркации Андронова–Хопфа. Ранее она была получена для случая взаимодействующих фазовых осцилляторов [6], однако здесь мы имеем дело с более простой системой.

На рис. 3, б представлена бифуркационная диаграмма при $g_2 = -0.05$. При движении от линии L_{AH} , соответствующей бифуркации Андронова–

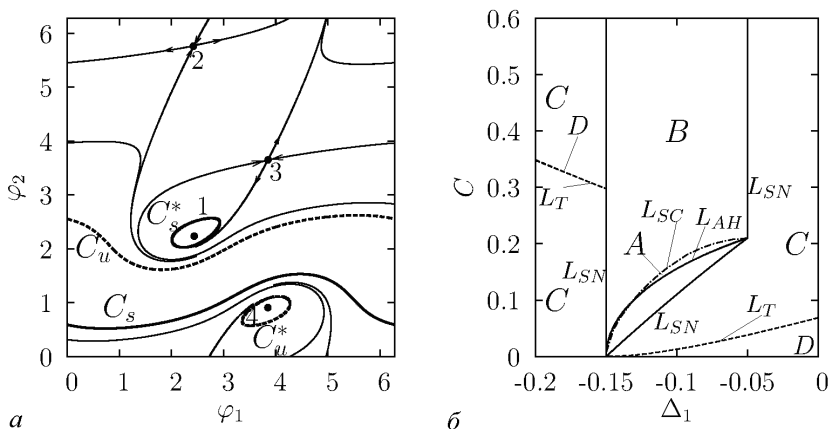


Рис. 3. a – фазовый портрет системы (2) в области A , C_s^* и C_u^* – устойчивый и неустойчивый предельные циклы, C_s и C_u – устойчивая и неустойчивая замкнутые инвариантные кривые; $б$ – бифуркационная диаграмма системы (2) при $g_2 = -0.05$, A – область существования предельных циклов, L_{AH} – линия бифуркации Андронова–Хопфа, L_{SC} – линия влипания предельного цикла в петлю сепаратрисы седла

Хопфа, к линии L_{SC} происходит увеличение радиуса каждого предельного цикла и, как итог, влипание в петлю сепаратрисы седла. Стоит отметить, что дальнейшее уменьшение параметра g_2 приводит к увеличению области A .

В рамках данной работы мы исследовали укороченные уравнения фазовой модели, полученные для системы двух асимметрично связанных осцилляторов ван дер Поля с отталкивающим взаимодействием под внешним гармоническим сигналом. Основным результатом нашей работы является обнаружение бифуркации Андронова–Хопфа, не характерной для классического фазового приближения без учета амплитуд. В результате данной бифуркации в системе фазовых уравнений реализуется мультистабильность, что приводит к «развороту» области B на бифуркационной диаграмме и ее перекрытию с областями D . Данный результат представляется важным с точки зрения исследования синхронизации взаимодействующих колебательных систем с асимметричным и отталкивающим типами взаимодействия.

Библиографический список

1. *A. Pikovsky, M. Rosenblum, and J. Kurths. Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Science. (Cambridge, Cambridge University Press, 2001).*
2. *V.S. Anischenko, V.V. Astakhov, A.B. Neiman, T.E. Vadivasova, and L. Shimansky-Geier. Nonlinear Dynamics of Chaotic and Stochastic Systems. Tutorial and Modern Development. (Berlin, Springer, 2007).*
3. *V. Anischenko, S. Astakhov, and T. Vadivasova. Phase dynamics of two coupled oscillators under external periodic force// Europhysics Letters, 86(2009) 30003.*
4. *A.P. Kuznetsov, I.R. Sataev, and L.V. Turukina. On the road towards multi-dimensional tori// Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 16(2011), pp. 2371 - 2376.*
5. *А.П. Кузнецов, И.Р. Сатаев и Л.В. Тюрюкина. Вынужденная синхронизация двух связанных автоколебательных осцилляторов Ван дер Поля// Нелинейная динамика. Т. 7. № 3(2011). Сс. 411–425.*
6. *P. Ashwin, O. Burylko and Y. Maistrenko. Bifurcation to heteroclinic cycles and sensitivity in three and four coupled phase oscillators// Physica D 237(2008), pp. 454–466.*

Научный руководитель: *Астахов С.В.*, к.ф.-м. н., доцент кафедры радиопизики и нелинейной динамики СГУ.

ОБОБЩЕННАЯ синхронизация в случае воздействия хаотического сигнала на систему с периодической динамикой

Павлов А.С., аспирант, ФНП СГУ

Исследование хаотической синхронизации связанных динамических систем представляется в настоящее время одним из актуальных направлений нелинейной динамики [1]. Интерес к этому явлению обусловлен как большим фундаментальным значением его исследования, так и возможностью применения различных его типов, например, в физиологии, медицине, для скрытой передачи информации, а также в других областях науки и техники.

Одним из наиболее интересных типов хаотической синхронизации является режим обобщенной синхронизации [2]. Как правило, он вводится в рассмотрение для системы двух однонаправленно связанных хаотических осцилляторов, ведущего $x_d(t)$ и ведомого $x_r(t)$, и означает наличие функционального соотношения $x_r(t) = F[x_d(t)]$ между их состояниями. В последнее время, появились попытки обобщения этого режима на системы с взаимной связью и сети связанных нелинейных элементов. Однако, изучение этого режима в системах с однонаправленной связью остается по-прежнему актуальным.

Одним из вопросов, требующих дальнейшего изучения, является исследование возможности установления обобщенной синхронизации в том случае, когда ведомая система находится в периодическом режиме. При этом понятно, что характеристики ведомой системы должны оказывать существенное влияние на установление синхронного режима. Однако, методы его диагностики должны остаться неизменными.

Для диагностики обобщенной синхронизации в двух однонаправленно связанных хаотических системах традиционно используют метод вспомогательной системы [3] или метод расчета условных ляпуновских экспонент [4]. Реализация обоих методов и критерии наличия обобщенной синхронизации в случае воздействия хаотического сигнала на систему с периодической динамикой останутся неизменными за одним лишь исключением: так как ведомая система находится в периодическом режиме, ее старшая ляпуновская экспонента равна нулю, следовательно, диагностирование обобщенной синхронизации в данном случае должно осуществляться по моменту перехода нулевой условной ляпуновской экспоненты в область отрицательных значений.

Коротко обсудим механизмы возникновения обобщенной синхронизации в случае воздействия хаотического сигнала на систему, демонстрирующую периодическое поведение. В работе [5] было показано, что в случае взаимодействия двух хаотических осцилляторов, независимо от типа связи (диссипативная или недиссипативная) между ними, возникновение обобщенной синхронизации определяется балансом между подавлением собственной хаотической динамики в ведомой системе и возбуждением хаотических колебаний в ней под действием внешнего сигнала ведущей системы. Понятно, что в рассматриваемом случае «собственная хаотическая динамика» в ведомой системе отсутствует, а следовательно, ведущая система может легко навязать ей свою хаотическую динамику. В этом случае режим обобщенной синхронизации должен возникать при меньших значениях параметра связи по сравнению со случаем двух однонаправлено связанных хаотических систем.

Особого внимания заслуживает вопрос о поведении границы обобщенной синхронизации при изменении параметров ведущей системы. В частности, как было показано в работе [6], для двух однонаправлено связанных хаотических осцилляторов поведение границы обобщенной синхронизации на плоскости параметров «частота ведущей системы – параметр связи» существенным образом отличается от поведения границ других известных типов хаотической синхронизации: в области относительно больших значений расстройки собственных частот порог возникновения синхронного режима практически не зависит от параметров ведущей системы, в то время как в области относительно слабых расстроек порог обобщенной синхронизации в некоторых системах начинает резко расти [6,7]. Рассмотрим поведение границы обобщенной синхронизации в случае взаимодействия хаотического осциллятора с системой, находящейся в периодическом режиме, на примере однонаправлено связанных осцилляторов Ресслера.

Исследуемая модель в безразмерном виде описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{x}_d &= -\omega_d y_d - z_d, \dot{x}_r = -\omega_r y_r - z_r + \varepsilon(x_d - x_r), \\ \dot{y}_d &= \omega_d x_d + a_d y_d, \dot{y}_r = \omega_r x_r + a_r y_r, \\ \dot{z}_d &= p + z_d(x_d - c), \dot{z}_r = p + z_r(x_r - c), \end{aligned} \quad (1)$$

где параметр ε характеризует величину связи между осцилляторами, $a_d = 0.15$, $p = 0.2$, $c = 10.0$ – управляющие параметры. Управляющий параметр ведомой системы $\omega_r = 0.95$, характеризующий основную частоту колебаний, был фиксирован, а аналогичный параметр ведущей системы ω_d варьировался в диапазоне от 0.86 до 1.04 для того, чтобы задать расстройку взаимодействующих осцилляторов. При выборе управляющего параметра

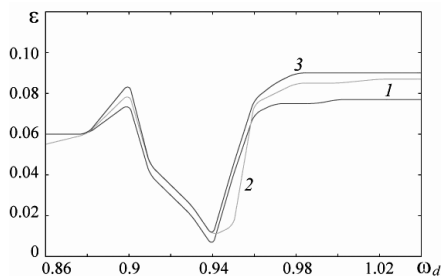


Рис. 1. Границы возникновения режима обобщенной синхронизации при $a_r = 0.08$ (линия 1); $a_r = 0.09$ (линия 2); $a_r = 0.094$ (линия 3) для двух однонаправленно связанных осцилляторов Ресслера (2) на плоскости управляющих параметров (ω_d, ε)

чем проще режим, реализующийся в системе, тем ниже пороговое значение параметра связи, соответствующее установлению синхронного режима. Более того, границы возникновения синхронного режима в данном случае проходят значительно ниже аналогичной границы в случае взаимодействия двух связанных хаотических систем [6], что подтверждает теоретические рассуждения, приведенные выше. В то же самое время, как и в случае двух связанных хаотических систем, во всех рассмотренных случаях порог возникновения режима обобщенной синхронизации в области относительно больших значений расстройки собственных частот практически не зависит от параметра ведущей системы. Однако, в области относительно слабых значений частотной расстройки наблюдается сильный «провал», что не характерно для систем, демонстрирующих хаотическую динамику.

Возникновение обнаруженного «провала» можно объяснить следующим образом. Если частота внешнего хаотического воздействия близка к собственной частоте колебаний ведомой системы, происходит захват частот, а следовательно установление фазовой синхронизации. Ведомая система находится в периодическом режиме, поэтому ведущая система может легко навязать ей свою хаотическую динамику. В этом случае границы фазовой и обобщенной синхронизации будут примерно совпадать, а граница обобщенной синхронизации будет демонстрировать «нормальное» поведение¹. К аналогичному выводу можно прийти, исходя из теоретических рассуждений, представленных выше. В области относительно слабых значений рас-

ведомой системы $a_r = 0.08$ в системе реализуется цикл периода 2, аналогично, при $a_r = 0.09$ – цикл периода 4, при $a_r = 0.094$ – цикл периода 8. Во всем диапазоне изменения параметра ω_d ведущая система демонстрирует хаотическую динамику.

На рис. 1 показано расположение границы обобщенной синхронизации системы (1) на плоскости управляющих параметров (ω_d, ε) . Линия 1 соответствует границе установления режима обобщенной синхронизации при $a_r = 0.08$, линия 2 – при $a_r = 0.09$, а линия 3 – при $a_r = 0.094$. Из рисунка видно, что

¹Под «нормальным» поведением в данном случае понимается рост порогового значения параметра связи, соответствующего установлению синхронного режима, при увеличении величины расстройки между системами.

стройки собственных частот режиму фазовой синхронизации предшествует переход условной нулевой ляпуновской экспоненты в область отрицательных значений. Так как этот ляпуновский показатель является старшим для ведомой системы, момент его перехода в область отрицательных значений соответствует порогу обобщенной синхронизации. Понятно, что в области относительно слабых значений расстройки частот взаимодействующих систем эти две границы должны располагаться очень близко друг к другу.

В области же относительно больших значений расстройки собственных частот возникновение обобщенной синхронизации обусловлено другим механизмом. Как и в случае двух связанных хаотических систем, синхронный режим возникает за счет подавления собственной динамики ведомой системы и возбуждением в ней хаотических колебаний под действием ведущей системы.

Таким образом, в настоящей работе обнаружена обобщенная синхронизация в случае воздействия хаотического сигнала на систему, находящуюся в периодическом режиме. На примере двух однонаправлено связанных систем Ресслера показано, что порог возникновения синхронного режима в данном случае снижается по сравнению со случаем двух связанных хаотических систем. Объяснены механизмы возникновения синхронного режима в данном случае.

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (соглашения №№ 14.В37.21.0059, 14.В37.21.1289).

Библиографический список

1. Пиковский А.С., Розенблюм М.Г., Куртс Ю. Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление // М.: Техносфера. 2003.
2. Rulkov N.F., Sushchik M.M., Tsimring L.S., Abarbanel H.D.I. // Phys. Rev. E. 1995. V. 51, № 2. P. 980–994.
3. Abarbanel H.D.I., Rulkov N.F., Sushchik M.M. // Phys. Rev. E. 1996. V. 53, № 5. P. 4528–4535.
4. Pyragas K. // Phys. Rev. E. 1997. V. 56, № 5. P. 5183–5188.
5. Hramov A.E., Koronovskii A.A. // Phys. Rev. E. 2005. V. 71, № 6. P. 067201
6. Hramov A.E., Koronovskii A.A., Moskalenko O.I. // Europhysics Letters. 2005. V. 72, № 6. P. 901–907.
7. Павлов А.С. // Изв. вузов. ПНД. 2012. Т. 20, № 1. С. 91–98.

Научный руководитель: Москаленко О.И., к.ф.-м. н., доцент КФОС

СОЗДАНИЕ ХАОТИЧЕСКОГО ГЕНЕРАТОРА С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ С КВАДРАТИЧНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ НА БАЗЕ МИКРОКОНТРОЛЛЕРА

Ишбулатов Ю.М., студент 2 курса ФНБМТ СГУ

Кульминский Д.Д., студент 1 курса магистратуры ФНБМТ СГУ

Целью нашей работы является создание хаотического генератора с запаздывающей обратной связью (ГЗОС) на базе микроконтроллера (МК) Atmel AVR. В качестве примера в работе рассматривается ГЗОС с квадратичной нелинейностью, описываемый уравнением:

$$\varepsilon \dot{x}(t) = -x(t) + \lambda - x^2(t - \tau), \quad (1)$$

где $x(t)$ – динамическая переменная, ε – параметр, характеризующий инерционность системы, τ – время запаздывания и λ – управляющий параметр.

Первым этапом разработки генератора было создание его компьютерной модели на персональном компьютере (ПК). Этот шаг был необходим, потому что цифровые микроконтроллеры имеют низкую разрядность в 8 бит и не имеют встроенных модулей аппаратной поддержки арифметики с плавающей точкой, и было необходимо убедиться в том, что создание такого генератора на базе МК возможно. Для наиболее эффективной реализации ГЗОС на базе устройства, не имеющего аппаратного модуля поддержки операций с плавающей точкой, уравнение, описывающее генератор, было модифицировано путем масштабирования к виду:

$$x_{n+1} = \left(1 + \frac{h}{\varepsilon}\right) x_n + A_x \frac{h}{\varepsilon} \lambda - \frac{h}{\varepsilon} \frac{x_{n-t}^2}{A_x}, \quad (2)$$

где $h = 0.1$ – шаг интегрирования, A_x – масштабный коэффициент. При выборе значения $A_x = 10^4$ динамическая переменная занимает в памяти 2 байта, что позволяет достаточно экономично использовать оперативную память и обеспечить высокое быстродействие программы для 8 битного МК. В ходе такого моделирования была показана возможность реализации ГЗОС на базе МК Atmel AVR и выбраны параметры, соответствующие движению на хаотическом аттракторе. После завершения компьютерного моделирования была создана натурная установка – радиофизический генератор с запаздыванием.

Также был разработан микрокод на языке программирования Си для МК Atmel ATxmega256A3. Работоспособность ГЗОС была продемонстрирована экспериментально. В ходе эксперимента сигнал, генерируемый ГЗОС, по интерфейсу UART передавался в ПК. На рис. 1 приведены сигналы, полученные в результате работы генератора на базе МК, и сигналы, полученные в результате компьютерного моделирования, при следующих значениях управляющих параметров: $\varepsilon = 2$, $\tau = 100$, $\lambda = 1.2$ (рис. 1, *a*), что соответствует периодическому режиму с периодом 2 и $\varepsilon = 2$, $\tau = 100$, $\lambda = 1.99$ (рис. 1, *б*) – что соответствует хаотической динамике [1].

В качестве доказательства сложной, хаотической природы колебательного режима показанного на рис. 1, *б* была построена проекция фазового портрета системы, он показан на рис. 2 вместе с проекцией фазового портрета компьютерной модели, которая при тех же значениях управляю-

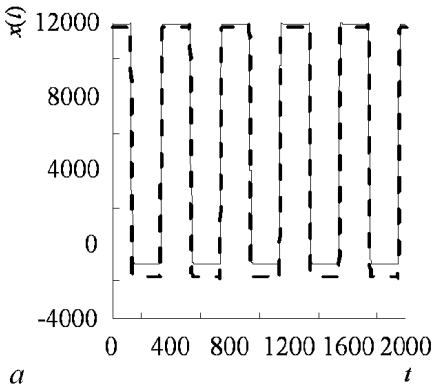
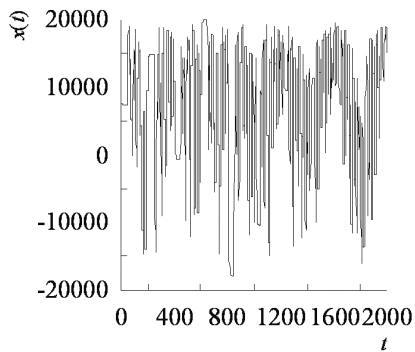
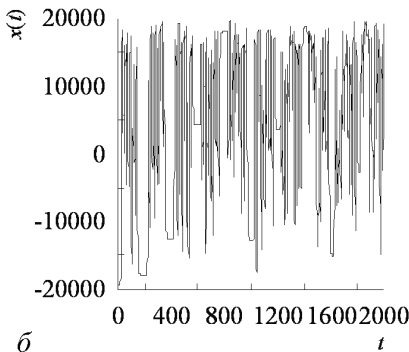


Рис. 1. *a* – полученный в результате численного моделирования (сплошная линия) и экспериментальный (пунктирная линия) сигналы при $\varepsilon = 2$, $\tau = 100$, $\lambda = 1.2$. *б* – полученный в результате численного моделирования (слева) и экспериментальный (справа) сигналы при $\varepsilon = 2$, $\tau = 100$, $\lambda = 1.99$



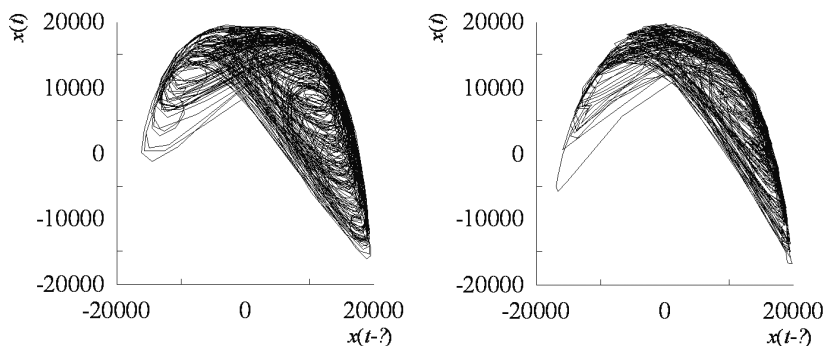


Рис. 2. Проекция фазовых портретов компьютерной модели (слева) и ГЗОС, построенного на базе МК (справа) при $\varepsilon = 2$, $\tau = 100$, $\lambda = 1.99$

щих параметров показывает хаотическую динамику, что хорошо согласуется с результатами исследований, проведенными ранее [1].

Несмотря на небольшое расхождение, обусловленное особенностями реализации арифметико-логического устройства МК, результаты моделирования и натурального эксперимента достаточно близки (рис. 2).

Из рисунков 1 и 2 видно, что в ходе радиофизического эксперимента ГЗОС, построенный на базе МК Atmel XTmega256A3, продемонстрировал колебательные режимы, соответствующие поведению компьютерной модели.

Таким образом, в ходе работы был создан радиотехнический генератор с запаздывающей обратной связью с квадратичной нелинейностью. Его работоспособность была показана при сопоставлении полученных от него сигналов с результатами численного моделирования на персональном компьютере.

Работа выполнена при поддержке грантов Президента РФ МК-4435.2012.8 и РФФИ №13-02-00227.

Библиографический список

1. А.С. Караваяев, В.И. Пономаренко, М.Д. Прохоров. Восстановление моделей скалярных систем с запаздыванием по временным рядам // Письма в ЖТФ. 2001. Т. 27. В. 10. С. 43–51.

Научный руководитель: Караваяев А.С., к.ф.-м. н., доцент ФНБМТ СГУ.

ИЗМЕНЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК ВРЕМЕН ВОЗВРАТА ПУАНКАРЕ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ ШУМА

Бирюкова Н.И., студентка 4 курса физического факультета СГУ

Объектом исследования является анализ статистических характеристик последовательности времен возврата Пуанкаре в ε -окрестность выбранного начального состояния \vec{x}_0 в хаотическом аттракторе динамической системы (локальный подход). Доказано, что при локальном подходе плотность распределения времен первых возвратов Пуанкаре в ε -окрестность начального состояния \vec{x}_0 подчиняется закону [1]:

$$p(\tau_r) = \frac{1}{\langle \tau_r \rangle} \exp\left(-\frac{\tau_r}{\langle \tau_r \rangle}\right), \quad \tau_r \geq \tau_r^*, \quad (1)$$

где $\langle \tau_r \rangle$ – среднее время первого возврата в ε -окрестность, τ_r^* – некоторое малое значение τ_r . Выражение (1) не зависит от размерности исследуемой динамической системы.

Вторым важным теоретическим результатом при локальном подходе является теорема Каца [2], которая устанавливает взаимосвязь среднего времени первого возвращения Пуанкаре $\langle \tau_r \rangle$ с вероятностью пребывания фазовой траектории системы в ε -окрестности заданного состояния \vec{x}_0 $P(\vec{x}_0, \varepsilon)$:

$$\langle \tau_r \rangle = \frac{\gamma}{P(\varepsilon, \vec{x}_0)} \quad (2)$$

γ – постоянная, которая для дискретных динамических систем равна 1. В дальнейшем положим $\gamma = 1$.

Распределение (1) с учетом (2) можно переписать в виде:

$$p(\tau_r) = P(\varepsilon, \vec{x}_0) \exp(-P(\varepsilon, \vec{x}_0)\tau_r) \quad (3)$$

При экспериментальных исследованиях оказывается удобным рассматривать $\ln[p(\tau_r)]$, т. к. график представляет собой прямую линию $y = a - kx$:

$$\ln[p(\tau_r)] = C - \frac{\tau_r}{\langle \tau_r \rangle}, \quad C = \ln P(\varepsilon, x_0), \quad (4)$$

Коэффициент k наклона прямой $\ln p(\tau_r)$ от τ_r выражается как:

$$k = -\frac{1}{\langle \tau_r \rangle} = -P(\varepsilon, \vec{x}_0), \quad (5)$$

Если вероятностная мера $p(x)$ задана, то для вероятности $P(\varepsilon, \vec{x}_0)$:

$$P(\varepsilon, \vec{x}_0) = \int_{x_0 - \frac{\varepsilon}{2}}^{x_0 + \frac{\varepsilon}{2}} p(\vec{x}) d\vec{x} \approx p(x_0) \varepsilon^{d_f}, \quad (6)$$

где $\varepsilon \ll 1$, d_f – фрактальная размерность предельного множества (аттрактора) в фазовом пространстве системы. Для одномерных дискретных отображений с непрерывной и гладкой вероятностной мерой $d_f = 1$.

Зная закон распределения (1), (3), вычислим дисперсию $\sigma_r^2(\varepsilon, x_0)$ как среднеквадратичное отклонение τ_r от $\langle \tau_r \rangle$:

$$\sigma_r^2 = \langle (\tau_r - \langle \tau_r \rangle)^2 \rangle = \langle \tau_r \rangle^2. \quad (7)$$

Из выражения (2) с учетом (6) для одномерного отображения с хаотическим аттрактором получаем:

$$\langle \tau_r \rangle = [p(x_0)]^{-1} \varepsilon^{-d_f} \quad (8)$$

или

$$\ln \langle \tau_r \rangle = C_1 - d_f \ln \varepsilon. \quad (9)$$

Соответственно для дисперсии:

$$\ln \sigma_r^2(x_0, \varepsilon) = C_2 - 2d_f \ln \varepsilon. \quad (10)$$

Для одномерного отображения с гладкой вероятностной мерой зависимости $\ln \langle \tau_r \rangle$ и $\ln \sigma_r^2(x_0, \varepsilon)$ от величины $\ln \varepsilon$ будут прямые линии с наклоном -1 и -2 , соответственно.

На рис. 1 приведены данные численного эксперимента, проведенного для одномерного отображения

$$x_{n+1} = \lambda x_n(1 - x_n) + \sqrt{2D}\xi(n) \quad (11)$$

при значениях параметров $\lambda = 4$ и $D = 0$, где D – интенсивность внешнего белого шума $\xi(n)$.

Как видно из графика рис. 1(б), действительно, рассчитанные зависимости для $\langle \tau_r \rangle$ и $\sigma_r^2(x_0, \varepsilon)$ от $\ln \varepsilon$ представляют собой прямые с наклонами $|k| = 1.008$ и $|k| = 2.0208$, что с учетом ошибки счета соответствует теории (9) и (10).

Теперь поставим вопрос, как изменятся описанные закономерности в условиях воздействия шума на систему (11)? Необходимо проанализировать влияние шума на закон (1), теорему Каца (5) и зависимости (9) и (10). Ряд ответов на поставленные вопросы приведен в работах [4,5]

Как отмечалось в работе [5], главным фактором является изменение вероятностной меры аттрактора, обусловленное действием шума. На рис. 2(а) приведены данные расчета $p(x)$ для аттрактора системы (11) при $\lambda = 4$ и $D = 10^{-3}$. Сравнение результатов рис. 2(а) с рис. 1(а) показывает, что $p(x)$ в присутствии шума меняется, а значит, будет изменяться и величина $P(\varepsilon, \vec{x}_0)$ (6).

Теорема Каца будет справедливой и для зашумленной системы [5], однако в выражении (2) необходимо использовать уже величину $P(\varepsilon, x_0, D)$.

$$\langle \tau_r \rangle = \frac{1}{p(x_0, D)} \varepsilon^{-d_f}. \tag{12}$$

Естественно предположить, что и распределение $p(\tau_r)$ (1) останется справедливым, если входящий в (1) коэффициент $\langle \tau_r \rangle$ будет рассчитан с учетом влияния шума:

$$p(\tau_r) = \frac{1}{\langle \tau_r(D) \rangle} \exp \left(-\frac{\tau_r}{\langle \tau_r(D) \rangle} \right). \tag{13}$$

Если закон (13) выполняется, то выражения (9) и (10) для $\langle \tau_r \rangle$ и σ_r^2 также будут справедливы, причем линейная зависимость от $\ln \varepsilon$ сохранится,

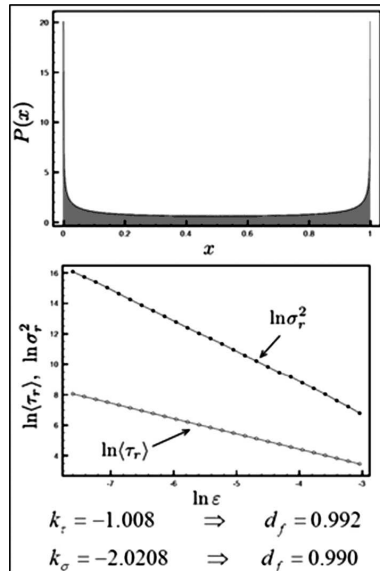


Рис. 1. (а) – Плотность распределения $p(x)$ на аттракторе системы (11) (б) – зависимости $\ln \langle \tau_r \rangle$ и $\ln \sigma_r^2$ от $\ln \varepsilon$. Наклоны этих зависимостей -1.008 и -2.0208 , соответственно. Значения параметров $\lambda = 4, D = 0, x_0 = 0.5$

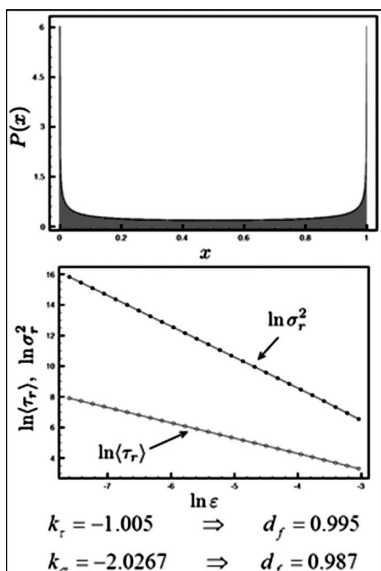


Рис. 2. (а) – $p(x)$ системы (11) при $\lambda = 4, D = 10^{-3}$. (б) – Зависимость $\ln \langle \tau_r \rangle$ и $\ln \sigma_r^2$ от $\ln \varepsilon$ для зашумленной системы (11) при $\lambda = 4, D = 10^{-3}$

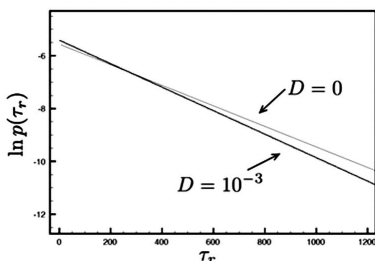


Рис. 3. Результаты аппроксимации данных расчета плотности распределения $p(\tau_r)$ при $\varepsilon = 0.006$ для случаев $D = 0$ и $D = 10^{-3}$. Наклоны -0.0039677 (тогда $\langle \tau_r \rangle = 252$) и -0.0044424 (тогда $\langle \tau_r \rangle = 225.1$) соответственно

ный закон распределения времен возврата $p(\tau_r)$ оказываются справедливы и в случае аддитивного шумового воздействия на систему.

как и величины наклонов d_f и $2d_f$. На рис. 3 приведены данные расчета плотности распределения $p(\tau_r)$ для случаев $D = 0$ и $D = 10^{-3}$. Как видно из графиков, экспоненциальный характер зависимостей $p(\tau_r)$ имеет место как без, так и при наличии шума $D = 10^{-3}$. Более того, в обоих случаях наклон прямых $\ln p(\tau_r)$ от τ_r строго соответствует величине $k = -1/\langle \tau_r \rangle$. В зашумленной системе $\langle \tau_r \rangle$ уменьшается за счет возрастания вероятности $P(x_0, \varepsilon, D) > P(x_0, \varepsilon, D = 0)$, что приводит к увеличению наклона графика рис. 3 для зашумленной системы. Таким образом, экспоненциальный закон распределения (1) оказывается справедливым и в случае зашумленной системы (11), если учесть в выражении (1) изменение величины $\langle \tau_r \rangle$. Если это так, то можно ожидать, что графики, представленные на рис. 1(b) для случая $D = 0$, будут качественно совпадать с графиками для $\langle \tau_r \rangle$ и σ_r^2 , рассчитанными для зашумленной системы (11). Расчеты этот факт подтвердили. На рис. 2(b) соответствующие результаты расчета приведены.

Основной вывод: воздействие шума на режим хаотического аттрактора динамической системы приводит к изменениям в характере плотности распределения $p(x)$. Если это обстоятельство корректно учесть, то из приведенных результатов следует, что теорема Каца и экспоненциаль-

Библиографический список

1. *Hirata Massaki, Saussol Benoit, Vienti Sandro*. Statistics of Return Times: A General Framework and New Applications // *Comm. in Math. Phys.*, 1999, v. 206, p. 33–55.
2. *М. Кас*. *Lectures in Applied Mathematics* // London: Interscience, 1957.
3. *В.С. Анищенко, С.В. Астахов, Я.И. Боев, Ю. Куртс*. Возвраты Пуанкаре в системе с хаотическим нестранным аттрактором // *Нелинейная динамика*, т.8, № 1, 2012, стр. 29–41.
4. *В.С. Анищенко, М.Е. Хайрулин*. Влияние индуцированного шумом кризиса аттракторов на характеристики времен возврата Пуанкаре // *Письма в ЖТФ*, 2011, т.37, № 12, стр. 35–43.
5. *V.S. Anishchenko, M. Khairulin, G. Strelcova, J. Kurths*. Statistical Characteristics of the Poincare return times for a one-dimensional non hyperbolic map // *Eur. Phys. J. B*, 2011, v. 82, p. 219-225.

Научный руководитель: *Анищенко В.С.*, д.ф.-м.н., профессор, заведующий кафедрой радиофизики и нелинейной динамики СГУ.

ВЛИЯНИЕ ИЗМЕРИТЕЛЬНОГО ШУМА НА ОПРЕДЕЛЕНИЕ СВЯЗАННОСТИ МЕТОДОМ НЕЛИНЕЙНОЙ ПРИЧИННОСТИ ПО ГРЕЙНДЖЕРУ ДЛЯ СИСТЕМ С РАЗНЫМ ТИПОМ АТТРАКТОРА

Парамонов Ф.Б., магистр 1 курса ФНБМТ СГУ

Введение

В последнее время в связи со всё большим применением электронной измерительной техники в экспериментах широкое применение получили методы построения эмпирических математических моделей в различных сферах науки и техники. Эти модели также можно применить к задаче поиска связанности между объектами по их временным реализациям. Самый распространённый подход к решению этой проблемы – метод причинности по Грейнджеру [1]. Изначально этот метод был разработан для линейных моделей, известны также различные его нелинейные обобщения [2,3], в том числе с аппроксимацией нелинейных функций в виде полиномов общего вида [4].

Ни один численный эксперимент не может дать абсолютно точных данных, всегда можно говорить о некоторой допустимой точности измерений. Погрешности происходят из-за воздействия многих факторов, немаловажным из которых являются шумы измерений. Вследствие этого вопросы учёта и анализа их влияния на результаты измерений важны и актуальны. Несмотря на то, что этот вопрос для линейного метода причинности по Грейнджеру уже затрагивался в некоторых работах [5,6], исследование для нелинейного обобщения не проводилось. В работе [7] нами затрагивался вопрос о монотонности зависимости основного показателя метода – величины улучшения прогноза от измерительного шума и была выявлена в ряде систем не тривиальное поведение.

Целью нашей работы является выявить, в каких случаях зависимость основного показателя метода нелинейной грейнджеровской причинности – улучшения прогноза от уровня измерительного шума при различных уровнях связи может быть немонотонна.

Метод нелинейной грейнджеровской причинности

Метод состоит в следующем. На первом этапе строится собственная (индивидуальная) модель (1):

$$x_n = f(x_{n-l}, x_{n-2l}, \dots, x_{n-D_s l}, c^s) + \xi, \quad (1)$$

где f – аппроксимирующая функция, l – лаг модели, D_s – собственная размерность модели, c^s – неизвестные коэффициенты, ξ – остатки. Коэффициенты c^s оцениваются методом наименьших квадратов по экспериментальной реализации $\{x_n\}_{n=1}^N$. Полученная модель имеет среднеквадратичную ошибку аппроксимации ε_s^2 , равную дисперсии остатков ξ_n^s

Следующим шагом строится совместная модель (2):

$$x_n = g(x_{n-1}, x_{n-2l}, \dots, x_{n-D_s l}, y_{n-l}, y_{n-2l}, \dots, y_{n-D_a l}, c^j) + \xi_n^j, \quad (2)$$

где D_a – размерность добавки, c^j – коэффициенты совместной модели; и f и g – полиномы общего вида, порядка P . Коэффициенты обеих моделей подгоняются методом наименьших квадратов. После того, как совместная модель (2) построена, можно рассчитать среднеквадратичную ошибку прогноза ε_j^2 , ξ_n^s и ε_j^2 рассчитываются по методу наименьших квадратов.

Случай $\varepsilon_j^2 < \varepsilon_s^2$ показывает, что данные из ряда системы Y помогли предсказать поведение системы X . В таком случае можно сказать, что Y действует на X по Грейнджеру. В качестве количественной меры воздействия используется PI – улучшение прогноза, определяемое по формуле (3):

$$PI = 1 - \frac{\varepsilon_j^2}{\varepsilon_s^2} \quad (3)$$

Улучшение прогноза $PI = 0$ в случае, если данные из ряда Y не помогают предсказывать динамику системы X , т.е. $\varepsilon_j^2 = \varepsilon_s^2$. PI достигает 1, если динамика X полностью описывается совместной моделью ($\varepsilon_j = 0$), но не описывается индивидуальной.

Численный эксперимент

В реальной жизни часто перед исследователем стоит задача определения связанности двух временных реализаций объектов. Причем объекты по своей природе могут быть как различными, так и совпадающими. Для моделирования таких систем проводился следующий численный эксперимент.

Исследовалась связанность между дискретными отображениями одной природы, но расстроенные по параметрам – гомогенные системы и между отображениями разной природы – гетерогенные системы. Как отмечалось в работах [4,5] при наличии шума уровень PI будет монотонно спадать с ростом такой характеристики шума, как среднеквадратичное отклонение σ . Однако в полученных результатах наблюдается не только монотонный спад количественной характеристики, но в некоторых случаях возможен эффект локального роста зависимости $PI(\sigma)$. Построив фазовые портреты и диаграммы Ламеррея (рис. 1, ряды 1–5), проведя кластерный анализ полученных групп точек можно сделать следующий вывод. Так как ведущая система находится в хаотическом режиме (рис. 1, ряд 1), а ведомая в периодическом (рис. 1, ряды 2–4), то внести информацию о динамике ведомой она не может. Поэтому при небольших уровнях шума PI спадает с ростом σ (рис. 1, ряд 6). Однако, по мере зашумления сигнала структура ведомой системы размывается под действием шума и прогноз заметно ухудшается (рис. 1, ряд 3). В силу того, что аттрактор ведущей системы многоленточный, и перескок точки с одной ленты на другую детерминирован и происходит с определенным периодом, то эта информация позволяет определить периодическую структуру ведомой модели и уровень PI поднимается. Затем при росте уровня измерительного шума σ структура систем совсем размывается (рис. 1, ряды 4–5) и зависимость $PI(\sigma)$ снова продолжает монотонно спадать.

Модели, используемый в численном моделировании:

1. Гомогенная система логистического отображения.

$$E = mc^2. \quad (4)$$

2. Гомогенная система отображения окружности

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + \Delta_x + m_x \sin(x_n) + \kappa y_n, \\ y_{n+1} &= y_n + \Delta_y + m_y \sin(y_n). \end{aligned} \quad (5)$$

3. Гомогенная система отображения Эно

$$E = mc^2 \quad (6)$$

Гетерогенная система отображения Эно связанного с отображением окружности

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + \Delta_x + m_x \sin(x_n) + \kappa y_n, \\ y_{n+1} &= 1 - a_y y_n^2 - b_y y_{n-1}. \end{aligned} \quad (7)$$

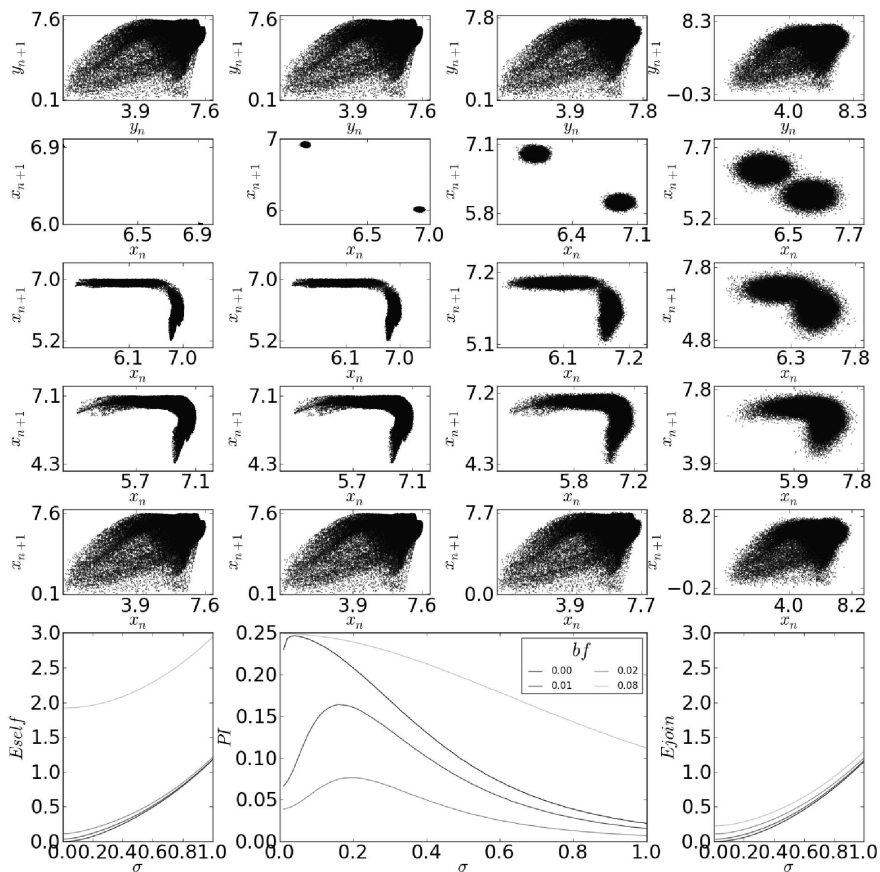


Рис. 1. График показывает динамику системы при параметрах $a_x = 0.2$, $c_x = 5.7$, $a_y = 0.38$, $b_y = 0.2$, $c_y = 5.7$ и $b_x = 1.10$. В рядах №№ 1–5 представлены диаграммы Ламмерса. Ряд № 1 и № 2 – внутренняя динамика собственных сигналов X и Y . Ряды №№ 3–5 показывают динамику ведомой системы при воздействии на нее ведущей, с увеличением номера ряда растет коэффициент связи между системами. С увеличением номера столбца для каждого ряда увеличивается уровень измерительного шума в системе. Ряд № 6, столбцы 1 и 4 представляют зависимости уровня ошибок аппроксимации, собственной и совместной соответственно, от измерительного шума. Центральный график ряда № 6 – зависимость улучшения прогноза PI от уровня измерительного шума σ . Чем светлее кривая, тем сильнее связь между системами. Все значения приведены в безразмерных относительных единицах и приведенные данные усреднены по 100 реализациям. Шум нормальный с нулевым средним, различный для каждой реализации

Гомогенная система дискретного отображения системы Ресслера.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_2 - x_3 + \kappa y_1, \\ \dot{x}_2 &= x_1 + a_x x_2, \\ \dot{x}_3 &= b_x + x_3 (x_1 - c_x), \\ \dot{y}_1 &= -y_2 - y_3, \\ \dot{y}_2 &= y_1 + a_y y_2, \\ \dot{y}_3 &= b_y + y_3 (y_1 - c_y).\end{aligned}\tag{8}$$

Из данной системы дифференциальных уравнений сечением Пуанкаре плоскостью $y = 0$ получается дискретное отображение непрерывной системы (8).

Заключение

Обнаруженный ранее эффект наблюдается для систем с многоленочным аттрактором. Это можно объяснить тем, что переключение между лентами несёт синхронную информацию о состоянии обеих систем и, как следствие, помогает в предсказании поведения ведомой системы. Поэтому в диапазоне не больших шумов возникает локальный рост зависимости $PI(\sigma)$ и в ряде случаев уровень PI может быть постоянен.

Библиографический список

1. *C.W.J. Granger*. Investigating Causal Relations by Econometric Models and Cross-spectral Methods. *Econometrica*, Vol. 37, No. 3., 1969, pp. 424–438.
2. *Daniele Marinazzo, Mario Pellicoro, and Sebastiano Stramaglia*. Nonlinear parametric model for Granger causality of time series. *Phys. Rev. E* 73, 066216 (2006).
3. *K. Ishiguro, N. Otsu, M. Lungarella and Y. Kuniyoshi*. Comparison of nonlinear Granger causality extensions for low-dimensional systems. *Phys. Rev. E* 77, 036217 (2008).
4. *Yonghong Chen, Govindan Rangarajan, Jianfeng Feng, Mingzhou Ding*. Analyzing Multiple Nonlinear Time Series with Extended Granger Causality. *Physics Letters A*. Volume 324, Issue 1, Pages 26–35.
5. *H. Nalatore, M. Ding, and G. Rangarajan* // *Phys. Rev. E* 75, 031123 (2007).

6. *Matthias Winterhaldera, Bjorn Scheltera, Wolfram Hesse, Karin Schwabc, Lutz Leistritz, Daniel Klan, Reinhard Bauerd, Jens Timmera, Herbert Witte.* Comparison of linear signal processing techniques to infer directed interactions in multivariate neural systems. // *Signal Processing*, 85 (2005) 2137–2160.
7. *Ф.Б. Парамонов, И.В. Сысов.* Эффект увеличения нелинейной грейнджеровской причинности с ростом уровня измерительного шума. // «Нелинейные дни в Саратове для молодых – 2011»; Сборник материалов научной школы конференции. – Саратов: ООО ИЦ «Наука», 2012 С. 93–97.

Научный руководитель: *Сысов И.В.*, к.ф.-м.н., доцент базовой кафедры динамического моделирования и биомедицинской инженерии СГУ.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ СЕГМЕНТАЦИИ ДЛЯ АНАЛИЗА ДИНАМИЧЕСКОЙ СТАЦИОНАРНОСТИ НА ПРИМЕРЕ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ ЭТАЛОННЫХ МОДЕЛЕЙ

*Северюхина А.Н., аспирант факультета
нано-и биомедицинских технологий СГУ*

Стационарность процесса является важнейшей условием применимости большинства методов анализа временных рядов. Проблема заключается в том, что многие сигналы в природе нестационарны. Причины возникновения нестационарности различны. Задачи фиксации самого факта нестационарности и разработки методов анализа таких ситуаций актуальны для многих областей исследований.

В самом общем смысле под термином «стационарность» понимают свойство процесса не менять свои характеристики с течением времени. В теории случайных процессов процесс называется стационарным в узком смысле, если все его многомерные плотности распределения вероятности не зависят от времени. То есть $p_n(x_1, t_1, \dots, x_n, t_n) = p_n(x_1, t_1 + T, \dots, x_n, t_n + T)$ справедливо для любых n, t_i, T . Если от времени не зависит его среднее, а корреляционная функция зависит только от разности времен $\Psi_x(t_1, t_2) = \Psi_x(t_1 - t_2)$, в этом случае процесс называют стационарным в широком смысле.

В последнее время в связи с развитием методов анализа временных рядов, основанных на теории нелинейных динамических систем, появилось и стало популярным такое понятие, как динамическая стационарность, которая подразумевает постоянство оператора эволюции системы, генерирующей ряд [1–6]. Именно такой вид стационарности важен, когда для анализа временных рядов применяются методы, заимствованные из нелинейной динамики.

Для обнаружения и анализа динамической нестационарности используется метод параметрического сегментирования на основе авторегрессионного моделирования. В качестве объектов исследования использовались различные эталонные динамические системы. В один из моментов времени параметры объекта изменялись. Работоспособность методов анализа стационарности оценивалась по их способности правильно обнаружить момент изменения параметров. В данной работе подробно описываем методику на примере логистического отображения.

Пример: Логистическое отображение. В качестве объекта использовалось логистическое отображение

$$x_{n+1} = \lambda - x_n^2. \quad (1)$$

Временной ряд для анализа включал 2000 точек (рис. 1). Первые 1000 точек были получены при значении параметра $\lambda_1 = 1.8$, соответствующему хаотическому режиму. В момент времени $n = 1000$ параметр изменялся и становился равным $\lambda_2 = 1.81$. При этом значении параметра устанавливается режим периода 7. Однако после изменения параметра в течение достаточно длительного времени (около 500 итераций) траектория остается в окрестности потерявшего устойчивость хаотического режима.

Динамическая нестационарность этого сигнала заключается в изменении параметра при $n = 1000$. Однако статистические свойства сигнала в этот момент практически не меняются (рис. 2). Таким образом, изменение параметра отображения не сопровождается изменением этих статистических свойств.

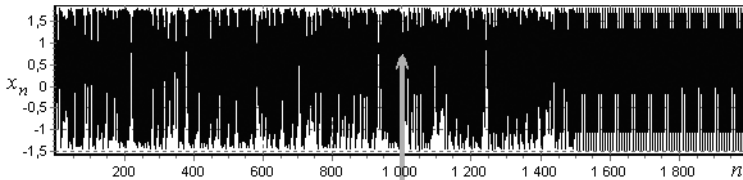


Рис. 1. Временная реализация логистического отображения (1). При $n = 1000$ происходит изменение параметра с величины $\lambda_1 = 1.8$ до величины $\lambda_2 = 1.81$. Стрелкой показан момент изменения параметра

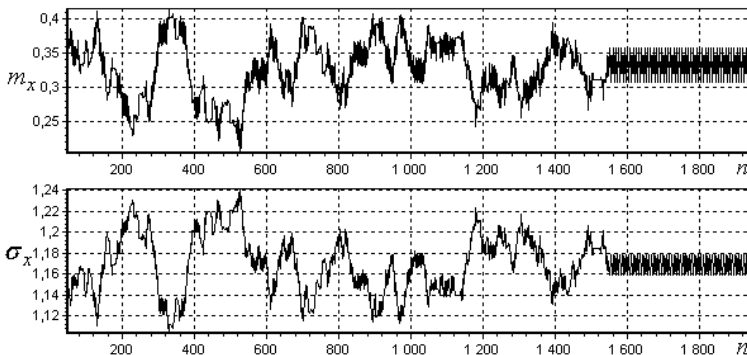


Рис. 2. Среднее и стандартное отклонение временного ряда логистического отображения (1), рассчитанные в скользящем окне длиной 100 точек

Для анализа стационарности этого ряда разобьем его на короткие участки $X_k = \{x_n\}_{n=k \cdot s}^{k \cdot s + w}$ длиной $w = 100$ точек, и будем составлять матрицы расстояний между этими участками. В качестве меры используем евклидовы расстояния между векторами коэффициентов глобальных динамических моделей. По каждому из участков строится модель, различие между участками оценивается как расстояние между векторами коэффициентов этих моделей. В данной работе использовать модели в виде отображений:

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad (2)$$

где f ищется в виде полиномов различного порядка

$$f(x_n) = \sum_{i=0}^p \alpha_i x_n^i. \quad (3)$$

Расстояние между участками рассчитывается по формуле

$$d = \sqrt{\sum_{i=0}^p (\alpha_{i1} - \alpha_{i2})^2}, \quad (4)$$

где α_{i1} и α_{i2} коэффициенты восстановленных по ним моделей.

Получаемые матрицы расстояний удобно представить на диаграммах (рис. 3), где по осям отложены номера начальных точек сравниваемых участков, а величина расстояний между ними показана оттенками серого цвета.

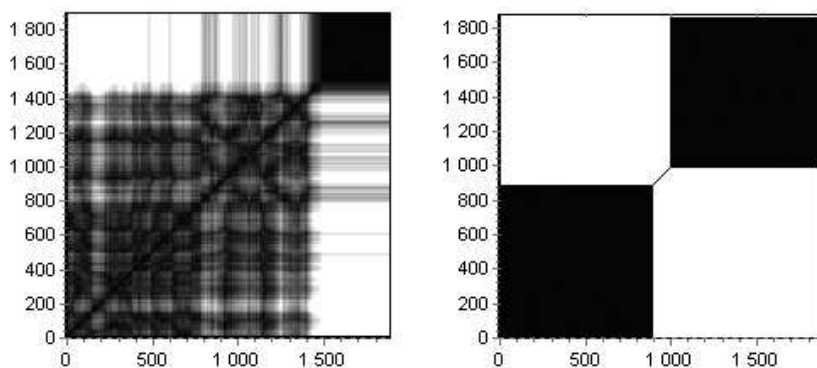


Рис. 3. Матрицы расстояний между коэффициентами глобальных моделей для участков временного ряда отображения (1). Слева для неадекватной модели (5), справа для модели вида (3) с полиномом 2-го порядка в правой части (идеальная модель)

Такое же представление информации используется, например, при построении диаграмм возвратов [7], где таким способом показываются расстояния между точками в восстановленном фазовом пространстве.

На рис. 3 показаны матрицы расстояний между участками ряда, рассчитанные как расстояния (4) между векторами коэффициентов динамических моделей. Диаграмма слева построена для линейных 4-мерных моделей (модель с заведомо неадекватной структурой)

$$x_{n+1} = \sum_{k=1}^4 \alpha_k x_{n-k+1} + \alpha_0. \quad (5)$$

С помощью такой модели изменения удается обнаружить только после установления нового режима. Это связано с тем, что коэффициенты такой модели оказываются зависимыми от распределения тренировочных точек. Когда изменения в динамике сопровождаются существенными изменениями в распределении точек, их удается обнаружить даже с помощью «плохой», неадекватной модели.

Справа на рис. 3 приведены результаты для сравнения участков по коэффициентам модели вида (3) с квадратичным полиномом в правой части (идеальная модель для ряда, генерируемого логистическим отображением). В этом случае удастся точно определить момент изменения параметра, то есть собственно динамическую нестационарность ряда.

Таким образом, с помощью модели, неадекватно описывающей временной ряд, можно увидеть только статистическую нестационарность. В то время, как хорошая динамическая модель позволяет правильно обнаружить характер именно динамической нестационарности.

Работа поддержана грантом РФФИ, проект 11-02-00599.

Библиографический список

1. *Manuca R., Savit R.* Stationary and nonstationary time series analysis // *Physica D.* 1996. Vol. 99. P. 134-161.
2. *Kennel M.B.* Statistical test for dynamical nonstationarity in observed time series data // *Phys. Rev. E.* 1997. Vol. 56. P. 316.
3. *Yu Dejin, Lu Weiping, Harrison Robert G.* Space time-index plots for probing dynamical nonstationarity // *Phys. Lett A.* 1998. Vol. 250. P. 323.

4. *Rieke C., Stemickel K., Andrzejak R.G., Elger C.E., David P., Lehnertz K.* Measuring nonstationarity by analyzing the loss of recurrence in dynamical systems // *Phys. Rev. Lett.* 2002. Vol. 88, № 24.
5. *Schreiber T.* Detecting and Analyzing Nonstationarity in a Time Series Using Nonlinear Cross Predictions // *Phys. Rev. Lett.* 1997. Vol. 78. P. 843.
6. *Schreiber T.* Interdisciplinary application of nonlinear time series methods // *Phys. Rep.* 1999. Vol. 308. P. 3082.
7. *Eckmann J.P., Kamphorst S.O., Ruelle D.* Recurrence plots of dynamical systems // *Europhysics Letters.* 1987. Vol. 4. P. 973-977.

Научный руководитель: *Безручко Б.П.*, д. ф.-м. н., профессор, заведующий кафедрой динамического моделирования и биомедицинской инженерии СГУ, заведующий лабораторией моделирования в нелинейной динамике СФ ИРЭ РАН.

СПОСОБ ВЫЯВЛЕНИЯ СВЯЗИ МЕЖДУ ДВУМЯ КОЛЕБАТЕЛЬНЫМИ СИСТЕМАМИ С АНАЛИТИЧЕСКОЙ ОЦЕНКОЙ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ЗНАЧИМОСТИ

*Сидак Е.В., аспирант факультета
нано- и биомедицинских технологий СГУ*

Для обнаружения связи между двумя колебательными системами по временным рядам в работе предлагается новый метод, основанный на расчете коэффициента корреляции между приращениями фаз колебаний. По сравнению с известными подходами (например, коэффициент фазовой когерентности) предложенный метод проще, а область его применимости шире, т.к. метод эффективен при различных видах связи между осцилляторами.

Описание метода. Пусть имеются временные ряды фаз колебаний двух систем $\{\phi_1(t_1), \dots, \phi_1(t_N)\}$ и $\{\phi_2(t_1), \dots, \phi_2(t_N)\}$, где $t_n = n\Delta t$, Δt – интервал выборки. Способы расчета фазы [1] мы здесь не обсуждаем, считая, что она корректно получена для каждой из исследуемых систем, например, через преобразование Гильберта. Рассчитаем приращения фаз на интервале τ через $\Delta\phi_k(t_n) = \phi_k(t_n + \tau) - \phi_k(t_n)$, $k = 1, 2$, $n = 1, \dots, N^* = N - \tau/\Delta t$. В качестве характеристики связи между системами будем использовать коэффициент корреляции приращений фаз $r = \frac{\langle(\Delta\phi_1 - w_1)(\Delta\phi_2 - w_2)\rangle}{\sigma_{\Delta\phi_1} \sigma_{\Delta\phi_2}}$, где $w_{1,2} = \langle\Delta\phi_{1,2}\rangle$ – математические ожидания приращений фаз, а $\sigma_{\Delta\phi_1}$, $\sigma_{\Delta\phi_2}$ – их стандартные отклонения. Для независимых друг от друга систем $r = 0$. При наличии связи r может принимать ненулевые значения вплоть до единицы. В качестве оценки величины r по временному ряду будем использовать выборочный коэффициент корреляции

$$\hat{r} = \frac{1/N^* \sum_{i=1}^{N^*} (\Delta\phi_1(t_i) - \hat{w}_1)(\Delta\phi_2(t_i) - \hat{w}_2)}{\hat{\sigma}_{\Delta\phi_1} \hat{\sigma}_{\Delta\phi_2}}, \quad (1)$$

где \hat{w}_1 , \hat{w}_2 – выборочные средние, $\hat{\sigma}_{\Delta\phi_1}$, $\hat{\sigma}_{\Delta\phi_2}$ – выборочные стандартные отклонения.

Чтобы выявить связь достоверно, нужно проверить, значимо ли отличается оценка \hat{r} от нуля. Дисперсия \hat{r} при условии, что приращения фаз распределены по нормальному закону или близко к нему, дается формулой Бартлетта [2], которая для несвязанных осцилляторов принимает вид

$\sigma_{\hat{r}}^2 = 1/N^* \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{\Delta\phi_1}(n\Delta t)_{\Delta\phi_2}(n\Delta t)$, где $c_{\Delta\phi_1}(n\Delta t)$, $c_{\Delta\phi_2}(n\Delta t)$ – автокорреляционные функции $\Delta\phi_1(t)$ и $\Delta\phi_2(t)$. Оценку дисперсии получим через выборочные оценки $\hat{c}_{\Delta\phi_1}$, $\hat{c}_{\Delta\phi_2}$: $\hat{\sigma}_{\hat{r}}^2 = 1/N^* \sum_{n=-N^*/4}^{N^*/4} \hat{c}_{\Delta\phi_1}(n\Delta t)\hat{c}_{\Delta\phi_2}(n\Delta t)$. Таким образом, 95%-ный доверительный интервал для величины r имеет вид $\hat{r} \pm 1.96\hat{\sigma}_{\hat{r}}$ и при анализе отдельного временного ряда вывод о наличии связи (положительный вывод) делается при $|\hat{r}| > 1.96\hat{\sigma}_{\hat{r}}$ с доверительной вероятностью 0.95 (на уровне значимости 0.05). Ниже представлен анализ работоспособности этого подхода: оценки вероятностей положительных выводов при отсутствии связи (это ложные выводы, вероятность которых должна быть не более 0.05) и при ее наличии (это правильные выводы, вероятность которых определяет чувствительность метода).

Методика исследования. Как эталонные системы, используются фазовые осцилляторы

$$\begin{aligned} d\phi_1/dt &= \omega_1 + k_{d,1} \sin(\phi_2 - \phi_1) + k_m \sin \phi_2 + \xi_1(t), \\ d\phi_2/dt &= \omega_2 + k_{d,2} \sin(\phi_1 - \phi_2) + k_m \sin \phi_1 + \xi_2(t), \end{aligned} \quad (2)$$

где ω_1 и ω_2 – угловые частоты, $k_{d,1}$, $k_{d,2}$ – коэффициенты «разностной» связи, k_m – коэффициент «модулирующей» связи, фазовые шумы ξ_1 и ξ_2 независимы друг от друга и имеют автокорреляционные функции $\langle \xi_k(t)\xi_k(t') \rangle = \sigma_{\xi_k}^2 \delta(t-t')$, $k = 1, 2$, δ – дельта-функция, $\sigma_{\xi_1}^2$ и $\sigma_{\xi_2}^2$ – интенсивности шумов. Рассматривалась связь только разностная ($k_m = 0$) или только модулирующая ($k_{d,1} = k_{d,2} = 0$). Разностная связь рассматривалась в форме симметричной ($k_{d,1} = k_{d,2} = k_d$) и «антисимметричной» ($k_{d,1} = -k_{d,2} = k_d$). Если в первом случае связь является синхронизирующей, то во втором она оказывается не синхронизирующей.

При каждом наборе параметров анализировался ансамбль из $M = 100$ пар временных рядов, которые получались путем интегрирования уравнений (2) методом Эйлера с шагом 0.01. Интервал выборки составлял 0.3 (20 точек на характерном периоде), длина ряда $N = 2000$ (примерно 100 характерных периодов). Результаты ниже представлены для величины τ , равной двум характерным периодам, но они схожи при любых τ , превышающих примерно четверть характерного периода. По каждой паре рядов рассчитывалась величина \hat{r} и делался или не делался вывод о наличии связи по критерию $|\hat{r}| > 1.96\hat{\sigma}_{\hat{r}}$. Подсчитывалась частота (оценка вероятности) положительных выводов f , т.е. доля временных рядов, для которых сделан вывод о наличии связи.

Результаты численного эксперимента. Рис. 1 представлен для набора параметров $\omega_1 = 1.1$, $\omega_2 = 0.9$, $\sigma_{\xi_1} = 0.2$, $\sigma_{\xi_2} = 0.1$ (неидентичные осцилляторы с умеренным уровнем шума) и свидетельствует о том, что предложенный метод работает корректно во всех рассмотренных ситуациях: он не дает частоты ошибочных выводов больше заявленного выше уровня значимости 0.05 (см. штриховые линии на рис. 1 при $k_d = 0$ или $k_m = 0$). Метод весьма чувствителен к разностной синхронизирующей связи: частота f велика уже при малых (по сравнению с величиной $(\omega_1 - \omega_2)/2 = 0.1$) значениях k_d и растет с ростом k_d (рис. 1, *a*). Еще более быстрый рост f наблюдается при разностной антисимметричной связи (рис. 1, *b*). К модулирующей связи чувствительность несколько ниже, но также достаточно высока (рис. 1, *c*).

Несколько неожиданные отрицательные корреляции r и немонотонность графиков на рис. 1, *a* для синхронизирующей разностной связи объясняется следующим образом. Заметим, что в первом и втором уравнениях системы (2) в правой части есть один и тот же член $k \sin(\phi_2 - \phi_1)$, но с разным знаком. Приращения фаз получаются интегрированием (2) на интервале τ , так что $v(t) \int_t^{t+\tau} k \sin(\phi_2(t') - \phi_1(t')) dt'$ является компонентой обоих приращений фаз. Таким образом, имеем $\Delta\phi_1(t) = \omega_1\tau + \varepsilon_1(t) + \eta(t)$ и $\Delta\phi_2(t) = \omega_2\tau + \varepsilon_2(t) - \eta(t)$, где $\varepsilon_1(t), \varepsilon_2(t)$ – интегралы от $\xi_1(t), \xi_2(t)$, т.е. независимые гауссовские процессы с нулевым средним. При малой связи $\varepsilon_k(t)$ и $\eta(t)$ можно считать почти независимыми друг от друга. Из-за наличия общей аддитивной компоненты $\eta(t)$ с разным знаком имеем отрицательную корреляцию r (рис. 1, *a*, малые связи). В режиме, близком к синхронизации, нарушается независимость $\varepsilon_k(t)$ и $\eta(t)$, а приращения фаз на одном и том же интервале времени почти равны друг другу, так что вели-

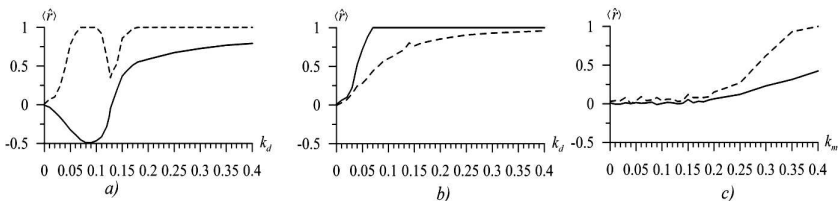


Рис. 1. Средние значения $\langle \hat{r} \rangle$ (сплошные линии) и частоты положительных выводов f (штриховые линии) рассчитанные по ансамблю из 100 временных рядов: *a*) разностная связь с $k_{d,1} = k_{d,2} = k_d$, *b*) разностная связь с $k_{d,1} = -k_{d,2} = k_d$, *c*) модулирующая связь при $k_m = 0$

чина r положительна и близка к единице (рис. 1, a , сильные связи). Поэтому r меняет знак с минуса на плюс по мере приближения к режиму синхронизации, а f имеет провал при промежуточных значениях k_d , когда график для r пересекает прямую $r = 0$.

В случае разностной антисимметричной связи общая компонента разностей фаз $\eta(t)$ входит с одним и тем же знаком и ведет к положительной корреляции и монотонному росту r и f (рис. 1, b).

Выводы. В работе предложен метод выявления связи между осцилляторами, который дает выводы с заданной доверительной вероятностью. Он основан на расчете корреляций между приращениями фаз колебаний. Метод прост в реализации и не требует большого объема вычислений, как известные подходы с построением суррогатных данных [3]. Метод применим в широком круге ситуаций – для различных видов связи, в отличие от широко используемой оценки коэффициента фазовой когерентности [4]. Поэтому он представляется полезным новым средством для исследования связей между колебательными системами различной природы по их временным рядам.

Работа поддержана грантами РФФИ (проекты 11-02-00599, 12-02-00377) и грантом Министерства образования и науки Российской Федерации (соглашение 14.В37.21.2016).

Библиографический список

1. Пиковский А.С., Розенблюм М.Г., Куртс Ю. // Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003.
2. Бокс Дж., Дженкинс Г. Анализ временных рядов. Прогноз и управление. М: Мир, 1974.
3. Смирнов Д.А., Сидак Е.В., Безручко Б.П. // Известия ВУЗов. Прикладная нелинейная динамика. 2008. Т. 16. №2.
4. Schelter B., Winterhalder M., Timmer J., Peifer M. // Phys. Lett. A, 2007. V. 366. P. 382-390.

Научный руководитель: *Безручко Б.П.*, д.ф.-м.н., профессор, заведующий кафедрой динамического моделирования и биомедицинской инженерии СГУ им. Н.Г. Чернышевского; *Смирнов Д.А.*, д.ф.-м. н., доцент, с.н.с. СФ ИРЭ имени В.А. Котельникова РАН.

ВЫЯВЛЕНИЕ КАЧЕСТВЕННОГО ИЗМЕНЕНИЯ ПОВЕДЕНИЯ СИСТЕМ ВО ВРЕМЕНИ РАЗЛИЧНЫМИ МЕРАМИ ПО ВРЕМЕННЫМ РЯДАМ В ПРИЛОЖЕНИИ К ОПРЕДЕЛЕНИЮ НАЧАЛА ЭПИЛЕПТИЧЕСКОГО ПРИПАДКА

Сысоева М.В., Сысоев И.В.,

Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского

Введение. Определение начала эпилептического разряда – важная задача при изучении эпилепсии, поскольку любые исследования природы эпилептического разряда, механизмах его возникновения, протекания и завершения так или иначе опираются на то, что возможно чётко разделить нормальную и эпилептиформную активность. Тем не менее, данная задача далека от окончательного решения, чему есть несколько причин. Во-первых, эпилептический разряд начинается не одновременно во всех областях мозга, причём время его распространения (генерализации) может составлять десятки и даже сотни миллисекунд; некоторые же области, например, затылочная кора головного мозга и гиппокамп либо вовсе не меняют своей динамики, либо вовлекаются в разряд слабо и только на поздних стадиях. Во-вторых, существующий способ разметки, когда началу разряда сопоставляется первый спайк в одном из отведений энцефалограммы, соответствующих теменной коре, имеет два ограничения: точность по времени ограничена длительностью периода колебаний (как правило, около 100 мс в начале разряда), выводы базируются на изменении формы сигнала, хотя вполне возможно, структурные изменения в динамике соответствующих областей мозга и связей между ними произошли ранее, но некоторое время система находилась вблизи старого состояния, ставшего неустойчивым [1].

На наш взгляд трудно рассчитывать на то, что точный ответ на вопрос, как определить начало эпилептического разряда, будет когда-либо получен, поскольку процесс возникновения и распространения разряда является распределённым как в пространстве, так и во времени. Тем не менее, продвинуться в данном направлении можно, если переформулировать задачу: вместо того, чтобы пытаться как можно точнее определить начало разряда, нужно понять, как соотносятся друг с другом различные способы диагностики начала разряда, какую информацию может дать каждый из них в отдельности и все они вместе. В данной работе ставится *цель* на осно-

ве анализа экспериментальных данных – внутричерепных электроэнцефалограмм крыс генетической линии Wag/Rij, являющихся моделями эпилепсии, провести сопоставление двух подходов к диагностике начала эпилептического разряда: спектрального анализа и метода нелинейной причинности по Грейнджеру.

Экспериментальные данные представляют собою 6 серий эпилептических разрядов по 8–20 разрядов в каждой, полученных от одного животного в результате 8 часов измерений с частотой 512 Гц. Разряды имеют длительность от 3 до 100 с, записывались 4 отведения, соответствующих гиппокампу (1), теменной (2), лобной (3) и затылочной (4) коре.

Методы

Метод нелинейной причинности по Грейнджеру – это подход к определению связанности между системами по их временным рядам на основе построения прогностических моделей. Вкратце метод сводится к следующему. Пусть есть временной ряд от системы $X - \{x_n\}_{n=1}^N$ и временной ряд системы $Y - \{y_n\}_{n=1}^N$, требуется определить, влияет ли система X на систему Y . Для этого строим индивидуальную прогностическую модель вида:

$$x'_{n+\tau} = f(x_n, x_{n-l}, \dots, x_{n-(D_s-1)l}), \quad (1)$$

где D_s – размерность восстановленного вектора состояния, l – временной лаг для построения вектора состояния, τ – дальность прогноза. Обозначим среднеквадратичную ошибку прогноза такой модели как ε_s^2 . Далее строится совместная модель, учитывающая значения из ряда $\{y_n\}_{n=1}^N$:

$$x''_{n+\tau} = g(x_n, x_{n-l}, \dots, x_{n-(D-1)l}, y_n, \dots, y_{n-(D_a-1)l}), \quad (2)$$

где D_a – размерность добавки. Среднеквадратичная ошибка прогноза совместной модели – ε_j^2 . Тогда можно построить меру вида:

$$PI = 1 - \varepsilon_j^2 / \varepsilon_s^2, \quad (3)$$

называемую *улучшением прогноза*, и характеризующую степень влияния системы Y на систему X .

В [2] было показано, что эффективность метода существенно зависит от того, как выбрать используемую модель: величины D_s , D_a , l , τ , вид аппроксимирующих функций f и g – в нашем случае, следуя [3], использовались степенные полиномы общего вида. Для экспериментальных данных

того же вида в работе [4] была предложена специализированная модель, более полно отражающая структуру экспериментального сигнала, которую мы используем в дальнейшем наряду со стандартными моделями вида (1,2).

Чтобы охарактеризовать начало разряда, модели строились в скользящем окне длиной в 1 с, таким образом оказалось возможным проследить изменение связей во времени с разрешением порядка длины окна.

Спектрограмма – способ оценки изменения спектра мощности сигнала во времени. Способ построения спектрограммы достаточно прост: исходный сигнал разделяется на окна длиной w точек со сдвигом p (при $p < w$ окна частично перекрываются). По каждому окну оценивается периодограмма, затем берётся её амплитуда и отображается интенсивностью цвета по вертикали, так делается для всех окон – номер окна, т.е. момент времени, откладывается по горизонтали. Спектрограмма может быть полезна для анализа изменений в энцефалограмме, поскольку позволяет наглядно увидеть, когда динамика становится регулярнее, что соответствует эпилептиформной активности.

Результаты и выводы. При использовании стандартной нелинейной модели с параметрами $D_s = 4$, $D_a = 2$, $P = 2$, подобранными с использованием критерия Шварца, методом причинности по Грейнджеру нам удалось пронаблюдать существенное возрастание связанности между отведениями во время разряда по сравнению с фоновой активностью. Данный результат в целом согласуется с полученными в [5]. В то же время, изменения происходят непосредственно в пределах временного окна, в котором строится модель, таким образом выявить изменения в активности мозга, вызванные перестройкой связей, заранее не удаётся (см. рис. 1).

Использование специализированной нелинейной модели, предложенной в [4], как это уже было сделано в [6] для других записей, с последующим усреднением результатов по разрядам позволяет выявить ситуации, когда воздействие кратковременно возрастает до разряда – зависимость улучшения прогноза от времени $PI(t)$ см. на рис. 2. Хотя данный подход также не позволяет для рассмотренных данных выявить изменения заранее, он хорош тем, что даёт возможность выявить изменение связей, ответственное именно за запуск разряда, а не за его поддержание.

Использование спектральных методов позволяет дополнить результаты анализа связанности. На рис. 3 показана спектрограмма одного из разрядов, на которой видно появление во всех отведениях периодической активности на частоте около 11 Гц и кратных частотах с началом разряда, причём частота эта постепенно уменьшается к концу разряда. При внимательном рассмотрении спектра фоновой активности заметно также, что данная ча-

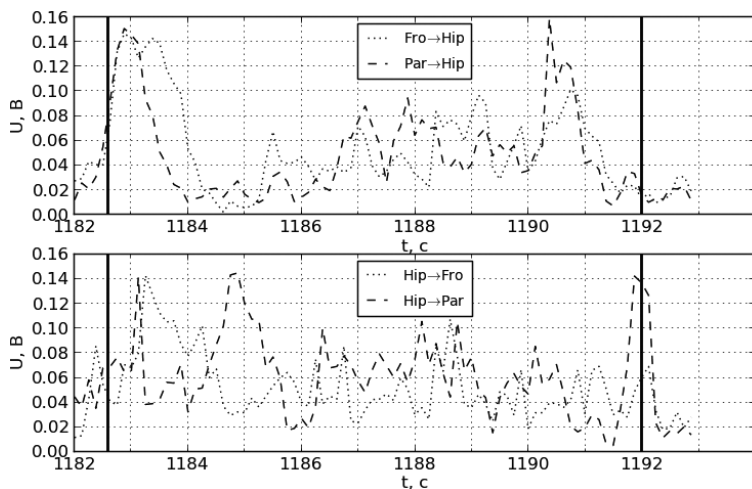


Рис. 1. Улучшение прогноза в зависимости от времени для отдельного разряда, рассчитанное с помощью модели с параметрами $D_s = 4$, $D_a = 2$, $P = 2$, $l = 1$, $\tau = 1$ по отдельному разряду. Границы начала и конца разряда отмечены чёрными вертикальными линиями

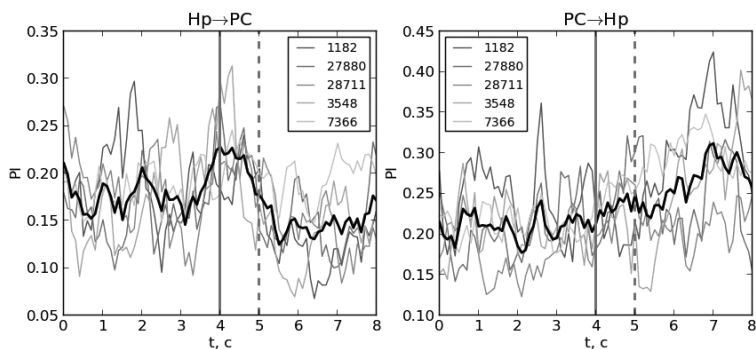


Рис. 2. Зависимость улучшения прогноза PI от времени для связей между гиппокампом и теменной корою в начале разряда. Все начала разрядов совмещены, исходные данные были сгруппированы по сериям, проведено усреднение по сериям отдельно (серые кривые), начало каждой серии в секундах отмечено в легенде, жирная чёрная кривая соответствует усреднению по всем разрядам. Вертикальные прямые обозначают: сплошная – конец разряда по разметке, пунктирная – длину окна от конца разряда

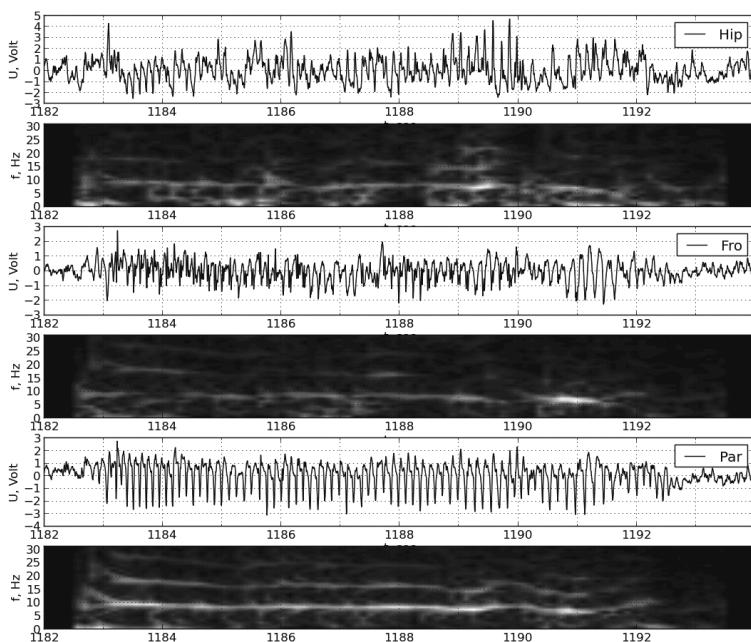


Рис. 3. Временные ряды и спектрограммы, построенные в окне длиной 1 с, для трёх каналов: «Hip» – гиппокамп, «Fro» – лобная кора, «Par» – височная кора

стога генерации выражена во 2 и 3 отведениях даже вне разряда, хотя её амплитуда существенно ниже, что позволяет предположить, что механизм запуска генерации разряда представляет собою либо возбуждение автоколебательной системы, находящейся до этого в подпороговом режиме и, либо синхронизацию этой системы внешним сигналом на близкой частоте с возбуждением резонанса.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 12-02-00377.

Библиографический список

1. B. Litt, R. Esteller, J. Echazu, M. D'Alessandro, R. Shor, T. Henry, P. Pennell, C. Epstein, R. Bakay, M. Dichter and G. Vachtsevanos. Epileptic Seizures May Begin Hours in Advance of Clinical Onset // *Neuron*, Volume 30, Issue 1, 51–64, 2001.

2. Сысоева М.В., Диканев Т.В., Сысоев И.В. Выбор временных масштабов при построении эмпирической модели // Изв. вузов «Прикладная нелинейная динамика», т. 20, № 2, 2012.
3. *Yonghong Chen, Govindan Rangarajan, Jianfeng Feng, Mingzhou Ding.* Analyzing Multiple Nonlinear Time Series with Extended Granger Causality. *Physics Letters A.* Volume 324, Issue 1, Pages 26–35.
4. М.В. Сысоева, И.В. Сысоев. Математическое моделирование динамики энцефалограммы во время эпилептического припадка // Письма в ЖТФ, 2012, том 38, выпуск 3. С. 103–110.
5. *Sitnikova E., Dikanev T., Smirnov D., Bezruchko B., van Luijteleaar G.* Granger causality: Cortico-thalamic interdependencies during absence seizures in WAG/Rij rats // *Journal of Neuroscience Methods.* 2008. V. 170. P. 245–254.
6. Сысоева М.В., Диканев Т.В., Сысоев И.В., Безручко Б.П. Анализ связей между отведениями электроэнцефалограмм крыс до и во время эпилептического припадка с помощью предсказательных моделей // Вестник ННГУ, Серия «Радиофизика», № 1(1). 2013, С. 7378.

Научный руководитель: В.И. Пономаренко, д.ф.-м.н., профессор базовой кафедры динамического моделирования и биомедицинской инженерии СГУ.

ОЦЕНКА СТЕПЕНИ ФАЗОВОЙ СИНХРОНИЗАЦИИ В РЕАЛЬНОМ ВРЕМЕНИ

*Боровкова Е.И., аспирант факультета нано-
и биомедицинских технологий СГУ
Фирсина П.С., студент 1 курса
Института физической культуры и спорта СГУ*

Введение

Ранее нами была разработана специализированная методика [1] количественной оценки степени фазовой синхронизованности, ориентированная на постобработку нестационарных нелинейных зашумленных временных рядов. Методика [1] была апробирована в натуральных и модельных экспериментах и показала высокую эффективность определения степени фазовой синхронизованности 0.1 Гц регуляторных подсистем сердечно-сосудистой системы (ССС).

Для внедрения разработанной методики в клиническую практику необходимо адаптировать разработанную методику [1] для работы в реальном времени на базе процессоров с целочисленной арифметикой, в условиях ограничения пропускной способности шины данных процессора, при обработке сигналов на сниженной частоте дискретизации.

Поэтому целью работы является разработка специализированной методики количественной оценки степени фазовой синхронизованности существенно нестационарных нелинейных зашумленных временных рядов в реальном времени.

Разработанный метод количественной оценки степени фазовой синхронизованности в реальном времени состоит из 4 последовательных этапов: фильтрация временных рядов, выделение мгновенных фаз исследуемых систем, автоматический поиск участков фазовой синхронизации по разности фаз и количественная оценка меры суммарного процента фазовой синхронизации S .

Фильтрация временных рядов

Спектральный анализ сигналов сложных систем позволяет выявить различные временные масштабы, в Фурье-спектрах таких сигналов хоро-

шо различимы характерные пики на различных частотах, обусловленные соответственно исследуемыми и посторонними флуктуациями, шумами и артефактами различной природы. Поэтому важным, нетривиальным и существенно влияющим на результат исследования является этап выделения исследуемых частотных составляющих сигналов из временных рядов.

Для выделения в реальном времени из экспериментальных сигналов исследуемых спектральных составляющих используется нерекурсивный цифровой фильтр с конечной импульсной характеристикой (КИХ-фильтр). Для 250 Гц сигнала с частотой 0.1 Гц выбран фильтр Блэкмана с полосой пропускания 0.06–0.14 Гц и длиной импульсной характеристики 10001 отсчет. Передаточная характеристика такого КИХ-фильтра, обеспечивает линейную фазо-частотную и прямоугольную амплитудно-частотную характеристику. В полосе подавления, на частотах ниже 0.08 Гц и выше 0.12 Гц, обеспечивается затухание сигнала не менее, чем на 20 Дб, при этом фильтр обладает достаточно высоким быстродействием и может быть реализован в реальном времени на базе микроконтроллера.

Выделение мгновенных фаз исследуемых систем

Разрабатываемая методика количественной оценки степени фазовой синхронизованности основана на анализе разности мгновенных фаз исследуемых сигналов, которая является весьма информативным источником динамики взаимодействия исследуемых систем. Однако мгновенную фазу аналитического сигнала, теоретически, можно ввести бесконечным числом способов [2]. Задача осложняется трудностью определения понятия фазы для биологических сигналов, демонстрирующих существенно нестационарную динамику, колебания которых имеют сложную форму и обладают широким спектром. Следовательно, выбор метода введения мгновенных фаз исследуемых сигналов существенно влияет на результат анализа синхронизованности и является важной задачей.

Для выделения в реальном времени сигналов мгновенных фаз выбран метод реализующий преобразование Гильберта в виде дискретного нерекурсивного цифрового КИХ-фильтра.

Проведен синтез и анализ КИХ-фильтра. В ходе синтеза рассчитан оптимальный для поставленной задачи набор значений коэффициентов фильтра. Аналитически импульсная характеристика h в дискретной форме вычисляется следующим образом:

$$h(n) = (1/\pi n t_s) [1 - \cos(w_s n t_s / 2)],$$

где n – дискретный индекс во временной области, f_s – частота дискретизации в отсчетах в секунду, t_s – период времени между отсчетами в секундах, $w_s = 2\pi f_s$ – круговая частота. Длина импульсной характеристики выбрана нечетной и равной 10001 отсчету.

Автоматический поиск участков фазовой синхронизации по разности фаз и количественная оценка меры суммарного процента фазовой синхронизации S

Разработанный метод диагностирует участки фазовой синхронизации в реальном времени по графику разности мгновенных фаз как области, на которых относительная фаза колеблется около некоторого постоянного значения.

Для автоматизации процедуры поиска в реальном времени участков синхронизации исследуемых колебательных процессов разработан алгоритм, основанный на линейной аппроксимации мгновенной разности фаз в скользящем окне. Метод состоит в следующем. В скользящем окне, имеющем ширину b , с помощью метода наименьших квадратов проводится линейная аппроксимация зависимости разности фаз. В результате, для момента времени t_i , соответствующего середине окна, получаем угловой коэффициент наклона аппроксимирующей прямой α_i . Сдвигая окно на одну точку вдоль временной реализации разности фаз, вычисляем угол наклона $\alpha_i + 1$ для момента времени $t_i + 1$ и т.д. Областям фазовой синхронизации, на которых зависимость разности фаз имеет почти горизонтальный вид, должны соответствовать участки с малым значением α . Введем пороговое значение коэффициента наклона α , равное $\pm a$, полагая, что синхронизация колебаний возможна лишь при $|\alpha| \leq |a|$. Будем также считать, что вторым необходимым условием синхронизации является достаточно большая протяженность области малых значений α . Ее длина должна быть не менее величины l .

Осуществлен подбор оптимальных параметров методики автоматического поиска участков фазовой синхронизации. Параметры выбирались методом перебора, в ходе которого визуально сравнивался результат оценки участков фазовой синхронизации 12 экспериментальных разностей фаз с помощью разработанной методики и результата поиска участков фазовой синхронизации с помощью эталонной методики, реализованной в [1].

По результатам сопоставления были выбраны следующие оптимальные значения параметров: $b = 40$ с, $|\alpha| = 0.02$, $l = 40$ с.

Тестирование метода

С помощью разработанного метода проведено исследование фазовой синхронизации подсистем вегетативной регуляции ритма сердца и барорефлекторной регуляции артериального давления, обуславливающих появление 0.1 Гц составляющей в кардиоинтерваллограмме (КИГ) и фотоплетизмограмме (ФПГ).

У 12 здоровых человек одновременно были зарегистрированы сигналы электрокардиограммы (ЭКГ), фотоплетизмограммы (ФПГ). Регистрация всех сигналов производилась с частотой дискретизации 250 Гц при разрешении 16 бит. Информацию о вариабельности сердечного ритма мы получали, выделяя из ЭКГ 5 Гц последовательность КИГ.

На рисунке 1 показана разность фаз сигналов, полученная с помощью эталонного (рис. 1, *а*) и разработанного (рис. 1, *б*) метода для испытуемого А. Серым цветом обозначены участки фазовой синхронизации. Значение *S* для разработанного метода 15%, эталонного метода 20%. Понижение значения *S* наблюдается у 12 испытуемых, что связано со спецификой методик обработки сигналов в реальном времени, с понижением частоты дискретизации и разрядности обрабатываемых временных рядов, но удовлетворяет требуемой точности количественной оценки синхронизованности $10 \pm 5\%$. Из рисунка видно, что области фазовой синхронизации, полученные с помо-

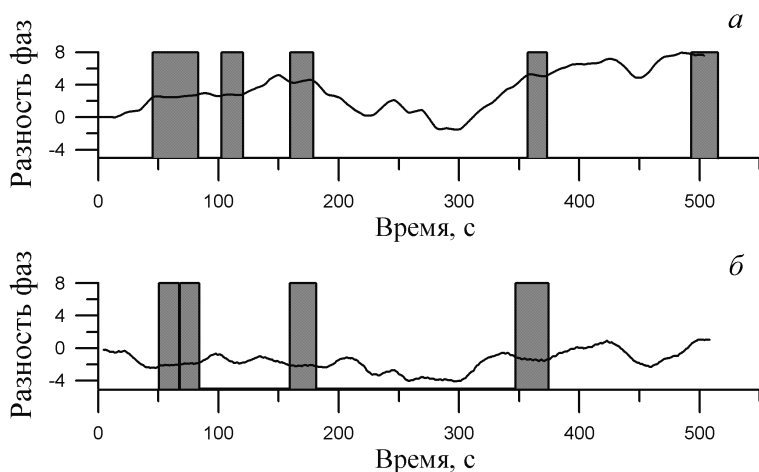


Рис. 1. Результат оценки разности фаз сигналов ФПГ и КИГ с помощью эталонного метода (*а*) и разработанного в ходе выполнения проекта метода (*б*)

щью постобработки временных рядов и моделирования обработки сигналов в реальном времени совпадают.

Проверка работоспособности разработанного метода в ходе анализа экспериментальных сигналов ЭКГ и ФПГ 12 человек продемонстрировала, что разработанный метод дает результат близкий к результатам, получаемым с помощью эталонного метода, реализованного в [1].

Вывод

Разработан метод количественной оценки степени фазовой синхронизованности нелинейных нестационарных зашумленных временных рядов в реальном времени, ориентированный на реализацию на базе микроконтроллера. Проведен синтез и анализ КИХ-фильтров для выделения исследуемых частотных составляющих и выделения мгновенных фаз исследуемых сигналов. Подобраны параметры метода автоматического поиска участков фазовой синхронизации.

Работоспособность метода продемонстрирована в натурном эксперименте. При экспериментальной проверке метода оценивалась степень фазовой синхронизованности между подсистемами нервной регуляции деятельности сердечно-сосудистой системы в ходе анализа временных реализаций электрокардиограммы и фотоплетизмограммы. Сопоставление результатов количественной оценки фазовой синхронизации, полученных с помощью разработанного и эталонного метода, показало работоспособность разработанного метода.

Работа поддержана грантом стипендия Президента РФ СП-3975.2013.4, грант Президента РФ МК-4435.2012.8, грант РФФИ № 12-02-00377.

Библиографический список

1. *Безручко Б.П. и др.* Методика исследования синхронизации колебательных процессов с частотой 0.1 Гц в сердечно-сосудистой системе человека // Изв. вузов. ПНД. 2009. Т. 17. № 6. С. 44–56.
2. *Хованова Н.А. и др.* Методы анализа временных рядов // Учебное пособие. Саратов: ГосУНЦ «Колледж». 2001. С. 120.

Научный руководитель: *Караваяев А.С.*, к.ф.-м.н., ассистент кафедры динамического моделирования и биомедицинской инженерии СГУ.

УСТРОЙСТВО ДЛЯ ДИАГНОСТИКИ СОСТОЯНИЯ СЕРДЕЧНО-СОСУДИСТОЙ СИСТЕМЫ НА ОСНОВЕ ОЦЕНКИ СТЕПЕНИ СИНХРОНИЗОВАННОСТИ ЕЕ РИТМОВ ПО УНИВАРИАНТНОМУ СИГНАЛУ ФОТОПЛЕТИЗМОГРАММЫ

*Кульминский Д.Д., студент 1 курса магистратуры ФНБМТ СГУ,
Астахов О.В., Боровкова Е.И., аспиранты ФНБМТ СГУ*

Заболевания сердечнососудистой системы (ССС) являются основной причиной смертности населения в большинстве стран мира и стали социально значимой проблемой. При этом повышение качества диагностики является одним из наиболее перспективных направлений улучшения ситуации. Поэтому разработка методик, направленных на получение любой дополнительной диагностической информации о состоянии подсистем ССС является актуальной и востребованной задачей.

Ранее нами, совместно со специалистами Саратовского НИИ кардиологии (СарНИИк), был разработан диагностический метод, в основе которого лежит расчет меры взаимодействия регуляторных подсистем ССС – суммарный процент фазовой синхронизованности – S . При его расчете анализируются спектральные составляющие с частотой около 0.1 Гц, выделенные из сигналов кардиоинтервалограммы и фотоплетизмограммы (ФПГ) [1]. В ходе клинических испытаний на базе СарНИИк была установлена высокая эффективность предложенного подхода для решения задач прогнозирования 5-летней выживаемости пациентов, перенесших острый инфаркт миокарда (ИМ), а также для индивидуального выбора медикаментозной терапии [2]. Предложенная методика была реализована в виде прикладного программного обеспечения (ПО), предназначенного для постобработки 10-минутных записей сигналов кардиоинтервалограммы и фотоплетизмограммы [3]

Однако, в ходе совместной работы с коллегами из СарНИИк, был сделан вывод о том, что, для получения важной дополнительной диагностической информации, необходимо длительное (суточное) мониторирование сигналов ССС. Разработка и создание экспериментального образца такого носимого малогабаритного мониторирующего устройства является целью работы.

Для уменьшения энергопотребления устройства, его массы и габаритов, упрощения технической реализации важно исследовать возможность

перехода на анализ унивариантных данных. То есть на использование для расчета S единственного сигнала фотоплетизмограммы (ФПГ) вместо двух сигналов: кардиоинтервалограммы (КИГ) – последовательности интервалов между R-зубцами электрокардиограммы (ЭКГ) и ФПГ, как предполагалось в исходном варианте метода.

Идея такого перехода заключается в том, что информация о моментах сердечных сокращений, необходимая для построения КИГ, может быть выделена не только из ЭКГ, но также из ФПГ.

Для исследования работоспособности подхода, основанного на анализе унивариантных данных ФПГ, проводилось сопоставление значений S , рассчитанных по 0.1 Гц составляющим ФПГ, а также КИГ, которая выделялась 2 способами: из ЭКГ, как было реализовано в методе [1] и из ФПГ. В ходе анализа 5 записей здоровых испытуемых, а также 5 записей больных, перенесших инфаркт миокарда, было показано, что разница значений S , рассчитанных по одновременным записям ФПГ и ЭКГ двумя указанными способами составила $\Delta S \pm \sigma S = 2\%$. По результатам таких исследований был сделан вывод о возможности анализа унивариантного сигнала ФПГ для диагностики синхронизованности регуляторных ритмов ССС, что было учтено при проектировании устройства.

Устройство включает следующие основные элементы: аналоговые цепи, обеспечивающие регистрацию, усиление и аналоговую фильтрацию ФПГ, SD-флеш-карта в качестве модуля энергонезависимой памяти, интерфейс с персональным компьютером (ПК), микроконтроллер, управляющий работой всех элементов устройства и оцифровывающий сигнал ФПГ с частотой 200 Гц и разрешением 8 бит с помощью встроенного аналого-цифрового преобразователя, цепи питания. Блок-схема устройства и фотография изготовленного экспериментального образца представлена на рис. 1.

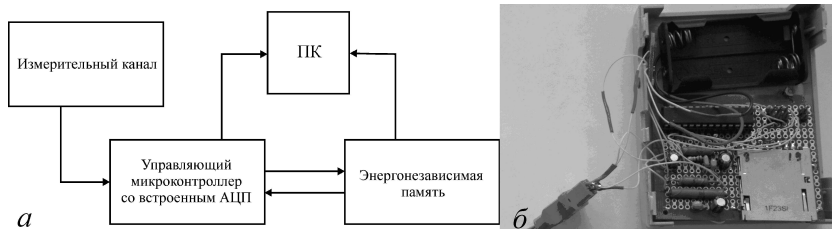


Рис. 1. (а) – Структурная схема мониторирующего устройства для диагностики. (б) – Фотография экспериментального образца изготовленного устройства

Электрическая принципиальная схема устройства представлена на рис. 2. В качестве датчика, регистрирующего пальцевую ФПП, используется специализированная транзисторная оптопара VU1, работающая на отраженном свете в ИК диапазоне. Сигнал с ее выхода усиливается с помощью неинвертирующего усилителя с коэффициентом усиления около 100, построенного на микросхеме AD1. На выходе усилителя полоса аналогового сигнала ограничивается противоположенным фильтром, собранным на элементах R7C6. Усилитель имеет униполярное питание, для его развязки с цифровой частью схемы используется LC-фильтр, собранный на элементах L2C3C4. Из измерительного канала сигнал поступает в управляющий микроконтроллер, собранный на микросхеме DD2. Используя внутренний АЦП контроллера, сигнал оцифровывается. Далее по интерфейсу SPI полученные данные записываются на устройство энергонезависимой памяти, в качестве которого используется SD-флеш карта. Соединение с ПК реализуется с помощью интерфейса RS 232 (Разъем X2). Блок питания собран на цифровой микросхеме DD1.

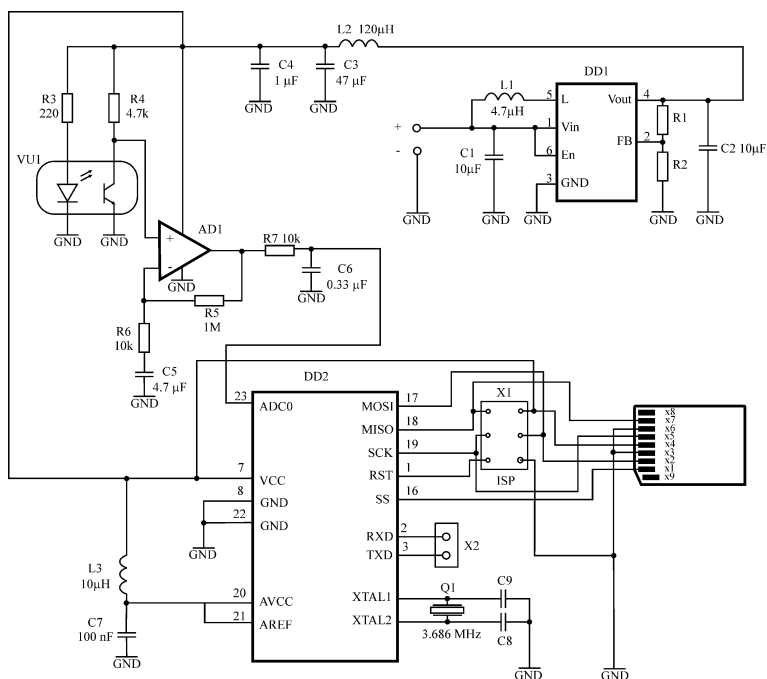


Рис. 2. Принципиальная электрическая схема мониторирующего устройства

Таким образом, в ходе выполнения работы была показана возможность использования для расчета предложенной ранее количественной меры степени фазовой синхронизованности регуляторных подсистем ССС единственного сигнала ФПГ, из которого выделяются ритмы исследуемых подсистем.

Был разработан и создан экспериментальный образец носимого малогабаритного устройства для длительной регистрации сигнала ФПГ, который позволит анализировать суточную динамику предложенного показателя синхронизованности. В ближайшее время планируется клиническая апробация устройства.

Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ МК-4435.2012.8, грантов РФФИ №13-02-00227 и №12-02-0037, стипендии Президента РФ СП-3975.2013.4.

Библиографический список

1. *Безручко Б.П. и др.* Методика исследования синхронизации колебательных процессов с частотой 0.1 Гц в сердечно-сосудистой системе человека // Изв. вузов. ПНД. 2009. Т. 17. № 6. С. 44–56.
2. *Кисилев А.Р. и др.* Возможности индивидуализации контроля эффективности гипотензивной терапии у пациентов с артериальной гипертонией на основе синхронизации 0.1 Гц-колебаний в сердечнососудистой системе человека // Сборник научных трудов «Медленные колебательные процессы в организме человека. Теоретические и прикладные аспекты нелинейной динамики в физиологии и медицине», Новокузнецк. 2011. С. 168–172.
3. Свидетельство об официальной регистрации программы для ЭВМ «Программа для исследования синхронизованности между ритмами сердечно-сосудистой системы человека с контролем статистической значимости (Синхрокард)» № 2008613908.

Научный руководитель: *Караваяев А.С.*, к.ф.-м. н., доцент кафедры динамического моделирования и биомедицинской инженерии ФНБМТ СГУ.

ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ТОКСИЧНОСТЬ СЕРЕБРЯНЫХ НАНОЧАСТИЦ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ В ЦИТОЛОГИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЯХ

*Букина О.Г., аспирантка ИБФРМ РАН
Прилепский А.Ю., аспирант ИБФРМ РАН*

Наряду с другими известными в нанотехнологии материалами нашли свое широкое применение и наночастицы благородных металлов – золота, серебра. Они стали наиболее «популярными» в качестве маркеров благодаря своим оптическим свойствам, например, возможности настройки спектрального положения и амплитуды плазмонного резонанса, что происходит вследствие изменения размера, формы, структуры частиц и их диэлектрического окружения. Наночастицы серебра представляют интерес для исследований вследствие смещения спектра рассеяния в сине-зеленую область (> 400 нм), что удобно для использования в световой микроскопии темного поля [1]. В связи с широким применением в промышленности серебра встает вопрос об экологической опасности этого тяжелого металла. В случае попадания в организм, наночастицы способны повреждать биомембраны, нарушать функции биомолекул, в том числе молекул генетического аппарата клетки и клеточных органелл (митохондрий), приводя к нарушению регуляторных процессов и гибели клетки. Механизм воздействия нанообъектов на живые структуры связан с образованием свободных радикалов. Эффект для организма животных проявляется в возникновении воспалительных процессов в отдельных органах и тканях и снижении иммунитета. Подтверждено, что токсичность зависит от концентрации наночастиц, их суммарной поверхности, а также среды, в которой они находятся, но не от полной массы и объема наночастиц [2]. Токсичность как правило возрастает с уменьшением размеров частиц. В литературе описано много опытов, показывающих цитотоксичность серебряных наночастиц [3]. Однако остается не вполне понятным, что является причиной токсичности коллоидного серебра (КС): сами наночастицы или ионы, ими высвобождаемые? Исследования показали, что в анаэробных условиях, которые препятствуют окислению $Ag(0)$ и высвобождению Ag^+ , сами наночастицы серебра не токсичны [4]. Также существуют исследования, показывающие, что токсичность наночастиц серебра проявля-

ется сильнее для патогенных клеток [5]. Ответ на этот вопрос крайне важен, так как в промышленности уже используются наночастицы серебра без достаточно полных данных об их действии и влиянии на окружающую среду.

Адаптационно выработанные системы защиты различны в зависимости от действия конкретного токсиканта. Токсичность серебра, как и других тяжелых металлов, связана в основном с ингибированием ферментов.

Системы защиты от неблагоприятных факторов во многом общие для всех живых организмов, поэтому в качестве модели мы выбрали одноклеточную микроводоросль *Dunaliella salina*, схожую с животными клетками отсутствием клеточной стенки. Также, зеленые растения удобны для изучения методами флуоресцентной и конфокальной лазерной сканирующей микроскопии вследствие автофлуоресценции хлорофилла.

Целью данной работы было выявление токсического действия КС на микроводоросль *Dunaliella salina* в сравнении с другими препаратами серебра, путем определения в качестве тестируемых параметров концентраций токсикантов, вызывающих половинную гибель (лизис) клеток (LC50) и половинное ингибирование скорости роста (IR50).

В качестве токсикантов использовали серебросодержащие препараты: КС, нитрат серебра и протеинат серебра.

Для определения токсичности материалов использовались 96 луночные планшеты с плоским дном, в которые первоначально вносились токсиканты в серии двукратных разведений за исключением последней лунки, которая оставлялась чистой для контроля. Каждый ряд триплицировали. На планшетном спектрофотометре в полосе светофильтра 690 нм записывали значения оптических плотностей. Далее во все лунки планшета вносили равные объемы суспензии микроводорослей. Снова записывали данные значений оптической плотности. Инкубировали в лабораторной факторостатной камере, представляющей собой прозрачную пластиковую кювету, расположенную над двумя параллельными люминесцентными лампами по 6 Вт длиной 27 см (WL-4002) на высоте 10 см. Измерения проводили через 24 часа трое суток.

Планшетный вариант измерения жизнеспособности микроводорослей по изменению оптической плотности суспензии в области красного максимума поглощения хлорофилла удобен вследствие того, что при повреждении мембран хлорофилл обесцвечивается, напротив, интактные клетки сохраняют окраску.

Флуоресцентные микроскопические наблюдения показали, что после 12-часовой инкубации с препаратом КС наблюдалось увеличение флу-

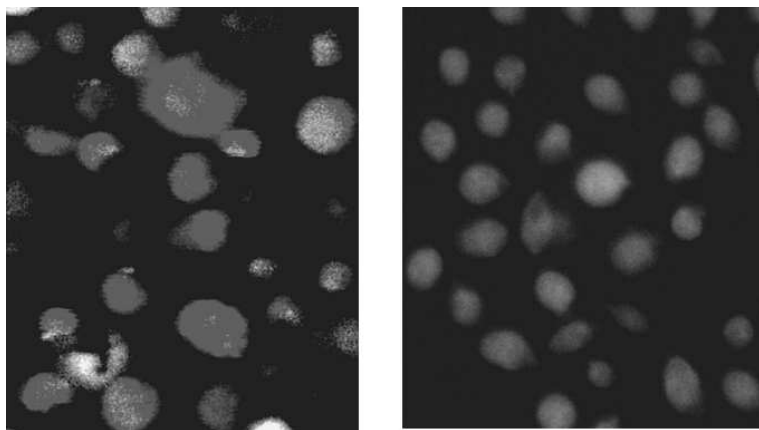


Рис. 1. Флуоресцентная световая микроскопия клеток водоросли: слева – клетки *Dunaliella Salina* (контроль), справа – клетки, инкубированные с КС

оресценции хлорофилла интактных (не поврежденных) клеток по сравнению с контролем, что косвенно свидетельствовало об угнетении фотосинтеза (рис. 1).

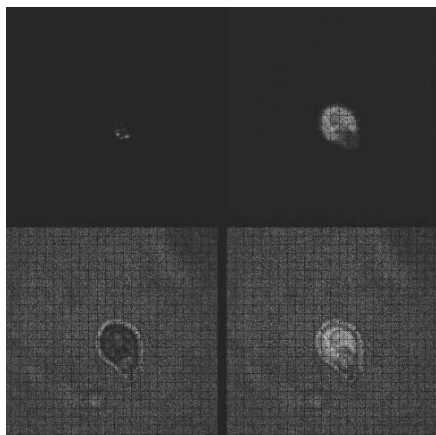


Рис. 2. Конфокальное изображение срединного среза клетки водоросли *Dunaliella Salina*. Микроскоп Leica TCS SP5, объектив HCX PL APO CS 63.0x1.40 OIL UV

Данные конфокальной микроскопии явно показывают, что клетки водоросли сохранили целостность, в препарате обнаружены наночастицы серебра, хлорофилл продолжает флуоресцировать. Также, на изображениях оптических срезов конфокального микроскопа видно, что наночастицы серебра находятся именно в клетке, а не рядом с ней. На рис. 2 приведен срединный срез клетки водоросли, полученный с помощью конфокальной микроскопии.

Из графика видно, что среди препаратов серебра наименьшим токсическим действием обладали наночастицы КС в сравнении с ионным серебром, используемым в виде нитрата серебра и протеинатом серебра.

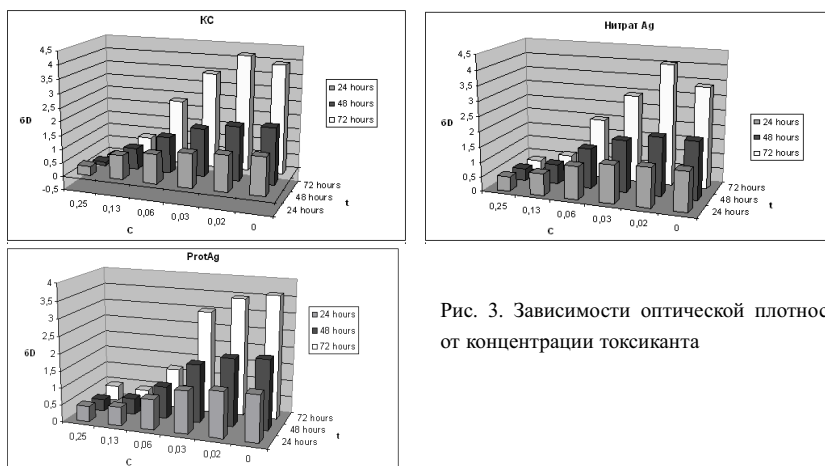


Рис. 3. Зависимости оптической плотности от концентрации токсиканта

LC50 и IR50 для препаратов серебра составили следующие значения:

KC: LC= 22.76 ± 7.10 мкг/мл; IR= 6.83 ± 0.22 мкг/мл;

AgNO₃: LC= 1.71 ± 0.27 мкг/мл; IR= 0.57 ± 0.07 мкг/мл;

ProtAg: LC= 2.14 ± 0.30 мкг/мл; IR= 0.78 ± 0.10 мкг/мл.

Таким образом, эксперимент показал, что потенциальная токсичность серебряных наночастиц оказалась реальной, но сравнимо меньшей, чем токсичность других используемых в опыте серебросодержащих материалов.

Библиографический список

1. Богатырев В.А. Коллоидное золото в световой микроскопии // Изв. вузов. ПНД. 2012. Т. 20. № 1. С. 39.
2. Данилов А. Дуализм наночастиц // Российские нанотехнологии. 2009. Т. 41. № 5. С. 20-21.
3. Kvittek L., Panacek A., Prucek R., Soukupova J., Vanickova M., Kolar M., Zboril R. Antibacterial activity and toxicity of silver – nanosilver versus ionic silver // J.Phys.: Conf.Ser. 2011. Vol. 304. No. 1. P. 012029.
4. Xiu Z., Zhang Q., Puppala H.L., Clvin V.L., Alvarez P.J.J. Negligible Particle-Specific Antibacterial Activity of Silver Nanoparticles // Nanoletters. 2012. 12 (8). PP. 4271-4275.
5. AshaRani P.V., Kah Mun G.L., Hande M.P., Valiyaveetil S. Cytotoxicity and Genotoxicity of Silver Nanoparticles in Human Cells // Am.Chem.Soc. 2009. V. 3. № 2. PP. 279-290.

Научный руководитель: Богатырев В.А., ФГБУН ИБФРМ РАН, профессор, в.н.с., с.н.с., д.б.н.; ФГБОУ ВПО СГУ им. Н.Г. Чернышевского, профессор.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТОКСИЧНОСТИ ПЛАЗМОННО-РЕЗОНАНСНЫХ МАТЕРИАЛОВ НА ОДНОКЛЕТОЧНОЙ ВОДОРОСЛИ

*Голубев А.А., студент 5 курса ФНП СГУ,
Прилепский А.Ю., аспирант ИБФРМ РАН*

Целью работы было создание точной лабораторной тест-системы оценки токсичности наноматериалов в зависимости от размеров, формы и поверхностной функционализации наночастиц.

Плазмонно-резонансные наноматериалы (ПРН) используются в нанобиотехнологии и в биомедицине, где они применяются для биоимиджинга и в тераностике (выявление и терапия раковых опухолей), благодаря возможности настройки спектрального положения и амплитуды плазмонного резонанса за счет изменения природы металла, размера, формы, структуры частиц и их диэлектрического окружения. Наибольшее распространение получили наночастицы коллоидного золота различных форм, размеров и поверхностной функционализации [1]. Предпочтение золоту отдается в связи с его наименьшей из известных наноматериалов собственной цитотоксичностью [2]. При синтезе ПРН зачастую используются вещества токсичные для человека и животных. Как правило, цитотоксичность обусловлена свойствами молекул покрытия, десорбирующихся с поверхности наночастиц [3].

Особый интерес для изучения представляют нанозвезды – частицы неправильной формы с большим количеством шиповидных выростов. Особенностью нанозвезд являются: высокая светимость, обусловленная светорассеянием, большая удельная поверхность и относительная простота и воспроизводимость синтеза. Благодаря большой удельной поверхности, нанозвезды позволяют доставлять большее количество молекул лекарственных препаратов, чем наночастицы других форм. Одним из наиболее распространенных способов синтеза нанозвезд является так называемый зародышевый метод «мягких матриц» с использованием цетилтриметиламмонийбромида (ЦТАБ) [4].

ЦТАБ и другие катионные ПАВ широко применяются в технологии синтеза золотых и серебряных плазмонно-резонансных наночастиц для придания несферической формы [5]. В водных суспензиях катионные ПАВ образуют на поверхности металлических мицелл двойной молекулярный слой,

плотность которого зависит от радиуса кривизны поверхности, что в большой степени и определяет условия анизотропного роста наночастиц. Известно, что при тщательной отмывке циклическим центрифугированием и редиспергированием в воде, токсическое действие наночастиц существенно снижается, вплоть до исчезновения [6].

Исследования на токсичность таких материалов проводят, как правило, на животных клетках. Общей для всех механизмов цитотоксического действия ЦТАБ является мембранная направленность, хотя механизмы действия и токсические величины могут быть различны для различных клеток и зависят, по всей видимости, от клеточной дифференциации. Однако отслеживание изменений в животных клетках сопряжено с рядом проблем биотехнологического характера. В связи с этим в качестве модельного объекта было решено использовать наименее дифференцированную культуру клеток, отличающуюся хорошо развитым мембранным аппаратом. В связи с этим была выбрана культура одноклеточных зеленых микроводорослей *Dunaliella salina* (рис. 1). Преимуществом этих клеток является отсутствие клеточной стенки, подвижность, флуоресценция хлорофилла и относительная простота культивирования [7].

В качестве тестируемых параметров были определены концентрации токсикантов, вызывающие половинную гибель (лизис) клеток (LC50). Обычно токсичность выражают в долях или процентах от контроля после определенного времени инкубации клеточной линии с токсикантом, стандартно, 24–72 ч.

Определение токсичности наноматериалов для микроводорослей *D. salina* проводили в культивационных 96 луночных планшетах с плоским дном. Первоначально в лунки вносили токсиканты в серии двукратных разведений культуральной средой. В последние лунки рядов токсикант не вносили и использовали в качестве отрицательного контроля. Каждый ряд триплицировали. Значения оптических плотностей в полосе фильтра 690 нм планшетного спектрофотометра записывали как бланк ($D(bl)$). Во все лунки планшета вносили равные объемы суспензии микроводорослей из накопительных культур. Объем вносимых водорослей варьировали в зависимости от



Рис. 1. *Dunaliella salina*

оптической плотности среды таким образом, чтобы поглощение на 690 нм составляло:

$$D(0) = D(m) - D(bl) \approx 0.1 - 0.2,$$

где индексы (0) и (m) обозначают время и «измеренная», соответственно. При объеме культуры 100 мкл $D \approx 1/10 OD$, где OD – оптическая плотность в 1 см кювете. Измеряли и записывали значения $D(0)$. Далее планшеты инкубировали в лабораторной факторостатной камере, представляющей собой прозрачную пластиковую кювету, заполненную дистиллированной водой на глубину ≈ 0.5 см, расположенную над двумя параллельными люминесцентными лампами мощностью по 6 Вт длиной 27 см на высоте 10 см. Измерения и запись данных проводили каждые 24 ч.

Планшетный вариант измерения жизнеспособности микроводорослей по изменению оптической плотности суспензии в области красного максимума поглощения хлорофилла удобен из нескольких соображений. Прежде всего, он позволяет избежать процедуры экстракции хлорофилла. Более того, при повреждении клеточных мембран хлорофилл, вытекая наружу, подвергается фотодеструкции и обесцвечивается.

Интактные клетки сохраняют свою окраску, что позволяет косвенно судить о количестве живых организмов и кинетике развития популяции. Результат гибели клеток проявляется через 24 ч наблюдений. В лунках, где произошла гибель клеток, взвесь обесцвечивается. Под микроскопом можно наблюдать вытекание внутриклеточного содержимого за видимые границы клеток и довольно быстрое выгорание красной флуоресценции.

Дальнейшую судьбу популяции выживших клеток удобно наблюдать, анализируя кривые изменения количества живых клеток, оцененного как $\delta D = D(t)/D(0)$, где t – время наблюдения.

На рис. 2 показаны зависимости относительного изменения оптической плотности на длине волны, близкой к одному из максимумов поглощения *Dunaliella*, от степени разведения концентрации токсиканта в лунке.

ЦТАБ 500 мкМ, золотые нанозвезды (НЗв) 100 нм (60 мкМ ЦТАБ) и их супернатант (sНЗв).

Таблица

Значения концентраций токсикантов, вызывающих половинную гибель клеток

Токсикант	Концентрация ЦТАБ (LC50), мкМ
НЗв	46.79 ± 1.24
sНЗв	18.93 ± 1.08
ЦТАБ	1.6 ± 0.79

Анализ схожих кривых позволил получить значения концентраций токсикантов вызывающих половинную гибель клеток (LC50) (см. Таблицу).

В результате проведенных исследований разработана диагностическая тест-система определения ток-

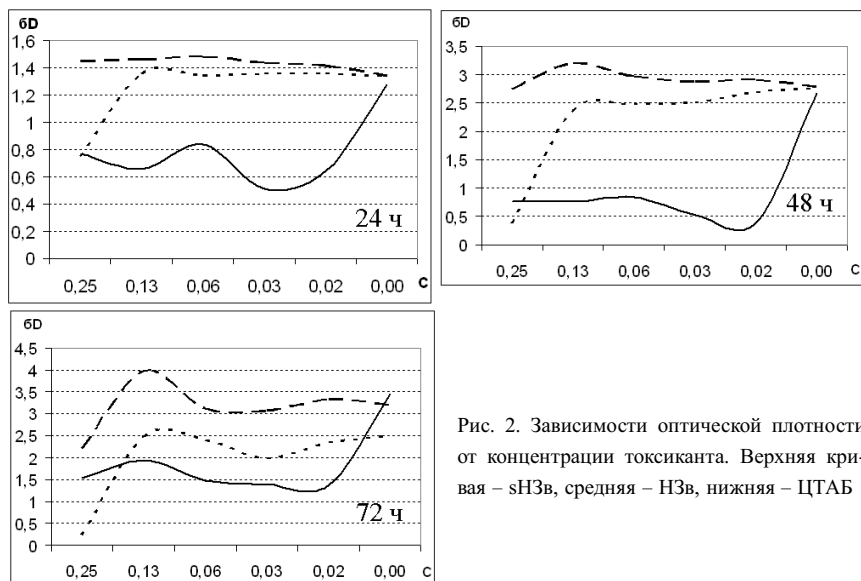


Рис. 2. Зависимости оптической плотности от концентрации токсиканта. Верхняя кривая – sНЗв, средняя – НЗв, нижняя – ЦТАБ

сичности наноматериалов для микроводоросли *D. salina*, основанная на колориметрических измерениях, позволяющая оценивать лизирующее действие токсикантов и замедление скорости роста культуры. Показано что препараты золотых нанозвезд, покрытых катионным детергентом ЦТАБ проявляют цитотоксичность отличную от раствора супернатанта и свободного ЦТАБ сравнимых концентраций.

Работа поддержана грантом РФФИ № 12-04-00629-а.

Библиографический список

1. Dykman L.A., Khlebtsov N.G. Gold nanoparticles in biomedical applications: recent advances and perspectives // Chem. Soc. Rev. 2012. V. 41. P. 2256-2282.
2. Khlebtsov N.G., Dykman L.A. Biodistribution and toxicity of engineered gold nanoparticles: A review of in vitro and in vivo studies // Chem. Soc. Rev. 2011. V. 40. No. 3. P. 1647-1671.
3. Alkilany A.M., Murphy C.J. Toxicity and cellular uptake of gold nanoparticles: what we have learned so far? // J. Nanopart. Res., 2010. V. 12. P. 2313-2333.

4. *Hutter E., Boridy S., Labrecque S., Lalancette-Hebert M., Kriz J., Winnik F.M., Maysinger D.* Microglial Response to Gold Nanoparticles//*AcsNANO* 2010. V. 4, N. 5, 2595–2606
5. *Kooij E.S., Ahmed W., Hellenthal C., Zandvliet H.J.W., Poelsema B.* From nanorods to nanostars: Tuning the optical properties of gold nanoparticles // *Colloids Surf. A*, 2012. V. 413. P. 231-238.
6. *Pissuwan D., Valenzuela S.M., Killingsworth M.C., Xu X., Cortie M.B.* Targeted destruction of murine macrophage cells with bioconjugated gold nanorods // *J. Nanopart. Res.*, 2007. V. 9. P. 1109-1124.
7. *Масюк Н.П.* Морфология, систематика, экология, географическое распространение рода *Dunaliella* Теод. и перспективы его практического использования // Киев: Наукова думка, 1973. 245 с.

Научный руководитель: *Богатырев В.А.*, ФГБУН ИБФРМ РАН, профессор, в.н.с., с.н.с., д.б.н.; ФГБОУ ВПО СГУ им. Н.Г. Чернышевского, профессор.

ПОВЫШЕНИЕ РЕЗКОСТИ ИЗОБРАЖЕНИЙ В ТЕНЕВОЙ ТОМОГРАФИЧЕСКОЙ МИКРОСКОПИИ МЕТОДОМ ПРЕДВАРИТЕЛЬНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ПРОЕКЦИЙ

Блюштейн Е.А., аспирант ФЭТиП СГТУ

Введение

Сканирующая оптическая микроскопия играет важную роль в современной науке, так как позволяет исследовать микроскопические объекты в оптическом диапазоне с разрешением порядка нескольких десятков нанометров, что значительно превосходит возможности классических оптических микроскопов.

Одним из видов сканирующих оптических микроскопов является теневой томографический микроскоп [1]. Он сочетает в себе целый ряд преимуществ, таких как разрешение, сравнимое с разрешением зондовых сканирующих микроскопов, простота конструкции (не требует наличия высокоточных и дорогостоящих зондов), и, как следствие, обладает относительно невысокой стоимостью. В то же время, возможности сканирующего оптического микроскопа не ограничены только лишь оптическим диапазоном, его конструкция потенциально позволяет использовать его, например, в ультрафиолетовом или рентгеновском диапазоне. Однако в отличие от зондовых сканирующих микроскопов томографический микроскоп для получения изображения требует специальной обработки отсканированных данных.

Принцип работы теневого томографического микроскопа

Процесс работы микроскопа можно условно разделить на два этапа: сканирование объекта и восстановление изображения. Конструкция микроскопа приведена на рис. 1. Как можно видеть, микроскоп включает источник зондирующего излучения оптического или рентгеновского диапазона, коллимирующую диафрагму для выделения параксиального пучка, сканирующий элемент (щель или нить), фотодетектор для измерения интегрального потока излучения, прошедшего через объект. В ходе работы микроскопа срез наблюдаемого объекта располагают непосредственно за сканирующим элементом, а сканирование среза выполняется тенью от сканирующего элемен-

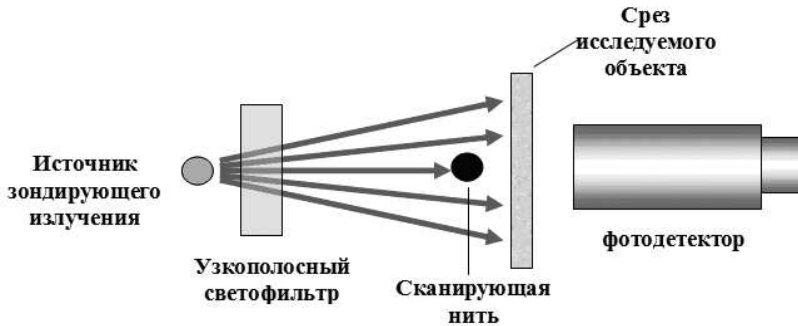


Рис. 1. Конструкция теневого томографического микроскопа

та, при перемещении последнего вдоль направления сканирования (вдоль данной проекции), с последующим изменением азимутального угла сканирования.

Этап сканирование объекта

Сканирование выполняется с помощью специализированного аппаратного обеспечения, основано на томографических принципах регистрации данных, заключается в получении множества одномерных проекций исследуемого объекта в виде (1).

$$R(r, \varphi) = \frac{\Phi_0}{S} \int_{\Omega} k^{r\varphi}(x, y) f(x, y) dx dy, \quad (1)$$

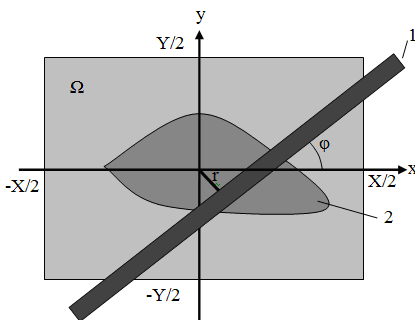


Рис. 2. Схема получения проекций с помощью теневого томографического микроскопа: 1 – сканирующая непрозрачная нить, 2 – плоский срез наблюдаемого объекта

где $f(x, y)$ – распределение оптической плотности исследуемого объекта $\Omega \subset R^2$, $x \in [-\frac{X}{2}, \frac{X}{2}]$, $y \in [-\frac{Y}{2}, \frac{Y}{2}]$ – область сканирования, Φ_0 – световой поток, проходящий через область Ω , без учета поглощения излучения сканирующим элементом и исследуемым объектом, $k^{r\varphi}(x, y)$ – распределение коэффициента поглощения излучения сканирующим элементом. В качестве сканирующего элемента используется круглая непрозрачная нить диаметром d . Схематично процесс сканирования изображен на рис. 2. В результате сканирования

объекта с помощью томографического микроскопа получается множество проекций объекта в виде (2).

$$\begin{aligned} \{R(r_i, \varphi_j)\}, \quad r_i = i\Delta r = i \frac{\sqrt{X^2 + Y^2}}{N}, \\ \varphi_j = j\Delta\varphi = j \frac{\pi}{M}, \quad i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, M, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\Delta r \ll b$.

Преобразование Радона для функции $f(x, y)$ выглядит следующим образом [2]:

$$\widehat{R}(r, \varphi) = \int_{\Omega_{R(r, \varphi)}} f(x, y) dx dy, \quad (3)$$

где область $\Omega_{R(r, \varphi)}$ представляет собой узкую полосу, составляющую с осью X угол φ , отстоящую от начала координат на r и имеющую ширину Δr . Нетрудно заметить, что формулы (1) и (3) похожи между собой, а при задании функции $k^{r\varphi}(x, y)$ в виде (4), они становятся тождественными с точностью до констант.

$$k^{r\varphi}(x, y) = \begin{cases} 1, & (x, y) \in \Omega_{R(r, \varphi)} \\ 0, & (x, y) \notin \Omega_{R(r, \varphi)} \end{cases} \quad (4)$$

Этап восстановления изображения

Второй этап работы микроскопа заключается в восстановлении функции $f(x, y)$ по известному набору проекций (2). Для решения этой задачи в вычислительной томографии обычно используются алгебраические итерационные методы [3]. Однако они имеют высокую вычислительную сложность и используют в процессе работы большие объемы памяти, что делает их практически непригодными для изображений с разрешением порядка $10^4 \times 10^4$ пикселей. В тоже время методы обращения преобразования Радона, экономно использующие память и процессорное время, хорошо известны [2–5]. Поэтому наиболее целесообразно осуществить переход от проекций в виде (1), к проекциям в виде (3). Между функциями (1) и (3) можно установить зависимость в виде (5).

$$R(r_i, \varphi_j) = \frac{\Phi_0}{S} \sum_{p=-\frac{P}{2}}^{\frac{P}{2}} \int_{\Omega_{R_{ip}}} k^{r_i \varphi_j}(x, y) f(x, y) dx dy = \frac{\Phi_0}{S} \sum_{p=-\frac{P}{2}}^{\frac{P}{2}} k(p\Delta r) \widehat{R}(r_{ip}, \varphi_j). \quad (5)$$

Здесь мы учитываем, что ввиду симметрии сканирующей нити функцию $k^{r\varphi}(x, y)$ можно переписать в виде $k(l)$, где l – расстояние от осевой линии нити. Функция $k(l)$ может быть рассчитана аналитически [6].

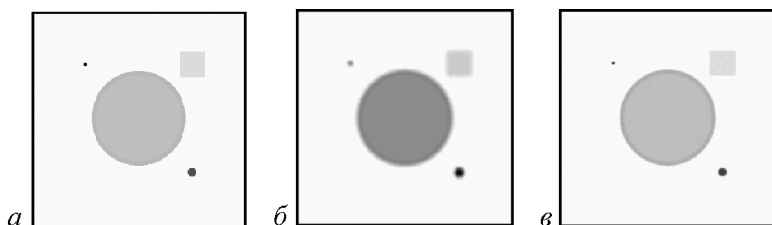


Рис. 3. *a* – тестовое изображение, *б* – изображение, восстановленное без учета дифракции, *в* – изображение, восстановленное с учетом дифракции

Записав уравнение (5) для каждого $i = 1, 2, \dots, N$ для каждого φ_j получаем записанное в дискретной форме уравнение Фредгольма первого рода, которое эффективно решается методом регуляризации Тихонова [7].

Результаты численных экспериментов по применению данного алгоритма на тестовом изображении представлены на рис. 3. Множество проекций вида (2) получено численным способом. Для обращения преобразования Радона был использован метод фильтрации и обратного проецирования [2]. Как видно из рисунка, предложенный алгоритм позволяет восстанавливать изображение достаточно близкое к оригиналу (рис. 3, в), в то время как непосредственное применение методов обращения преобразования Радона к проекциям вида (2) в результате дает сильно размытое изображение, что не позволяет добиться желаемого разрешения (рис. 3, б).

Библиографический список

1. *Danilova T.V., Volkov Y.P., Manturov A.O.* The resolution estimation of the edge scanning optical microscope, XV International school for junior scientists and students on optics, laser physics and Biophotonics «Saratov Fall meeting – SFM'11», 2011.
2. *Kak A., Slaney M.* Principles of computerized tomographic imaging. Society for Industrial Mathematics, 2001. 342 p.
3. *Губарени Н.М.* Вычислительные методы и алгоритмы малоракурсной компьютерной томографии. Киев: Наук. думка, 1997. 328 с.
4. *Наттерер Ф.* Математические аспекты компьютерной томографии. М.: Мир, 1990. 280 с.
5. *Хермен Г.* Восстановление изображений по проекциям. М.: Мир, 1983. 352 с.
6. *Кузусев А.М., Голубева Н.С.* Основы радиоэлектроники. М.: Энергия, 1969. 880 с.
7. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986.

Научный руководитель: *Мантуров А.О.*, к.ф.-м.н., доцент, СГТУ.

СТОХАСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РЕПЛИКАЦИИ ДНК

Григорьев А.В., аспирант 2 курса ИБС СГТУ
Мантуров А.О., к.ф.-м.н., доцент кафедры ИБС СГТУ

Важнейшим методом современных молекулярно-генетических исследований является полимеразная цепная реакция (ПЦР), в ходе которой при помощи молекулы ДНК-полимеразы создается копия исходной молекулы ДНК [1]. В ряде практических приложений ПЦР, в число которых входит проблема секвенирования последовательности ДНК [2], требуется знать динамические характеристики процесса копирования, а именно иметь возможность оценивать скорость копирования в зависимости от ряда параметров, определяющих ход реакции – концентраций рабочих растворов, характеристик используемой ДНК-полимеразы и др. В настоящей работе предложена математическая модель, позволяющая получить оценки некоторых характеристик процесса репликации ДНК.

Предлагаемая математическая модель описывает динамику собственно процесса копирования ДНК, при этом не учитываются определённые тонкие процессы, ответственные за создание репликационной вилки, деспирализацию ДНК и ряд других. Рассматривается непосредственно динамика процесса копирования, а именно передвижение молекулы полимеразы и прикрепления комплементарных нуклеиновых кислот из окружающего раствора. При этом будем предполагать, что молекулы нуклеиновых кислот доставляются до полимеразы случайным образом за счет теплового движения молекул в растворе.

Модель построена на базе модели клеточного автомата [3] и условно представлена на рис. 1. Как можно видеть, модель включает регулярную решетку ячеек, каждая из которых может находиться в одном из пяти состояний: содержать одну из нуклеиновых кислот: аденин (А), гуанин (Г), цитозин (С), тимин (Т) или не содержать нуклеиновую кислоту.

A	T	G	C	G	A	T	G	C	A	G	G
G	T	C	A	C	A	G	T	C	G	A	T
T	G	C	G	T	C	A	C	G	T	C	G
T	C	G	A	G	C	T	A	C	G	T	T
C	G	T	A	C	A	T	G	G	C	C	G

Рис. 1. Двумерная модель процесса копирования ДНК. По центру (выделена пунктиром) расположена собираемая ДНК-последовательность. Сборка ДНК-последовательности происходит слева направо. Сайт копирования обозначен сплошным квадратом (в данном случае ячейка содержит основание С). Фрагмент поля клеточного автомата имеет размер 12×5

Все действия модели выполняются пошагово, время, затраченное на каждый шаг, всегда одинаковое (в дальнейшем – один такт). За один такт высчитывается тепловое передвижение молекул по всему полю. Прикрепление нуклеиновой кислоты и движение полимеразы по ДНК происходит в течение одного такта.

Численный эксперимент по моделированию динамики репликации ДНК проводился следующим образом. Были взяты следующие исходные данные:

- произвольный участок длиной в 2000 нуклеиновых кислот из ДНК последовательности *Yersinia pestis* CO92 plasmid pCD1 [NC_003131] [4]
- поле клеточного автомата размером 100×2200 клеток
- использовано условие заполнения всех клеток: каждая клетка содержит основание (т.е., пустые клетки отсутствуют)
- концентрации оснований одинаковые (в дальнейшем, при изменении концентраций будем указывать доли обедненной кислоты на 100 долей каждой из обогащенной кислот).

Рассмотрим статистику движения ДНК-полимеразы, для чего определим интервалы времен, в течение которых ДНК-полимераза была неподвижна («статистика задержек»). Указанные времена требуются для подхода к полимеразе комплиментарной нуклеиновой кислоты. Сгруппируем данные по основаниям. По оси абсцисс будем откладывать время задержки, на ординате – количество задержек в эксперименте. Статистика задержек для одинаковой концентрации каждой кислоты представлена на рис. 2.

Из рис. 3 видно, что с уменьшением концентрации количество быстрых задержек снижается. Также начинают появляться длинные задержки (размер самой длинной задержки составляет 556 тактов).

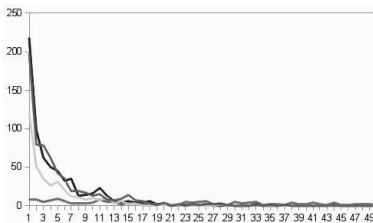


Рис. 2. Статистика задержек для одинаковой концентрации кислот (начальные данные для численного эксперимента аналогичны вышеприведенным)

Для определения порядка следования нуклеиновых кислот в ДНК последовательности (seq_i) необходимо определять задержки между перемещениями ДНК-полимеразы при низкой концентрации одной из нуклеиновых кислот в растворе. Задержки определяются для одной и той же ДНК несколько раз, в растворах с пониженной концентрацией каждой кислоты поочередно.

Далее, на основании полученных данных (задержкам в каждой

позиции $delay_i$) попытаемся определить, какая нуклеиновая кислота прикреплялась в каждой позиции. Для этого будем поочередно обеднять каждую нуклеиновую кислоту в растворе. С обеднением кислоты в растворе требуемое на ее прикрепление время увеличивается, следовательно, мы можем ввести некоторое пороговое значение ($threshold$) и считать, что в позициях с задержкой, больше пороговой, была прикреплена обедненная кислота. Но данное утверждение не позволяет однозначно определить все позиции (seq_i) в связи с тем, что прикрепление обедненного основания является случайным процессом, характеризующимся значением временных задержек. Для определения вида кислоты в позиции нам необходимо провести ряд экспериментов (K) и если хотя бы в одном из экспериментов в данной позиции величина задержки была выше пороговой, то тогда мы можем однозначно определить тип аминокислоты.

Так как мы уже знаем и величину задержек в каждой позиции, и искомую последовательность, то можем определить необходимую величину порога. Для удобства выберем определенную аминокислоту, Аденин (А). Так же введем две величины (ограничения сверху и снизу): $threshold_{max}$ – величина порога, при котором хотя бы в одном из экспериментов однозначно определяется тип кислоты и $threshold_{min}$ – величина порога, ниже которой величины задержек во всех экспериментах для других типов нуклеиновых кислот.

Далее проведем множественные эксперименты для разных значений концентраций и построим график зависимости величины ($threshold_{max} - threshold_{min}$) от K , где по оси абсцисс будем откладывать K – количество проведенных экспериментов.

Как видно из рис. 4, для меньшей концентрации кислот нам требуется меньше экспериментов для того, чтобы ширина порогового значения стала положительной. Чем больше ширина порогового значения, тем больше различных значений порога мы можем взять, чтобы однозначно

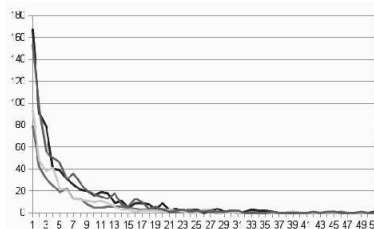


Рис. 3. Статистика задержек для 10 долей раствора одной из кислот (статистика обедненной кислоты указана красной линией)

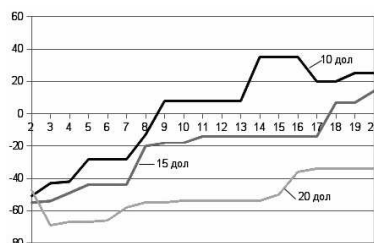


Рис. 4. Ширина порогового значения $threshold_{max} - threshold_{min}$

определить все типы кислот. Так как все величины получены при изучении случайных процессов присоединения нуклеиновых кислот, они не окончательны, и могут незначительно отличаться в последующих экспериментах. Поэтому нам необходимо выбирать такие значения концентрации и количества экспериментов K , чтобы ширина порогового значения позволяла в будущем однозначно определить искомую ДНК последовательность по вышеизложенной методике.

Библиографический список

1. *Фаворова О.О.* Сохранение ДНК в ряду поколений: Репликация ДНК. СОЖ, 1996.
2. *А.О. Мантуров и др.* Метод Акустического секвенирования фрагментов ДНК // Гетеромагнитная микроэлектроника. 2011. Вып. 9: Магнитоэлектроника. Микро- и наноструктуры. Прикладные аспекты. Проблемы физического образования. С. 121–125.
3. *Т. Тоффоли, Н. Марголус.* Машины клеточных автоматов, М.: «Мир», 1991.
4. http://brcdnloads.patricbrc.org/patric2/genomes/Yersinia_pestis_CO92/Yersinia_pestis_CO92.fna

МЕТОДЫ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ В ЗАДАЧЕ НАХОЖДЕНИЯ НАИБОЛЬШЕЙ ОБЩЕЙ ПОДПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Григорьев А.В., аспирант 2 курса ИБС СГТУ

Задача нахождения наибольшей общей подпоследовательности – задача поиска последовательности, которая является подпоследовательностью нескольких последовательностей (обычно двух). Часто задача определяется как поиск всех наибольших подпоследовательностей. Это классическая задача информатики, которая имеет приложения, в частности, в задаче сравнения текстовых файлов (утилита diff), а также в биоинформатике, называемая выравниванием ДНК последовательностей. В частности, одной из задач генетических исследований является поиск сходства структур известных ДНК последовательностей. Так как длины ДНК последовательностей достигают миллионов нуклеотидов, то нахождение выравнивания является весьма трудоемкой задачей.

Спектр задач, в которых требуется выполнять выравнивание, весьма обширен: реконструкция эволюции организмов, поиск активного центра, моделирование 3D структуры белка, выявление паттерна функциональных семейств и сигналов в ДНК и многие другие. Наконец, выравнивание ДНК начинает широко применяться при обработке результатов секвенирования.

Рассмотрим методы динамического программирования применительно к решению данной задачи, а именно алгоритм Ниделмана–Вунша [1]. Требуется найти максимальное вхождение одной последовательности ДНК в другую, длины последовательностей составляют n_1 и n_2 соответственно. Пусть уже существуют решения для всех подзадач (m_1, m_2) , меньших заданной, где m_1 и m_2 – длины последовательностей такие, что $0 \leq m_1 \leq n_1$ и $0 \leq m_2 \leq n_2$. Тогда задача (n_1, n_2) сводится к меньшим подзадачам следующим образом:

$$\text{substitute}(n_1, n_2) = \begin{cases} 0, & n_1 = 0 \vee n_2 = 0 \\ \text{substitute}(n_1 - 1, n_2 - 1) + 1, & s_1[n_1] = s_2[n_2] \\ \max(\text{substitute}(n_1 - 1, n_2), \text{substitute}(n_1, n_2 - 1)), & s_1[n_1] \neq s_2[n_2] \end{cases} \quad (1)$$

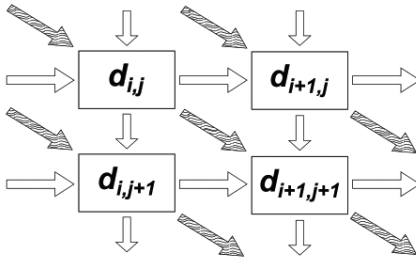


Рис. 1. Фрагмент матрицы M . переходы увеличивающие разрыв – белые стрелки; фактурные увеличивают длину общей подпоследовательности

В каждой ячейке $d_{i,j}$ матрицы M хранится длина наибольшей подпоследовательности, которую можно получить из первых i элементов первой и j элементов второй последовательностей. Метод Ниделмана–Вунша позволяет учитывать разрывы и сводить их к минимуму через введение функции штрафов $gap_penalty(g_j)$, которая задает размер штрафа за вставленный разрыв, где g – массив всех разрывов.

Эта функция вычисляется для всех разрывов в обоих строках выравнивания следующим образом:

$$gap_penalty(g_j) = costbegin + length(g_j) \cdot costextention \quad (2)$$

Здесь $costbegin$ – штраф за инициализацию разрыва, $costextention$ – штраф за удлинение на один символ, $length(g_j)$ – длина разрыва g_j .

С учетом штрафа за разрыв (1) принимает вид:

$$score(d_{i,j}) = \max \begin{cases} score(d_{i-1,j-1}) + substitute(d_{i,j}), \\ score(d_{i-1,j}) - gap_penalty(g), \\ score(d_{i,j-1}) - gap_penalty(g), \end{cases} \quad (3)$$

Далее выполняется прямой ход алгоритма – по формуле (3) рекуррентно заполняется матрица $score$, от первых элементов до последних. Таким образом, в каждой ячейке i, j матрицы M записывается самое лучшее решение подзадачи (m_i, m_j) . Затем производят обратный ход алгоритма: матрица M проходится от элемента n_1, n_2 к элементу $0, 0$. При обратном проходе восстанавливается искомое выравнивание.

Графически это можно изобразить в виде матрицы M (рис. 1), включающей в виде своих элементов i, j решения подзадач (i, j) . Стрелками на схеме указаны переходы между решениями подзадач. Фактурными стрелками обозначены переходы, при которых увеличивается длина общей подпоследовательности, белыми стрелками – переходы, при которых образуются или удлиняются разрывы одной из выравниваемых последовательностей.

Очевидно, что асимптотическая оценка времени работы алгоритма будет $O(n_1 \cdot n_2)$ [2], где n_1 и n_2 – длины последовательностей ДНК. Так как вся информация записывается в матрицу, то данный алгоритм будет занимать в памяти объем, равный $n_1 \cdot n_2$.

Когда мы говорим о полном выравнивании ДНК, то речь идет о последовательностях, длина которых исчисляется в миллионах аминокислот. Очевидно, что для работы алгоритма Ниделмана–Вунша потребуются колоссальные объемы памяти. Наиболее экономный по потребляемой памяти (будет занимать в памяти объем, равный n_i) – это алгоритм Миллера–Маерса [3]. Принцип его работы состоит в разбиении одной из последовательностей на две равные части (рис. 2 слева). Для каждой точки x линии раздела находим веса (по формуле (3)) оптимальных выравниваний из начала $(0, 0)$ в x и из конца (n_1, n_2) в x : $W^+(x)$, $W^-(x)$. Вес оптимального выравнивания, проходящего через точку x , равен: $W(x) = W^+(x) + W^-(x)$. Вес оптимального выравнивания равен $W = \max_x(W(x))$. Таким образом, мы нашли точку, чрез которую проходит оптимальное выравнивание.

Найденная точка x разбивает матрицу M на четыре квадранта (подматрицы матрицы M), два из которых заведомо не содержат оптимального выравнивания. Для двух квадрантов, содержащих оптимальный путь, можно применить тот же прием, и запомнить точки x' и x'' . Продолжая процедуру деления квадрантов пополам, найдем все точки, через которые проходит оптимальный путь (рис. 2 справа).

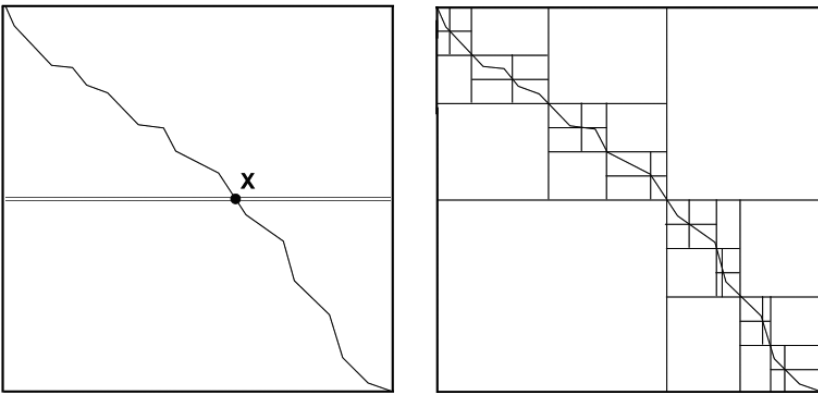


Рис. 2. Первый (слева) шаг для обчета квадранта матрицы M по методу Миллера–Маерса; справа приведен конечный результат применения алгоритма Миллера–Маерса

Данный метод позволяет существенно экономить память, но время вычисления увеличивается как минимум вдвое, так как за каждую последующую итерацию мы обчитываем половину площади предыдущей итерации. Также описанный выше метод хорошо подходит для выполнения на многопроцессорном суперкомпьютере, но на данный момент для параллельных вычислений все чаще начинают применять технологии вычисления на графических процессорах. Современные видеокарты почти не уступают суперкомпьютерам по скорости и количеству ядер, но у них есть один очень существенный недостаток: в графическом процессоре арифметические устройства группируются в блоки и все устройства, находящиеся в одном блоке, выполняют одну и ту же операцию [4]. Этот подход идеально применим для компьютерной графики, где надо обработать массив точек или выполнить операции над матрицами.

Метод Миллера–Маерса будет неоптимальным для выполнения на видеокарте. Мы можем запустить в 2 потока расчет одного квадранта: первый будет выполнять вычисления с начала, другой с конца матрицы M и все операции для расчетов будут идентичными. При параллельном вычислении нескольких квадрантов, мы сталкиваемся со следующей проблемой: имеются квадранты обычно разной размерности, и когда один квадрант уже был вычислен, то потоки будут вынуждены ждать обработки оставшихся квадрантов. Это понижает производительность всего алгоритма в целом. Необходимо распараллелить вычисление внутри одного квадранта. Это можно сделать, изменив порядок вычисления каждого элемента. Обычно предполагается последовательный алгоритм обчета матрицы M . Мы последовательно обходим матрицу по строчкам сверху вниз и по столбцам слева направо. В предлагаемом алгоритме будем осуществлять в матрице M независимое вычисление элементов, стоящих на линии, параллельной побочной диагонали матрицы. Соответственно, данный метод позволит вычислить матрицу за $2n - 1$ итераций, в отличие от классического метода, работающего за n^2 .

Благодаря дешевизне и быстрому качественному росту характеристик видеокарт, с их помощью начинают решать все больше задач. Структура процессора и схема управления в видеокарте отличается от обычного центрального процессора компьютера и это накладывает особые требования на алгоритм. Предложенный в работе подход позволяет наиболее полно использовать ресурсы видеокарты, чтобы повысить эффективность реализации уже известных и зарекомендовавших себя алгоритмов выравнивания

ДНК последовательностей имеющих большое значение в современной молекулярной генетике.

Работа поддержана грантом ФСР МФП НТС, проект «У.М.Н.И.К.», контракт № 20781.

Библиографический список

1. *S.B. Needleman and C.D. Wunsch.* A general method applicable to the search for similarities in the amino acid sequence of two proteins, *Journal of Molecular Biology*, 48 (1970) 443-453.
2. *Д. Грин, Д. Кнут.* Математические методы анализа алгоритмов. Пер. с англ. М.: Мир, 1987. 120 с.
3. *E.W. Meyers and W. Miller.* Optimal alignments in linear space, *Computer Applications in the Biosciences*, 4(1) (1988) 11-17.
4. *Jason Sanders, Edward Kandrot.* «CUDA by Example: An Introduction to General-Purpose GPU Programming» – Addison–Wesley Professional, 2010. 312.

Научный руководитель: *Мантуров А.О.*, к.ф.-м.н., доцент кафедры ИБС СГТУ.

Содержание

Рабочая программа	4
--------------------------------	---

Лекции

<i>Трубцеков Д.И.</i> Две лекции о двух путях истории симметрии	11
<i>Щеголев С.Ю.</i> Современные взгляды на эволюцию: о роли горизонтального переноса генов	53
<i>Иванченко М.В., Канаков О.И., Котельников Р.А., Крылов И.Б.</i> Нелинейная динамика синтетических сетей генной регуляции	93

Окно в науку

<i>Агеев Н.</i> «Колыбелька» Ньютона и её нестандартное поведение	118
<i>Исаев Д.</i> Компьютерная цветометрическая обработка изображений	122
<i>Куликов А.</i> Форма кривой вращающегося троса	126
<i>Макарова Н.</i> Маятник с прямолинейной траекторией	134
<i>Мартыненко А.</i> Водяной мостик	138
<i>Ростунцова А.А.</i> Кривые механического происхождения	143

Секция студентов, аспирантов и молодых ученых

<i>Балакин М.И.</i> Мультистабильные состояния в генераторе ван дер Поля с запаздыванием	148
<i>Гулай А.П.</i> Вынужденная синхронизация в системе связанных квазигармонических осцилляторов с асимметричной связью	152
<i>Павлов А.С.</i> Обобщенная синхронизация в случае воздействия хаотического сигнала на систему с периодической динамикой	156
<i>Ишбулатов Ю.М., Кульминский Д.Д.</i> Создание хаотического генератора с запаздыванием с квадратичной нелинейностью на базе микроконтроллера	160
<i>Бирюкова Н.И.</i> Изменение характеристик времен возврата Пуанкаре при воздействии шума	163
<i>Парамонов Ф.Б.</i> Влияние измерительного шума на определение связанности методом нелинейной причинности по Грейнджеру для систем с разным типом аттрактора	168

<i>Северюхина А.Н.</i> Применение методов сегментации для анализа динамической стационарности на примере временных рядов эталонных моделей.....	174
<i>Сидак Е.В.</i> Способ выявления связи между двумя колебательными системами с аналитической оценкой статистической значимости.....	179
<i>Сысоева М.В., Сысоев И.В.</i> Выявление качественного изменения поведения систем во времени различными мерами по временным рядам в приложении к определению начала эпилептического припадка.....	183
<i>Боровкова Е.И., Фирсина П.С.</i> Оценка степени фазовой синхронизации в реальном времени.....	189
<i>Кульминский Д.Д., Астахов О.В., Боровкова Е.И.</i> Устройство для диагностики состояния сердечно-сосудистой системы на основе оценки степени синхронизованности ее ритмов по унвариантному сигналу фотоплетизмограммы.....	194
<i>Букина О.Г., Прилепский А.Ю.</i> Потенциальная токсичность серебряных наночастиц при использовании в цитологических исследованиях.....	198
<i>Голубев А.А., Прилепский А.Ю.</i> Определение токсичности плазмонно-резонансных материалов на одноклеточной водоросли.....	202
<i>Блюштейн Е.А.</i> Повышение резкости изображений в теневой томографической микроскопии методом предварительной фильтрации проекций.....	207
<i>Григорьев А.В., Мантуров А.О.</i> Стохастическая модель репликации ДНК.....	211
<i>Григорьев А.В.</i> Методы нелинейного программирования в задаче нахождения наибольшей общей подпоследовательности.....	215

Для заметок

Для заметок

Научное издание

НЕЛИНЕЙНЫЕ ДНИ В САРАТОВЕ ДЛЯ МОЛОДЫХ – 2012

Материалы научной школы-конференции

Ответственный за выпуск профессор Ю.И. Лёвин

Компьютерный макет О.Н. Строгановой
Технический редактор Н.Н. Лёвина
Художник Д.В. Соколов

Подписано к печати 4.08.2014. Формат 60x84 1/16
Бумага Снегурочка. Гарнитура Таймс. Печать трафаретная
Усл. печ. л. 13,02(14,0). Уч.-изд. л. 13,0. Тираж 100 экз. Заказ 454

РИО журнала «Известия вузов. ПНД»
410012, Саратов, ул. Астраханская, 83

Отпечатано на Xerox CopyCentre/WorkCentre 118
РИО журнала «Известия вузов. ПНД»