

Незатейные
дни
в Саратове
для
молодых
2011



ФАКУЛЬТЕТ НЕЛИНЕЙНЫХ ПРОЦЕССОВ
САРАТОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА им. Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО
САРАТОВСКИЙ ИНСТИТУТ ПОВЫШЕНИЯ КВАЛИФИКАЦИИ
И ПЕРЕПОДГОТОВКИ РАБОТНИКОВ ОБРАЗОВАНИЯ
ПРИ ПОДДЕРЖКЕ ФОНДА ИННОВАЦИОННЫХ НАУЧНО-ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ
ПРОГРАММ «СОВРЕМЕННОЕ ЕСТЕСТВОЗНАНИЕ»

*75-летию со дня рождения
Юлия Александровича Данилова
посвящается*

Нелинейные дни в Саратове для молодых – 2011

25–28 октября, 15–16 ноября 2011

Материалы научной школы-конференции

Саратов, 2011

УДК 517.9; 530.1
ББК 22.311я43

Н 49 Нелинейные дни в Саратове для молодых – 2011: Сборник материалов научной школы-конференции. Саратов, 25–28 октября, 15–16 ноября, 2011. Саратов: ООО ИЦ «Наука», 2012. 124 с.
ISBN 978-59999-1187-2

В настоящий сборник включены материалы традиционной, девятнадцатой, школы-конференции по нелинейной динамике и нелинейной физике. Сборник будет интересен как для студентов и аспирантов, так и для преподавателей высших учебных заведений естественно-научных факультетов.

Под редакцией профессора Ю.И. Лёвина

УДК 517.9; 530.1
ББК 22.311я43

ISBN 978-59999-1187-2

© РИО журнала
«Изв.вузов. ПНД», 2012
© Д.В. Соколов, 2012

Организаторы

- Факультет нелинейных процессов Саратовского государственного университета им. Н.Г. Чернышевского
- Саратовский институт повышения квалификации и переподготовки работников образования
- при поддержке Фонда инновационных научно-образовательных программ «Современное естествознание»

Программный комитет

Трубецков Д.И., председатель, чл.-корр. РАН, заведующий кафедрой электроники, колебаний и волн ФНП СГУ

Лёвин Ю.И., зам. председателя, профессор, декан ФНП СГУ

Шараевский Ю.П., д.ф.-м.н., профессор, заведующий кафедрой нелинейной физики ФНП СГУ

Рыскин Н.М., д.ф.-м.н., профессор кафедры нелинейной физики ФНП СГУ

Савин А.В., к.ф.-м.н., доцент кафедры нелинейной физики ФНП СГУ

Оргкомитет

Трубецков Д.И., председатель, чл.-корр. РАН, заведующий кафедрой электроники, колебаний и волн ФНП СГУ

Лёвин Ю.И., зам. председателя, профессор, декан ФНП СГУ

Рыскин Н.М., д.ф.-м.н., профессор кафедры нелинейной физики ФНП СГУ

Савин А.В., к.ф.-м.н., доцент кафедры нелинейной физики ФНП СГУ

Марнопольская В.П., вед. программист ФНП СГУ

Савин Д.В., ассистент ФНП СГУ

Кузнецов Н.Н., вед. программист ФНП СГУ

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

Секция школьников

Саратов, пансионат «Кристалл», 25–28 октября 2011

25 октября, вторник

Открытие школы-конференции

Лекции

Трубецков Д.И., профессор, СГУ. Анализ размерностей, или райская жизнь в физике. Часть I

Храмов А.Е., профессор, СГУ. Самоорганизация и образование структур

Бегинин Е.Н., доцент, СГУ. Оружие – от стрелкового до электромагнитного

Круглый стол «Ю.А. Данилов и его удивительный мир»

26 октября, среда

Лекции

Трубецков Д.И., профессор, СГУ. Анализ размерностей, или райская жизнь в физике. Часть II

Гурия Г.Т., профессор, ФГБУ ГНЦ, Москва. Катастрофы и неустойчивости в динамике тубулированных нанотрубок

Кузнецов С.П., профессор, СФ ИРЭ РАН. Хаос

Лёвин Ю.И., профессор, СГУ. ФНП и нелинейная наука

Олимпиада

Разбор заданий олимпиады

27 октября, четверг

Доклады школьников

Куликов Александр, ЛПН, 10 класс. Параболическая потенциальная яма и критерии ее реализации в двумерных профилях

Твердохлебов Артем, ЛИЕН, 9 класс. Исследование лодки с МГД-двигателем

Мартыненко Андрей, ЛПН, 10 класс. Двумерный газ и его особенности

Лученкова Александра, ЛМИ, 10 класс. Модели теплового расширения

Азеев Николай, ЛПН, 10 класс. Опыт Ф. Боудена

Чекмарева Алия, ФТЛ № 1, 11 класс. Движение толпы

Животов Антон, ЛПН, 10 класс. Труба Рийке: воссоздание макета в ЛПН

Чеботарев Виктор, ЛИЕН, 10 класс. Автомат подачи звонков на базе персонального компьютера
Игнатъев Алексей, ЛПН, 10 класс. Компьютерное моделирование электростатического поля систем точечных зарядов
Батыр Егор, Гурченков Максим, ЛПН, 10 класс. Проблемы и возможные подходы к моделированию интеллекта (опыты программирования)

Лекции

Шараевский Ю.П., профессор СГУ. «Левые» среды
Савин А.В., доцент СГУ. Фракталы и их приложения

Академбой

28 октября, пятница

Лекции

Богатырев В.А., профессор, ИБФРМ РАН, Саратов. Коллоидное золото в световой микроскопии
Короновский А.А., профессор, СГУ. Нелинейная динамика общества
Заккрытие школы-конференции, награждение победителей олимпиады и авторов лучших докладов

Секция студентов

Саратовский университет, VIII корпус, 15–16 ноября 2011

15 ноября, вторник

Устные доклады

Секция «Нелинейные явления в радиофизике и электронике»

Фролов Н.С., ФНП, 5 курс. Нелинейная динамика двух однонаправленно связанных генераторов с виртуальным катодом
Бенедик А.И., ФНП, 4 курс. Компьютерное моделирование монотрона с автоэмиссионным катодом
Шешукова С.Е., аспирант ФНП. Исследование механизмов формирования солитонов огибающей в одномерном магнетонном кристалле (теория и эксперимент)
Краснова Г.М., аспирант ФНП. Современное состояние сверхвысокочастотных электронных приборов с управляемой эмиссией (обзор)
Емельянов В.В., аспирант ФНП. Компьютерное моделирование нестационарных процессов в клистроне-генераторе с запаздывающей обратной связью
Хренов Д.Н., аспирант ФНП. Взаимодействие электромагнитной волны с электронным потоком в СВЧ-лампах с поперечным током (обзор)

Секция «Нелинейная динамика»

Грубов В.В., ФНП, 5 курс. Выделение осцилляторных паттернов на ЭЭГ с использованием вейвлетного анализа

Круглов В.П., ФНП, 5 курс. Аттрактор типа Смейла–Вильямса в кольцевой системе с периодической модуляцией частоты

Хорев В.С., аспирант ФНБМТ. Оценка задержки в связи между генератором ван дер Поля и системой с запаздыванием по временным рядам

Кузнецов А.С., аспирант ФНП. Параметрические генераторы с хаотической амплитудной динамикой, отвечающей аттракторам типа Смейла–Вильямса

Корнилов М.В., аспирант ФНБМТ. Работоспособность метода нелинейной грейнджеровской причинности при использовании неадекватных моделей

Данилов Д.И., аспирант ФНП. Универсальная закономерность синхронизации основных спектральных компонент взаимодействующих осцилляторов

16 ноября, среда**Устные доклады****Секция «Нелинейная динамика»**

Журавлев М.О., аспирант ФНП. Исследование нового типа поведения «перемежаемость перемежаемостей» на примере однонаправленно связанных осцилляторов Рёсслера

Демина Н.В., ФНП, 5 курс. Численная симуляция схемы широкополосной передачи информации, основанной на синхронизации систем с гиперболическим хаосом

Передерий Ю.А., аспирант ФНП. Метод определения показателей Ляпунова хаотических систем по временной реализации

Балакин М.И., аспирант СГТУ. Мультистабильность и характерные колебательные режимы в генераторе ван дер Поля с запаздывающей обратной связью

Аржанухина Д.С., аспирант ФНП. О сценариях разрушения гиперболического хаоса в модельных отображениях на торе с диссипативным возмущением

Шурыгина С.А., аспирант ФНП. Обобщенная синхронизация в двух взаимно связанных системах

Чернышов Н.Ю., аспирант ФНП. Синхронизация возбуждаемых реактивно связанных осцилляторов

Садовников С.А., аспирант ФНП. Когерентный резонанс в каскадном клистронном автогенераторе на пороге самовозбуждения

Стендовая секция

- Адилова А.Б.*, ФНП, 3 курс. Динамика связанных дискретных осцилляторов Ресслера
- Аленькина А.С.*, ФНП, 4 курс. Пространственное развитие турбулентности в уравнении Гинзбурга–Ландау при абсолютной и конвективной неустойчивости
- Афанасьева Д.С.*, ФНП, 4 курс. Компьютерное моделирование двухпучковой неустойчивости
- Васильев А.А., Волощук С.С.*, ФНП, 4 курс. Сравнительный анализ трех моделей ЛОВ
- Дворак А.А.*, аспирант СГТУ. Возникновение квазипериодических колебаний и явление синхронизации в связанных осцилляторах Тоды с внешним гармоническим воздействием
- Дубинин А.С.*, ФНП, 4 курс. Разрыв линии перехода к хаосу в консервативно связанных отображениях Эно при изменении параметра диссипации
- Емельянова Ю.П.*, аспирант ФНП. Особенности синхронизации в модели неидентичных нефронов. Широкополосная синхронизация
- Капков С.В.*, магистрант СГТУ, *Аквкин Н.Г.*, аспирант СГТУ. Программно-аппаратный комплекс для автоматизированного построения карт динамических режимов нелинейных неавтономных осцилляторов
- Корчагин С.А.*, ФНП, 4 курс. Особенности натурального физического эксперимента с использованием ZET-технологии
- Макаров В.В.*, ФНП, 4 курс. Исследование возникновения хаотических режимов колебаний пространственного заряда в полупроводниковой сверхрешетке во внешнем резонаторе
- Максименко В.А.*, ФНП, 5 курс. Устойчивость динамических режимов и переход к генерации в полупроводниковой сверхрешетке
- Павлов А.С.*, аспирант ФНП. Взаимосвязь обобщенной и фазовой синхронизации в системе двух однонаправленно связанных хаотических осцилляторов
- Пармонов Ф.Б.*, ФНБМТ, 5 курс. Увеличение чувствительности метода нелинейной грейнджеровской причинности с ростом уровня внешнего измерительного шума
- Перегородова Е.Н.*, ФНП, 5 курс, *Усачева С.А.*, аспирант ФНП. К теории вынужденной синхронизации автомодуляционных колебаний
- Постнов Д.Д.*, физфак, 5 курс. БиоМод: программный комплекс для междисциплинарного обучения и исследований в области динамики физиологических процессов

Романенко Д.В., аспирант ФНП. Генерация хаотических импульсов на основе активной кольцевой системы с ферромагнитной пленкой

Садовников А.В., аспирант ФНП. Электродинамические характеристики периодических ферромагнитных структур

Сельский А.О., аспирант ФНП. Поведение старших резонансных пиков на зависимости дрейфовой скорости от величины электрического поля в полупроводниковой сверхрешетке в присутствии наклонного магнитного поля с ростом температуры

Старостин А.Н., *Кузьмина Е.В.*, магистранты СГТУ. Применение технологий распараллеливания вычислений в рамках теории Ми

Сысоева М.В., аспирант ФНБМТ. Оценка параметров модельных систем с запаздыванием с внешним периодическим воздействием

Терентюк А.Г., ФНП, 2 курс, *Бороздова М.*, физфак, 5 курс. Моделирование распространения электромагнитной волны в неоднородной нелинейной среде, содержащей электроны-осцилляторы

Фунтов А.А., ФНП, 3 курс. К вопросу о линейной теории электронно-волновой лампы (ЭВЛ)

Ланина М.С., ФНП, 3 курс. Магнитостатические волны в периодических ферромагнитных структурах

Каретникова Т.А., ФНП, 5 курс. Трехмерное моделирование электродинамических параметров, необходимых для расчета условий самовозбуждения спиральной неоднородной ЛБВ

НЕЛИНЕЙНЫЕ ЯВЛЕНИЯ*

*Лёвин Ю.И., профессор, декан ФНП СГУ,
заведующий кафедрой физики открытых систем*

Осенью 2011 года прошла очередная, 19-я по счету, традиционная научная школа-конференция «Нелинейные дни в Саратове для молодых». Организатором школы выступил факультет нелинейных процессов Саратовского государственного университета в сотрудничестве с Государственным автономным образовательным учреждением дополнительного профессионального образования «Саратовский институт повышения квалификации и переподготовки работников образования».

Школа прошла в два этапа. Первый этап, «секция школьников», проходил 24–28 октября для старшеклассников школ Саратова и Саратовской области в пансионате «Кристалл» при финансовой поддержке Фонда инновационных научно-образовательных программ «Современное естествознание». Второй этап, «секция студентов», проходил под руководством профессора СГУ Рыскина Н.М. 15–16 ноября для студентов и аспирантов Саратовского государственного университета при участии аспирантов СГТУ в 8 корпусе СГУ и обеспечивался факультетом нелинейных процессов.

Слушателями на «секции школьников» были учащиеся из школ Саратова, Балакова, Пугачева, Аркадака, Красноармейска, Аткарска, Энгельса, села Яблоневого Гая Ивантеевского района. Традиционно в работе школы принимали участие учителя из названных городов. Обсуждение проблем образования за круглым столом было полезным и для организаторов «Нелинейных дней», сотрудников высшей школы, и для учителей средней школы.

Школа 2011 года была посвящена памяти Юлия Александровича Данилова, математика, переводчика, профессора МГУ. В этом году ему исполнилось бы 75 лет. Он был почти на всех, за редким исключением, «детских» школах с момента, когда они стали называться «Нелинейными днями», до 2003 года – год смерти Ю.А. Данилова. Когда стоял выбор – Амстердам или Саратов, он, по его словам, предпочел Саратов. Юлий Александрович был неким аттрактором, который неудержимо притягивал к себе участников школы, – блестящие лекции, безукоризненная речь и манеры, захватывающие рассказы о науке, ученых и книгах, какая-то удивительная легкость общения. Юлий Александрович любил детей, и они платили ему тем же. Д.И. Трубецков, идеолог и непосредственный организатор школы,

* © «Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика», 2012, т. 20, № 1.

друг Ю.А. Данилова, в своих воспоминаниях писал: «Ушел из жизни человек, который светил людям, но не только светил – его свет был теплым, он грел. В терминологии Данина, Юлий Александрович – удивительное явление даже для “кентавристики”, поскольку в нем гармонично сочеталось много несочетаемого. По его собственной терминологии, он, несомненно, – “нелинейное явление”».

В одном из интервью в 1999 году Ю.А. Данилов сказал (точнее, так представил его слова журналист): «Научные школы для молодых, организованные в Саратове..., – явление уникальное. В мире нет ничего подобного или параллельного такой форме обучения, когда старшее поколение ученых читает лекции, а младшее делает научные доклады, проверяя себя на прочность. И все это происходит на фоне фантастического неформального общения». И далее Ю.А. Данилов подчеркнул, что суть такой неформальности прежде всего в деловитости, непринужденности и доброжелательности атмосферы. «Допустим, начинающий физик выступает с докладом. Он много работал, подготовил гладкий текст, сумел найти интересные, на его взгляд, решения каких-то задач... Вдруг он слышит, что в аудитории есть люди, которые решают все это влет! Докладчик, конечно, уничтожен. Но и суть таких школ-конференций в том, что человеку помогают сразу разобраться в проблеме, чтобы он не воспринимал критику как выстрел на поражение... Учиться, по большому счету, трудно. В науке важна начальная скорость... К тому же талант – нежный росток – растоптать совсем несложно... важно, чтобы кто-то вовремя подтолкнул на верное направление».

Обращу внимание еще на одни слова, высказанные Ю.А. Даниловым в интервью: «Мир-то красив. В науке есть, безусловно, эстетические стороны. И вот ведь что интересно: существует несомненная взаимосвязь между судьбой создателя научной идеи и судьбой самой идеи, хотя это могут быть совершенно разные, но параллельные судьбы. Хорошо, что программа «Нелинейных дней» включает страницы истории науки, куда вписаны и драмы идей, и человеческие драмы». Ярким примером могут служить лекции самого Ю.А. Данилова, в которых «страницы истории» являются непременным атрибутом, в которых судьбы Исаака Ньютона, Роберта Гука, Алана Тьюринга и других великих ученых тесно переплетаются с судьбами научных идей. Несомненно, к такому же типу относится большая часть лекций профессора Д.И. Трубецкова. Участникам одной из школ надолго запомнилась его лекция о творческом пути в науке Гельмгольца и наиболее ярких из решенных Гельмгольцем задач, лекция «1834 год». Сюда же можно отнести прочитанную на одной из школ лекцию профессора СГУ С.П. Кузнецова о треугольнике Паскаля и т.д. Страницы истории в полной мере были представлены в лекциях-беседах лауреата Государственной премии, д.ф.-м.н. Н.А. Ирисовой о судьбах московских физиков, о восьми Нобелевских лауреатах, с которыми она лично была знакома.

Школа «Нелинейные дни в Саратове для молодых», факультет нелинейных процессов – это далеко не полный список «нелинейных» свершений коллектива, который часто называют командой Трубецкова. Обращу внимание еще на два важных результата деятельности команды.

В 1992 году было открыто среднее учебное заведения для одаренных детей, окончивших 7 классов. Первоначально оно называлось Колледжем, а теперь это Лицей прикладных наук. В основу образовательных технологий, включающих в себя не только обучение, но и воспитание, положены идеи синергетики или нелинейной динамики. Главное направление – выявление общих закономерностей в разных дисциплинах, причем относящихся не только к естественно-научным, но и к другим, например, гуманитарным наукам, формирование в сознании учащихся единой картины мира и понимания того, что нельзя быть образованным физиком и считать, что Бунин современник Ньютона, или быть образованным филологом и не знать, почему Луна вращается вокруг Земли. В 1990-е годы З. Гельман писал статьи о созданной образовательной структуре под заголовками «Колледж, где физики изучают поэзию», «Итон открыт в “глубинке”». По его мнению, основная функция созданной структуры состоит «в создании соответствующей интеллектуальной и нравственной среды. Интеллектуалов могут воспитать только интеллектуалы. И нечего бояться корпоративного духа взаимопомощи и сотрудничества. Выпускники знаменитого Итонского колледжа в Англии... всю жизнь стараются с достоинством нести «звание итонца». А выпускники Царскосельского лицея... вообще считали себя братьями. А ведь среди них был А.С. Пушкин». Можно с уверенностью сказать, что выпускники Лицея прикладных наук гордятся своей школой. Лицей – это победы на олимпиадах самого высокого уровня, это высокий уровень образования, это 100% поступление в вузы Саратова, Москвы, Санкт-Петербурга, это неразрывная духовная связь лицеистов с учителями. Сегодня более 30 выпускников ЛПН кандидаты наук. Конечно, общая деградация образования за последние годы сказалась и на ЛПН. Тем не менее, Лицей прикладных наук живет и демонстрирует свою устойчивость.

С 1993 года выходит в свет научно-технический журнал «Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика», входящий в «Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук», составленный Высшей аттестационной комиссией. Журнал является научной трибуной нелинейного сообщества отечественных и зарубежных ученых. Академики РАН А.В. Гапонов-Грехов, В.Л. Гинзбург (лауреат Нобелевской премии), В.Е. Захаров так характеризовали журнал: «Издание журнала такого уровня укрепляет престиж отечественной науки и, несомненно, делает честь для Саратовского государственного университета».

Первый номер журнала 2012 года стал специальным выпуском, посвященным избранным материалам 19-й школы. В нем были опубликованы лекции приглашенных лекторов, которые вошли и в настоящий сборник. Двенадцать докладов участников «секции студентов», соответствующие научному направлению журнала, также опубликованы в спецвыпуске, и это не исключение. В журнале имеется раздел «Дебюты», где студенты, занимающиеся научной работой, могут публиковать свои статьи, получившие положительное заключение рецензента.

Отличительной чертой факультета нелинейных процессов является новая концепция образования, базирующаяся на идеях нелинейной динамики. Исследования в этой области науки в настоящее время приобретают конкретное значение, и от них подчас зависит не только развитие целых отраслей знаний, но и использование наукоемких и высокоточных технологий в самых различных областях человеческой деятельности. Используемые методы обучения позволяют получить междисциплинарные знания и подготовить специалистов, способных осуществлять моделирование и прогнозирование поведения сложных нелинейных систем и процессов в различных областях знаний, и быть по сути системными аналитиками. Широкое фундаментальное образование совместно с углубленным изучением иностранных языков, новых информационных и компьютерных технологий, системных подходов к решению практических задач готовят выпускника не только к научной деятельности. Объем знаний и навыков, которыми обладает выпускник факультета нелинейных процессов, дает возможность эффективно работать в различных областях производства и бизнеса, при необходимости гибко адаптироваться в изменяющихся условиях рыночных отношений. Некоторые участники предыдущих школ «Нелинейные дни» стали студентами, а иные уже закончили ФНП и успешно работают.

Девятнадцатая школа-конференция «Нелинейные дни в Саратове для молодых – 2011» закончилась, а в ноябре 2011 года уже стали появляться заявки на следующую школу. Нелинейные дни, месяцы, годы продолжаются...

ДВЕ ЛЕКЦИИ. АНАЛИЗ РАЗМЕРНОСТЕЙ ИЛИ РАЙСКАЯ ЖИЗНЬ В ФИЗИКЕ*

*Трубецков Д.И., чл.-корр. РАН, заведующий кафедрой
электроники, колебаний и волн ФНП СГУ*

Введение

Лекции посвящены, как следует из названия, анализу размерностей и его применению в физике. Вторая часть названия заимствована из статьи В. Вайскопфа «Современная физика в элементарном изложении», который писал:

«...Я буду вычислять только порядки физических величин. Используемый в расчетах знак равенства поэтому будет означать вовсе не “равно”, а “такого порядка величины”. Численными множителями, например, 2π и т.д. я буду пренебрегать. Райская жизнь!».

В его слова включается метод оценок (в большей степени) и анализ размерностей, о чем мы и будем говорить.

Тому же Вайскопфу принадлежит статья об удивительной эффективности математики в физике (замечу, что не только в физике). Мы привыкли к чуду абстрактных чисел, например, к их сложению: когда числа абстрактные, то все равно, что складывается, фрукты или галоши. Но ситуация меняется, если вы знаете, к какому объекту относится число. Вспомним детские стишки: «И вышло у меня в ответе два землекопа и две трети». В данной конкретной ситуации число $2\frac{2}{3}$ недопустимо, хотя в арифметике – допустимо.

Естественный вопрос: «Если мы имеем дело с размерными величинами, то что делать? И вообще, есть ли какая-нибудь наука на сей счет»? Да, есть, и ее называют анализом размерности или теорией размерности. Наука небольшая, но ее и возможные ошибки из-за ее неумелого использования должен знать, по-моему, любой школьник, изучающий естественные науки.

О предсказаниях и моделях

В основе теории любого процесса или явления лежит модель, справедливая лишь в определенных пределах. В каких именно, мы узнаем чаще всего тогда, когда она перестает описывать реальность. Нужно либо поправлять модель, либо искать новую. В этот период ломки модели и важна

* © «Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика», 2012, т. 20, № 1.

теория размерности. Чем бы вы ни занимались – теорией или экспериментом, важно не только поставить задачу (создать теоретическую модель или придумать постановку эксперимента), но и попробовать представить себе, что должно получиться в результате вашей работы. Вот несколько мнений на эту тему.

Английский физик-экспериментатор Г. Липсон пишет: «Находятся люди, которые считают, что у ученого не должно быть никакой предвзятой идеи относительно исхода его эксперимента; ученый – говорят они – должен быть совершенно объективным. Это вздор. Настоящий ученый почти всегда ставит эксперименты с целью проверить ожидаемые результаты. Он испытывает удовольствие, обнаружив то, что ожидал, и разочарование, когда результаты эксперимента не совпадают с ожидаемыми. Если же ученый ничего не ожидает получить, то он не может быть вполне уверен в значимости своих результатов».

А вот мнение выдающегося ученого и педагога Джона Уилера – учителя Ричарда Фейнмана, которое получило название «правило Уилера»: «Никогда не начинай вычислений, пока не знаешь ответа. Каждому вычислению предпосылай оценочный расчет: привлеки простые физические соображения (симметрию! инвариантность! сохранение!) до того, как начинать подробный вывод; продумай возможные ответы на каждую загадку. Будь смелее: ведь никому нет дела до того, что именно ты предположил. Поэтому делай предположения быстро, интуитивно. Удачные предположения укрепляют эту интуицию. Ошибочные предположения дают полезную встряску».

Повторюсь, что тому, кому придется серьезно заниматься физикой, нужно прежде всего научиться делать оценки, которые часто подсказывают и сам путь более точного решения задачи. Именно это помогает делать анализ размерностей – самый распространенный метод физических оценок. По мнению одного из самых выдающихся физиков XX столетия Энрико Ферми, «в физике нет места для путаных мыслей... действительно понимающие природу того или иного явления должны получать основные законы из соображений размерности».

А что значит – понимать природу того или иного явления? Это означает – создать его модель.

Модель (от лат. *modulus* – мера, образец, норма) – в широком смысле в науке – аналог, «заместитель» оригинала (фрагмента действительности), который при определенных условиях воспроизводит интересующие исследователя свойства оригинала. Модель – карикатура на изучаемое явление, но зато одну и ту же модель можно использовать для описания широкого круга явлений. Иногда модели рассматривают как «картины», соотносящиеся с чем-то.

Академик Н.Н. Моисеев считал, что модель можно рассматривать как специальную форму кодирования информации, причем модель кодирует ту

информацию, которую люди раньше не знали. В этом заключена предсказательная способность модели.

Создание модели – главный момент исследований с помощью анализа размерностей.

Основные определения теории размерностей

1. *Выражение единиц измерения произвольной физической величины через единицы измерения величин, принятых за основные, называется размерностью.*
2. *Размерность любой физической величины может быть только произведением возведенных в степень величин, принятых за основные.*
3. *Размерности обеих частей равенства, выражающего некоторую физическую закономерность, должны быть одинаковы.*
4. *Безразмерные комплексы размерных величин, представляющие собой произведение различных степеней этих величин, называются критериями подобия; их обычно обозначают как $\Pi = idem$.*

В этих достаточно прозрачных определениях неясным остается одно: какие величины принять за основные. Дадим ответ на этот вопрос.

Когда-то не считалось неудобным, что разные длины измерялись по-разному. Вот, к примеру, старорусские меры длины:

1 вершок –	4.445 см,
1 аршин – 16 вершков –	0.7112 м,
1 сажень – 3 аршина –	2.1336 м,
1 верста – 500 саженей –	1.0668 км,
1 десятина –	10.954 км ² .

И только во времена Великой французской революции была разработана и принята метрическая система мер. Первый эталон метра – доля длины парижского меридиана, равного $40 \cdot 10^6$ м.* Измерение меридиана, необходимое для создания метрической системы, велось с восьмидесятых годов восемнадцатого века и длилось много лет. Самой яркой фигурой в этой измерительной эпопее был, несомненно, французский ученый и человек удивительной судьбы Доминик Франсуа Араго. В замечательной книге Даниила Александровича Гранина «Сад камней»** есть «Повесть об одном ученом

*В настоящее время метр есть длина, равная 1650763.73 длины волны (в вакууме) излучения, соответствующего переходу между уровнями $2p_{10}$ и $5d_5$ атома криптона-86. До 1960 года за метр было принято расстояние между двумя штрихами, нанесенными на платиноиридиевом стержне, который находился в Международном бюро мер и весов в Севре, близ Парижа.

**Гранин Д.А. Сад камней. М.: Современник, 1972, с. 125–177.

и одним императоре», посвященная Араго. Начинается она так: «Имя Араго хранилось в моей памяти со школьных лет. Щетина железных опилок вздрагивала, ершилась вокруг проводника... Стрелка намагничивалась внутри соленоида. Красивые, похожие на фокусы опыты, описанные во всех учебниках...».

Думаю, что и вы помните эти опыты.

Но в жизни Араго кроме науки были переодевания, побеги, рабство, пираты... По Гранину, Араго – «...молодой француз, немножко д'Артаньян, немножко хитроумный Одиссей, влюбчивый, неприступный, любознательный и легкомысленный...», благополучно выходящий из самых невероятных ситуаций. Я не могу и не хочу пересказывать повесть. Прочитайте ее. Еще только одна цитата из повести Гранина, имеющая отношение к нашей теме.

«У меридиана были свои законы. Участок, измеренный Лакайлем, давно слился с отрезком, измеренным Кассини, а тот – с отрезком, измеренным Мешеном, теперь к ним добавится дуга, измеренная Араго.

На меридиане не пишут имен, на нем не будут обозначены три года жизни Араго, его скитания, свист пуль, чума, там будут лишь градусы, минуты, секунды».

Наряду с единицей длины была введена и единица измерения времени – секунда* – доля звездного (сидерического) года, который равен $3.1557 \cdot 10^7$ с. Метра и секунды оказалось достаточно, чтобы измерять то, что называют пространством-временем. Следовательно, кинематика по сути дела совпадает с геометрией пространства-времени. Напомню, что в школьных учебниках кинематику определяют как раздел физики, в котором изучается механическое движение тел без выяснения причин, вызвавших это движение. Если есть взаимодействие тел, то это уже динамика, и для изучения ее законов необходимо ввести понятие силы, а также связать силу, действующую на тело, с ускорением, которое приобретается телом, или связать силу тяготения с массой, которая порождает гравитационное поле.

Появилась «двуликая масса»: в одних построениях она была инертной, в других – гравитационной. Однако Галилей своими опытами доказал, что все тела падают с одинаковым ускорением. Масса оказалась только одна: «двуликость» исчезла, поскольку гравитационная и инертная масса совпали. (Впрочем, мы позднее вернемся к «двуликости», используя ее при решении одной из задач.) В этом совпадении состоит великий принцип эквивалентности. Массу стали определять как некоторую величину, характеризующую реакцию тела на заданную силу, как меру инертности. Был создан рукотворный эталон, равный 1 кг.

Так появилась система единиц длина–масса–время (LMT). Указанные размерности независимые (из них нельзя составить безразмерную комби-

*Секунда – единица измерения времени, равная $1/31556925.9747$ доли тропического года для момента 1900 г., января 0, в 12 часов эфемеридного времени (31 декабря 1899 г., полдень).

нацию) и именно их в анализе размерностей чаще всего принимают за основные. Исходя из физических законов, можно было все новые и новые единицы сводить к основным. Действительно, обозначая размерность любой величины квадратными скобками, получим, например, для скорости $[v] = LT^{-1}$, для ускорения $[a] = LT^{-2}$, для силы $[F] = LMT^{-2}$, для энергии $[E] = ML^2T^{-2}$, исходя из закона Кулона для заряда $[q] = L^{3/2}M^{1/2}T^{-1}$ и т.д.

Как указывает Я. Смородинский*, в возможности создания эталонов – единственных на весь мир – скрыто глубокое удивительное свойство природы: при установлении эталонов длины, массы и времени человек использовал важное свойство нашего физического мира – свойство однородности пространства по расстояниям, по времени и по массе. Впрочем, последнее не совсем верно даже на Земле, поскольку 1 кг ведет себя по-разному на разных широтах.

Давайте теперь, следуя Я. Смородинскому, введем в изложение некоторую детективную интригу. Пусть случилась катастрофа: Парижская лаборатория мер и весов погибла. А нам нужно определить период малых колебаний маятника. Что делать? Вот здесь и поможет анализ размерностей, поэтому обратимся к определениям, которые мы сформулировали раньше. Уже из этих утверждений следует рецепт решения задач методом размерности.

- Выпишите группу N физических величин, между которыми, как вам кажется, есть какая-то взаимосвязь; это – самый важный и ответственный этап – этап создания модели, на котором нельзя не учесть главного в описываемом явлении, но нельзя ввести и лишние величины.
- Не забудьте рядом с ними поставить их размерности, выраженные через $K \leq N$ размерностей величин, принятых за основные.
- Попытайтесь составить из выписанных величин безразмерные произведения; некоторые величины при этом, возможно, придется возвести в какие-то степени. Часто не так уж просто составить такие произведения без использования формальных приемов, поэтому можно воспользоваться определением 2 (это основная формула метода размерности), составив матрицу размерностей – таблицу, в которой по горизонтали расположены выбранные вами для решения задачи величины $(a_1, a_2 \dots a_n)$, а по вертикали – величины, выбранные как основные; в клеточках матрицы ставятся показатели степеней, в которые нужно возвести основные величины, чтобы получить размерности $(a_1, a_2 \dots a_n)$.

*Смородинский Я.А. Подобие в природе и фундаментальные постоянные // Наука и жизнь, 1977, № 8, с. 79–85.

- Если $N - K = 1$, то безразмерное произведение будет единственным и, приравняв его безразмерной константе, вы получите искомую закономерность.

Вернемся к задаче о маятнике и на примере ее решения используем описанный выше рецепт.

Рассмотрим для простоты математический маятник – тяжелую материальную точку массой m , подвешенную на нерастяжимой и невесомой нити длиной l . Поскольку маятник движется к положению равновесия под действием силы тяжести, его период τ может зависеть от ускорения силы тяжести g , от массы m маятника и его длины l . Ограничим совокупность возможных движений маятника условием, что они плоские. Будем считать, что период колебаний маятника не зависит от амплитуды колебаний, то есть ограничимся малыми колебаниями около положения равновесия. Пренебрежем затуханием колебаний (в число определяющих величин не войдут вязкость и температура воздуха), не будем также учитывать ускорение точки подвеса маятника вместе с Землей (в число определяющих величин не войдет скорость вращения Земли). Тогда для периода колебаний можно записать формулу

$$\tau = f(l, m, g). \quad (1)$$

Выберем в качестве основной систему ЛМТ. Поскольку $N = 4$, а $K = 3$, то $N - K = 1$ и безразмерное произведение будет единственным. В данном случае легко сообразить, что безразмерная комбинация имеет вид: $\Pi = \sqrt{\tau^2/(l/g)}$ или $\tau = \Pi\sqrt{l/g}$. Однако решим задачу и формальным образом. Составим матрицу размерностей, исходя из того, что $[\tau] = T^1$; $[l] = L^1$; $[m] = M^1$; $[g] = L^1T^{-2}$. Тогда

	τ	l	m	g
L	0	1	0	1
M	0	0	1	0
T	1	0	0	-2.

Используя определение 2 и формулу (1), имеем

$$\tau = \Pi l^\alpha m^\beta g^\gamma, \quad (2)$$

где α , β и γ – не известные нам показатели степеней. На основе положения 3, из формулы (2) получим

$$L^0 M^0 T^1 = L^\alpha M^\beta L^\gamma T^{-2\gamma}. \quad (3)$$

Приравнивая показатели степеней в формуле (3) при одинаковых основаниях, приходим к системе уравнений

$$\alpha + \gamma = 0, \quad 1 = -2\gamma, \quad \beta = 0,$$

из которой следует, что

$$\gamma = -\frac{1}{2}, \quad \alpha = \frac{1}{2}.$$

Таким образом,

$$\tau = \Pi l^{1/2} g^{-1/2} = \Pi \sqrt{l/g}.$$

Согласно определению 4, мы получили критерий подобия

$$\Pi = \frac{\tau g^{1/2}}{l^{1/2}} \quad \text{или} \quad \bar{\Pi} = \Pi^2 = \frac{\tau^2 g}{l}. \quad (4)$$

Дадим еще одно определение.

Явления называются подобными, если они отличаются только численными значениями определяющих параметров и притом так, что для них соответствующие безразмерные величины $\Pi_i (i = 1, 2, \dots, m)$ совпадают.

Применительно к нашей задаче о маятнике закон подобия говорит, что, если мы увеличим длину маятника в n раз, то отношение длины нового маятника к квадрату его периода остается неизменным, поскольку $l_1/\tau_1^2 = l_2/\tau_2^2 = g/\bar{\Pi}$, а $g = \text{const}$. Таким образом, если существует хоть один маятник, для которого известна величина l/τ^2 , то мы можем найти периоды маятников любой длины.

В большинстве случаев, прежде чем приступить к изготовлению какого-либо дорогостоящего и крупного сооружения, например, корабля или самолета, для получения его характеристик в предстоящих условиях работы прибегают к испытаниям на моделях – к моделированию. При этом надо знать, как пересчитать результаты опыта на модели на натуре. Если этого не знать, моделирование бесполезно. Для рационального моделирования основным является понятие подобных явлений и, следовательно, установление критериев подобия.

Разумеется, закон подобия, как и любые другие законы природы, должен иметь ограниченную область применения. Очевидно, что маятник, длина которого сравнима с радиусом R Земли, будет качаться не так, как маятник обычных размеров l , потому что натяжение, обусловленное силой тяжести, будет существенно меняться вдоль его длины.

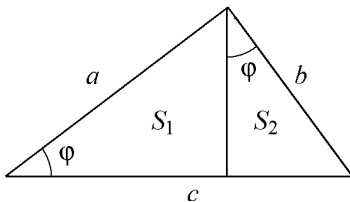
Таким образом, закон подобия для маятника будет справедлив только в том случае, если $l \ll R$. Следовательно, геометрического подобия в гравитационном поле нет.

Мы уже упоминали, что Галилей открыл закон подобия для свободно падающих тел (а мы его использовали для маятника, считая $g = \text{const}$). Но по иронии судьбы он же отметил, что некоторые законы не остаются неизменными при изменении масштабов. Вот его размышления над прочностью костей. Животное вдвое большей длины, ширины и высоты должно весить в 8 раз больше. Однако его вдвое более широкие кости имеют лишь вчетверо большее поперечное сечение, а значит, способны выдерживать лишь вчетверо больший вес. Это означает, что для выдерживания полного веса тела поперечный размер костей должен был бы увеличиться более чем в 2 раза. Такое отклонение от простого подобия вводит естественный масштаб в строение тела как сухопутных, так и водных животных: при некоторых предсказуемых в общих чертах размерах диаметр костей начинает увеличиваться быстрее, чем остальные части тела, разрушая тем самым подобие, но сохраняя в живых животных (на эту тему есть интересная книга: Дж.Б.С. Холдейн «Как важно быть нужного размера»^{*}).

Перейдем теперь к решению разных задач.

Примеры различных задач, решаемых методами размерности и подобия

Доказательство теоремы Пифагора. Историки науки считают, что развитию математических способностей Эйнштейна способствовал его дядя Якоб – инженер по образованию. Он давал мальчику математические задачи, и тот испытывал удовольствие от их решения. В 1891 году Эйнштейн приобрел, по его словам, «священную книгу по геометрии» – геометрию Эвклида. Изучая ее, он почувствовал, что некоторые доказательства в книге неоправданно сложны. Вот одно из возможных доказательств теоремы Пифагора, сделанное одиннадцатилетним Эйнштейном. Площадь прямоугольного треугольника S определяется величиной его гипотенузы c и, для определенности, меньшим из острых углов φ , то есть $S = f(c, \varphi)$. Очевидно, что анализ размерности дает $S = c^2 \phi(\varphi)$.



Из рисунка видно, что сумма площадей треугольников S_1 и S_2 равна S . Тогда

$$c^2 \phi(\varphi) = a^2 \phi(\varphi) + b^2 \phi(\varphi) \quad \text{и}$$

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

^{*}Haldane J.B.S. On being the right size. L.: Oxford University Press, 1928.

Определение гравитационного радиуса Земли. Начнем с, казалось бы, абстрактной задачи на технику решения с помощью анализа размерностей.

Попробуем составить из гравитационной постоянной G , входящей в закон всемирного тяготения $F = G(m_1 m_2)/r^2$ (считаю, что вы его знаете), массы m и скорости света c величину, имеющую размерность длины. Обозначая ее R , имеем

$$R = f(G, m, c) \rightarrow R = \Pi G^\alpha m^\beta c^\gamma. \quad (5)$$

Составим матрицу размерностей в системе LMT

	R	G	m	c
L	1	3	0	1
M	0	-1	1	0
T	0	-2	0	-1,

из которой с учетом формулы (5) следует:

$$L^1 M^0 T^0 = L^{3\alpha} M^{-\alpha} T^{-2\alpha} M^\beta L^\gamma T^{-\gamma}.$$

Тогда $1 = 3\alpha + \gamma$, $0 = -\alpha + \beta$, $0 = -2\alpha - \gamma$ и, следовательно, $\alpha = \beta = 1$, $\gamma = -2$. Таким образом, $R = \Pi(Gm/c^2)$. Если $m = M_3$ – массе Земли, то $R_{\text{тр}} = \Pi(GM_3/c^2)$ – гравитационный радиус Земли. Важное замечание: величину Π , которая присутствует во всех задачах, решаемых методом размерности, в рамках метода определить нельзя (вспомните Вайскопфа: «Я буду вычислять только порядки физических величин...»). Эта величина может быть определена либо из строгой теории, либо из эксперимента. В нашей задаче $\Pi = 2$, поэтому $R_{\text{тр}}$ Земли получается примерно равным 0.4 см, $R_{\text{тр}}$ Солнца – около 3 км, $R_{\text{тр}}$ пульсаров – порядка размеров Земли.

Для тела массой m , лежащего на поверхности Земли, $mg = G(mM_3/r^2)$, поэтому $g = R_{\text{тр}} c^2/(2r^2)$, то есть гравитационное поле само характеризуется постоянной $R_{\text{тр}}$, имеющей размерность длины. Вот почему в гравитационном поле нет геометрического подобия, и короткий и длинный маятники колеблются по-разному.

Задача для будущих президентов. В студенческой или школьной аудитории я всегда задаю вопрос: «Кто хочет стать президентом страны?» И всегда находятся претенденты. Недавно появилась любопытная книга

Ричарда А. Мюллера «Физика для будущих президентов»*, в которой автор пытается ответить на вопрос: «Зачем президенту знать физику?». Ответ в том, что именно с физикой связано множество проблем, с которыми ему придется столкнуться (терроризм, энергетические проблемы, ядерные технологии, космос, глобальное потепление), и еще потому, что физика в наши дни становится главной наукой – наукой, открывающей человечеству двери в будущее. Естественно, что одна из проблем – ядерное оружие.

Поэтому – вот одна важная задача, которую с помощью анализа размерностей может решить президент, даже недолюбливающий физику. Решим задачу о сильном точечном взрыве, под которым понимают взрыв заряда, имеющего малый размер и массу, но обладающего большой энергией. Именно к таким взрывам и относится ядерный взрыв. Эту задачу решали почти одновременно Дж. Тэйлор в Англии, фон Нейман в США и академик Л.И. Седов в СССР. Вот изящное и простое решение, которое предложил Л.И. Седов.

Пусть в течение очень короткого времени в атмосфере выделилась настолько большая энергия \mathcal{E} , что при дальнейшем распространении ударной волны можно пренебречь атмосферным давлением за ударной волной. Найдем закон движения ударной волны, то есть ее расстояние r от центра взрыва в момент времени t . Масштабы явления должны зависеть от мгновенно выделившейся энергии \mathcal{E} и инерционных свойств атмосферы – плотности ρ . Матрица размерности в системе ЛМТ имеет вид

$$\begin{array}{cccc} r & \mathcal{E} & \rho & t \\ L & 1 & 2 & -3 & 0 \\ M & 0 & 1 & 1 & 0 \\ T & 0 & -2 & 0 & 1. \end{array}$$

Будем искать зависимость $r = f(\mathcal{E}, \rho, t)$. Тогда, согласно основной формуле теории размерностей (определению 2), $r = \text{П}\mathcal{E}^\alpha \rho^\beta t^\gamma$. Используя матрицу размерностей, находим

$$L^1 M^0 T^0 = (L^2 M T^{-2})^\alpha (M L^{-3})^\beta T^\gamma,$$

откуда $1 = 2\alpha - 3\beta$, $0 = \alpha + \beta$, $0 = -2\alpha + \gamma$ и $\alpha = 1/5$, $\beta = -1/5$, $\gamma = 2/5$.

*Мюллер Р.А. Физика для будущих президентов. М.: АСТ: Астрель: Полиграфиздат, 2011, 411 с.

Таким образом, закон движения ударной волны имеет вид

$$r = \Pi \left(\frac{\mathcal{E}}{\rho} \right)^{1/5} t^{2/5}. \quad (6)$$

Соотношение (6) оказалось весьма полезным, поскольку сэкономило усилия и средства экспериментаторов. Действительно, достаточно произвести единственный взрыв с известными \mathcal{E} и ρ , измерить, до какого r дойдет ударная волна за время t , – и можно определить безразмерную постоянную Π . После чего соотношение (6) можно использовать для определения энергии взрыва \mathcal{E} , если во время взрыва измерять $r(t)$ и ρ . Разумеется, постоянная Π (критерий подобия), должна быть одинаковой для всех взрывов, то есть взрывы должны быть однотипными.

В логарифмических переменных $(5/2) \lg r$, $\lg t$ экспериментальные точки должны лечь на прямую

$$\frac{5}{2} \lg r = \frac{5}{2} \lg (\Pi \mathcal{E}^{1/5} \rho^{-1/5}) + \lg t, \quad (7)$$

имеющую наклон, равный единице. Это подтвердил Тейлор, обработавший кинофильм о распространении огненного шара, снятый во время американских ядерных испытаний Дж. Маком. Из более строгих расчетов следует, что $\Pi \approx 1$. Зная это, по экспериментальной зависимости радиуса фронта ударной волны от времени можно определить энергию взрыва. Публикация Тейлором этой величины (она оказалась примерно равной 10^{14} Дж) вызвала в свое время, по его словам, немалое смущение в американских правительственных кругах, поскольку эта цифра считалась весьма секретной, хотя фильм Мака секретным не был.

Проблема пульсации звезд и π -теорема. Пока у нас задачи решались легко, поскольку $N - K = 1$. А что делать, если $N - K > 1$? В теории размерности и подобия есть π -теорема, впервые сформулированная и доказанная, по-видимому Бэкингом. Ее можно изложить следующим образом.

Пусть существует физическая закономерность $a = f(a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_n)$, выраженная в виде зависимости некоторой, вообще говоря, размерной величины от размерных же определяющих ее параметров.

Эта зависимость может быть представлена в виде $\Pi = f(\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{n-k})$ некоторой безразмерной величины от безразмерных комбинаций определяющих параметров. Количество этих безразмерных комбинаций меньше общего числа определяющих параметров на число размерных определяющих параметров с независимыми размерностями (параметров, принятых за основные). Рассмотрим пример использования теоремы в астрофизике.

Для классификации звезд используют интенсивность их блеска. В 1784 году Джон Гудрайтис установил, что звезда в созвездии Цефея, которой в астрономических каталогах присвоена буква δ (δ -Цефея), периодически изменяет блеск с периодом 5.366341 суток (порядка 130 часов). Ее диаметр изменяется в пределах от 40 до 45 диаметров Солнца. δ -Цефея дала имя целому классу звезд – цефеид. Цефеиды – переменные звезды-сверхгиганты, периодически изменяющие свою светимость и яркость. Причиной переменности служат колебания радиуса и температуры фотосферы (пульсации), возникающие из-за нарушения баланса между силами гравитации, стремящимися сжать звезду, и силами горячего газа и излучения, стремящимися звезду расширить. Существование связи между периодом и средней светимостью звезды установила в 1908 году Генриетта Суон Левит. В 1925–1926 годах, применив полученные Левит результаты к цефеидам, обнаруженным в туманности Андромеды, Эдвин Пауэлл Хаббл смог определить расстояние до нее и установить, что она расположена далеко за границами Млечного пути и является самостоятельной галактикой.

Как сформулировать задачу о пульсациях и какие величины выбрать в качестве определяющих?

Предположим, что пульсации звезд – их сжатия и разрежения – имеют строго выраженный радиальный характер. Амплитуду пульсаций будем считать малой. В качестве определяющих величин, следуя книге Э.А. Дибая и С.А. Каплана «Размерности и подобие астрофизических величин»*, выберем массу звезды M , светимость \mathcal{L} и радиус \mathcal{R} . Светимость – одна из важнейших единиц астрофизики. Под светимостью понимают количество энергии, излучаемой небесным телом за единицу времени, поэтому в системе LMT $[\mathcal{L}] = L^2MT^{-3}$. Заметим, что M , \mathcal{L} и \mathcal{R} имеют независимые размерности, то есть из этих трех величин нельзя составить безразмерный комплекс. Кроме указанных определяющих величин следует добавить гравитационную постоянную \mathcal{G} , поскольку сжатие звезды при пульсации вызвано полем тяготения звезды. Наконец, при малых амплитудах пульсации определяются только периодом \mathcal{P} . При этом отброшены такие «тонкости», например, как зависимость периода пульсаций от структуры звезды и ее химического состава, роль ионизации в поверхностных слоях, конвекция и т.п. Все эти факторы, конечно, влияют на период пульсаций, но это уже более высокое приближение в решаемой задаче.

*Дибай Э.А., Каплан С.А. Размерности и подобие астрофизических величин. М.: Наука, 1976, 399 с.

Запишем на этот раз искомую физическую зависимость в неявной форме

$$f(\mathcal{M}, \mathcal{L}, \mathcal{R}, \mathcal{G}, \mathcal{P}) = 0. \quad (8)$$

Число независимых размерностей равно трем. Согласно π -теореме, должны быть два критерия подобия, Π_1 и Π_2 , а уравнение (8) можно переписать следующим образом:

$$f_1(\Pi_1, \Pi_2) = 0.$$

Составим матрицу размерностей в системе LMT.

	\mathcal{M}	\mathcal{L}	\mathcal{R}	\mathcal{G}	\mathcal{P}
L	0	2	1	3	0
M	1	1	0	-1	0
T	0	-3	0	-2	1.

Используя матрицу размерности и основную формулу размерности, найдем два безразмерных комплекса, в один из которых входит \mathcal{P} , а в другой – \mathcal{G} .

$$\frac{[\mathcal{P}]}{[\mathcal{L}]^\alpha [\mathcal{M}]^\beta [\mathcal{R}]^\gamma} = 1, \quad \frac{T}{L^{2\alpha+\gamma} M^{\alpha+\beta} T^{-3\alpha}} = 1,$$

$$2\alpha + \gamma = 0, \quad \alpha + \beta = 0, \quad 1 + 3\alpha = 0, \quad \alpha = -1/3, \quad \beta = 1/3, \quad \gamma = 2/3.$$

Таким образом,

$$\Pi_1 = \frac{(\mathcal{L}\mathcal{P})^{1/3}}{(\mathcal{M}\mathcal{R}^2/\mathcal{P}^2)^{1/3}}. \quad (9)$$

Есть ли какой-либо физический смысл у этого критерия подобия? Оказывается, что удобнее интерпретировать величину Π_1^3 , которая есть отношение энергии $\mathcal{L}\mathcal{P}$, излученной звездой за один период колебаний, к величине, характеризующей механическую энергию колебаний звезды $\mathcal{M}\mathcal{R}^2/\mathcal{P}^2$.

Аналогичным образом будем отыскивать и второй критерий подобия, который обозначим пока Π_2 . Итак,

$$\frac{[\mathcal{G}]}{[\mathcal{L}]^{\alpha_1} [\mathcal{M}]^{\beta_1} [\mathcal{R}]^{\gamma_1}} = 1, \quad \frac{L^3 M^{-1} T^{-2}}{L^{2\alpha_1+\gamma_1} M^{\alpha_1+\beta_1} T^{-3\alpha_1}} = 1,$$

$$2\alpha_1 + \gamma_1 = 3, \quad \alpha_1 + \beta_1 = -1, \quad 3\alpha_1 = 2; \quad \alpha_1 = -2/3, \quad \beta_1 = -5/3, \quad \gamma_1 = 5/3$$

и, следовательно,

$$\Pi_2' = \frac{\mathcal{G}\mathcal{L}^{-2/3}}{\mathcal{M}^{-5/3}\mathcal{R}^{5/3}}.$$

Образум критерий подобия

$$\Pi_2^2 = \Pi_2' \Pi_1^2 = \frac{\mathcal{P}^2}{\mathcal{G}^{-1} \mathcal{M}^{-1} \mathcal{R}^3}.$$

Тогда

$$\Pi_2 = \mathcal{P} \mathcal{G}^{1/2} \mathcal{M}^{1/2} \mathcal{R}^{-3/2}. \quad (10)$$

Критерий Π_2 определяет период колебаний звезды, которые являются механическими. Вот почему мы используем вместо Π_2' критерий Π_2 , который не содержит светимость звезды. Для средней плотности звезды можно написать соотношение $\bar{\rho} = \mathcal{M}/((4/3)\pi\mathcal{R}^3)$. С учетом этого выражения из формулы (10) получим

$$\mathcal{P}(\bar{\rho})^{1/2} = \frac{\Pi_2}{\sqrt{(4/3)\pi\mathcal{G}}}. \quad (11)$$

Если считать правую часть формулы (11) постоянной, то (11) выражает хорошо известное в астрофизике соотношение «период–плотность» для пульсирующих звезд. А в чем физический смысл безразмерного комплекса Π_2 ?

Вспомним формулу Гюйгенса для периода колебаний математического маятника (формула (4) при $\Pi = 2\pi$) и применим ее к пульсациям звезд, считая, что «длина» маятника l равна радиусу звезды \mathcal{R} . Кроме того, положим ускорение силы тяжести равным его значению на поверхности звезды, а именно $g = \mathcal{G}\mathcal{M}\mathcal{R}^{-2}$. Тогда

$$\mathcal{P} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{\mathcal{R}^3}{\mathcal{M}\mathcal{G}}}$$

или с учетом выражения для $\bar{\rho}$

$$\mathcal{P} = \sqrt{\frac{3\pi}{\mathcal{G}\bar{\rho}}}, \quad \mathcal{P}(\bar{\rho})^{1/2} = \sqrt{\frac{3\pi}{\mathcal{G}}}. \quad (12)$$

Легко видеть, что соотношения (12) и (11) совпадают, если $\Pi_2 = 2\pi$. Откуда такая близость численных значений критериев подобия и их приближенное постоянство для объектов столь разных масштабов – маятника и звезды? Все дело в физической общности явлений, приводящих к малым пульсациям звезд и малым колебаниям маятника. И в том и в другом случае сущность одна и та же – механическое движение в поле тяжести, соответствующее небольшим отклонениям от положения равновесия.

Конечно, во многом сравниваемые явления различны. Они подобны только по одному критерию подобия (такое подобие явлений называется ограниченным). Более того, критерий подобия Π_1 не может считаться постоянным, он разный для разных звезд и всегда много меньше единицы.

Повторю еще раз, что численные значения критериев подобия из анализа размерности нельзя найти. Но очень часто они не отличаются от единицы. Почему? Одно из объяснений состоит в следующем: если анализируемая система находится в равновесном состоянии, то это значит, что два противоположно действующих эффекта (существенных для данной задачи) примерно компенсируют друг друга.

Дополнение Хантли

У формул размерности есть некоторые неудовлетворительные особенности. Например, угловая скорость и частота имеют одинаковую размерность. Формула размерности скорости изменения момента количества движения в системе LMT имеет вид L^2MT^{-2} , что совпадает с формулой размерности для энергии. Подобные примеры можно найти в книге Г. Хантли «Анализ размерностей»*.

Уже из двух приведенных примеров следует определенная двусмысленность системы единиц LMT. Таким образом, если каждой физической величине можно приписать лишь одну вполне определенную формулу размерности, то обратное утверждение не верно: существуют некоторые формулы размерности, справедливые для более чем одной физической величины. Последнее приводит к неполному решению задачи, когда число независимых физических величин превышает число основных величин на два и более, поскольку в этом случае число неизвестных показателей степени превышает число уравнений, связывающих их друг с другом. В этом случае приходится выражать некоторые показатели через другие. Следовательно, было бы разумно увеличить число основных размерностей.

Рассмотрим следующую простую задачу. Пуля выпущена с начальной скоростью v_0 в горизонтальном направлении на высоте h от земной поверхности. Определить дальность R горизонтального полета пули. Очевидно, что $R = f(v_0, h, g)$. Тогда $R = \Pi v_0^\alpha h^\beta g^\gamma$; в системе LMT имеем $L = (LT^{-1})^\alpha L^\beta L^\gamma T^{-2\gamma}$ и $1 = \alpha + \beta + \gamma$; $0 = -\alpha - 2\gamma$. Из двух последних уравнений $\gamma = -\alpha/2$, $\beta = 1 - \alpha/2$ и, следовательно,

$$R = \Pi h \left(\frac{v_0}{\sqrt{gh}} \right)^\alpha, \quad (13)$$

то есть решение неполное.

*Хантли Г. Анализ размерностей. М.: Мир, 1970, 175 с.

Дополнение Хантли состоит во введении векторных единиц длины с различающимися индексами, соответствующими декартовой системе координат, то есть L_x, L_y, L_z . Этим способом система LMT превратилась в систему $L_x L_y L_z MT$, в которой пять основных единиц вместо трех. В нашей задаче пуля обладает равномерной горизонтальной скоростью $L_x T^{-1}$ и равномерным вертикальным ускорением $L_z T^{-2}$. Используемый прием не только увеличивает число независимых основных размерностей, что дает возможность найти неизвестные показатели степени (в нашем случае α), но и устраняет путаницу в формулах размерности, когда одна и та же формула справедлива для двух и более физических величин.

Очевидно, что формулы площади $L_x L_y, L_x L_z, L_y L_z$ лучше, чем L^2 .

Формулу, например, для давления $L^{-1} M T^{-2}$ лучше преобразовать, вспомнив, что давление равно силе, действующей на единицу площади, то есть $(M L_z T^{-2}) / (L_x L_y)$. Примеры можно продолжить.

Решим задачу о пуле заново, используя дополнение Хантли и считая, что $[R] = L_x, [v_0] = L_x T^{-1}, [g] = L_z T^{-2}, [h] = L_z$. Тогда $R = \Pi \cdot v_0^\alpha h^\beta g^\gamma$ и $L_x = (L_x T^{-1})^\alpha L_z^\beta (L_z T^{-2})^\gamma$, что дает $1 = \alpha, 0 = -\alpha - 2\gamma, 0 = \beta + \gamma$ и, следовательно, $\gamma = -1/2, \beta = 1/2$. Таким образом,

$$R = \Pi v_0 \sqrt{\frac{h}{g}}. \quad (14)$$

Подставляя $\alpha = 1$ в (13), также получим формулу (14).

С введением векторной величины длины все разумно и понятно, а можно ли разделить понятие массы? Ведь мы ранее, восхищаясь Галилеем, провозгласили принцип эквивалентности – масса одна. Но я обещал вернуться к этому вопросу. Следуя Хантли, решим такую задачу.

Определить массовый расход вязкой жидкости, протекающей через трубу круглого поперечного сечения радиусом r и длиной l . Массовый расход m – это масса жидкости, протекающей в единицу времени, то есть $[m] = M T^{-1}$. Так как течение жидкости поддерживается за счет разности давлений на концах трубы $P_1 - P_2$, то изменение давления на единицу длины (градиент давления) $\mathcal{P} = (P_1 - P_2)/l$ и $[\mathcal{P}] = M T^{-2}/L^2$. Вязкость жидкости η (динамическую) применительно к потоку, параллельному неподвижной поверхности, определяют как силу, действующую на единицу площади (которая перпендикулярна поверхности потока), и деленную на градиент скорости, который имеет место в направлении, перпендикулярном поверхности. Таким образом, в системе LMT $[\eta] = L^{-1} M T^{-1}$. Тогда уравнение задачи имеет вид: $m = f(\mathcal{P}, \rho, \eta, r)$, где ρ – плотность жид-

кости, и, следовательно, в системе LMT определяющих величин пять при трех основных.

Хантли предлагает вопреки общей теории относительности различать массу как количество вещества M_μ и как меру инерции M_i , то есть считать, что $[m] = M_\mu T^{-1}$, $[P] = L^{-2} M_i T^{-2}$, $[\rho] = M_\mu L^{-3}$, $[\eta] = [L^{-1} M_i T^{-1}]$, $[r] = L$. Используя эти соотношения и формулу $m = \Pi \mathcal{P}^\alpha \rho^\beta \eta^\gamma r^\delta$, получим

$$L^0 M_\mu T^{-1} M_i^0 = (L^{-2} M_i T^{-2})^\alpha (L^{-3} M_\mu)^\beta (L^{-1} M_i T^{-1})^\gamma L^\delta$$

и $0 = -2\alpha - 3\beta - \gamma + \delta$, $\beta = 1$, $-1 = -2\alpha - \gamma$, $0 = \alpha + \gamma$. Откуда $\alpha = 1$, $\gamma = -1$, $\delta = 4$, и окончательно приходим к закону Пуазейля

$$m = \Pi \frac{\mathcal{P} \rho r^4}{\eta}. \quad (15)$$

Задачу можно однозначно решить и в системе LMT, если вместо m ввести объемный расход жидкости V . Получится

$$V = \Pi \frac{\mathcal{P} r^4}{\eta}. \quad (16)$$

Если умножить (16) на ρ , то получится формула (15).

Задача Рэлея. Почему небо голубое? Тиндаль первым наблюдал, что белый свет при рассеянии становится синеватым и высказал мысль, что голубой цвет неба связан с рассеянием солнечного света на частичках пыли, которые всегда есть в достаточном количестве в атмосфере Земли. Не будь рассеяния света, небо было бы совершенно черным, и на нем ярко выделялись бы звезды и другие светила даже днем. Таким и видят небо космонавты в своих полетах. Но небо голубое... Вслед за Тиндалем Рэлей считал, что рассеяние света атмосферой объясняется наличием в ней взвешенных капелек жидкости, мелких пылинок и твердых частичек, размеры которых малы по сравнению с длиной световой волны. Он показал, что количественный результат можно получить, основываясь на анализе размерностей в сочетании с известными законами оптики. Решение Рэлея весьма поучительно и с точки зрения использования анализа размерностей. Приведем его. Рэлей формулирует задачу следующим образом.

Пусть частица с линейным размером l рассеивает солнечный свет с длиной волны λ и амплитудой A . Амплитуда рассеянной волны уменьшается с увеличением расстояния от частицы. Пусть она равна S на расстоянии r от частицы. Требуется определить зависимость S от остальных переменных величин. Вся информация о сформулированной задаче собрана в таблице (используется система единиц LMT).

Физические величины и их размерности (к задаче Рэлея)

Физическая величина	Обозначение	Формула размерности
Амплитуда волны рассеянного света	S	L
Амплитуда падающей волны	A	L
Линейный размер частицы	l	L
Расстояние от частицы	r	L
Длина волны света	λ	L

По правилам теории размерностей выразим S как произведение остальных переменных, возведенных в ту или иную степень. Тогда получим, что

$$S = \Pi A^\alpha l^\beta r^\gamma \lambda^\delta. \quad (17)$$

Из формулы (17) получается весьма необычное уравнение для размерностей

$$[L] = [L]^\alpha [L]^\beta [L]^\gamma [L]^\delta,$$

из которого следует, что

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 1. \quad (18)$$

Если теперь не дополнить анализ размерностей физическими представлениями, то задачу не решить. Вспомним, что амплитуда волны рассеянного света пропорциональна амплитуде падающего света, поэтому $\alpha = 1$; амплитуда волны рассеянного света обратно пропорциональна расстоянию от частицы, то есть $\gamma = -1$.

Следовательно, возвращаясь к соотношениям (17) и (18), находим

$$\delta = 1 - \beta, \quad S = \Pi \frac{A}{r} l^\beta \lambda^{1-\beta}$$

или

$$S = \Pi \frac{A\lambda}{r} \left(\frac{l}{\lambda} \right)^\beta. \quad (19)$$

Далее Рэлей отмечает: «Судя по динамике явления, N (отношение амплитуд волн падающего и рассеянного света) изменяется пропорционально V (объем рассеивающей частицы)». Таким образом, следует считать, что $N = S/A \sim l^\beta \sim V \sim l^3$ и $\beta = 3$. Окончательно из формулы (19) имеем

$$S = \frac{\Pi A l^3}{r \lambda^2}.$$

По определению, интенсивность I рассеянного света пропорциональна квадрату его амплитуды S , поэтому

$$I \sim \frac{1}{\lambda^4} \sim \omega^4, \quad (20)$$

где ω – круговая частота световой волны.

Если принять, что $\lambda_{\text{красная}} \approx 1.5\lambda_{\text{синяя}}$, то $I_{\text{синяя}} \approx 5I_{\text{красная}}$, то есть синий цвет рассеивается намного сильнее, чем красный.

Хантли заключает изложение решения Рэля следующими словами: «Читатель может заметить, что в этом примере в большей мере использованы физическая интуиция и знание законов физики, чем анализ размерностей. С этим приходится согласиться, но верно также и то, что использование обоих источников привело простым и изящным образом к интересному результату, который невозможно получить методами элементарного анализа».

Результат Рэля легко объясняет голубой цвет неба. Действительно, из-за присутствия атмосферы значительная часть солнечного света рассеивается в стороны. Причем, согласно формуле (20), рассеянная часть излучения тем больше, чем короче длина волны. Это значит, что рассеянный свет богат короткими волнами. Отсюда и голубой цвет неба, поскольку максимум интенсивности в рассеянном свете попадает в голубую область спектра.

Все было бы хорошо в этих объяснениях, если бы они были еще и правильными. Ошибка в исходном допущении о загрязнении атмосферы. Ведь по мере поднятия над Землей в воздухе уменьшается содержание посторонних частиц и пыли: воздух чище над океанами, чем в больших городах, он чище в Антарктиде, чем в Москве. Но тогда насыщенность рассеянного света в этих местах должна была бы уменьшаться. Однако научные наблюдения, например, в высокогорных обсерваториях показали, что все обстоит как раз наоборот: чем чище воздух, чем меньше в нем посторонних частиц, тем ярче небесная лазурь, тем богаче излучение неба синими лучами. При этом формула (20) остается справедливой и в этих случаях (закон был количественно подтвержден измерениями интенсивности рассеянного света).

Исходя из подобных фактов, Рэлей позднее понял, что рассеяние вызывается не посторонними частицами, а самими молекулами воздуха. Такое рассеяние света стали называть рэлеевским или молекулярным рассеянием.

Правда, на этом история ответа на вопрос «Почему небо голубое?» не заканчивается, хотя формула (20) сохраняется. Но это – другая история*.

На этом я заканчиваю лекции, и в заключение приведу цитату из книги Р.А. Мюллера: «Для понимания физики современной жизни важно изменить

*См., например: Трубецков Д.И. Введение в синергетику. Колебания и волны. Изд. 4-е. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2012, глава 5.

те свои представления, которые не соответствуют истине. Часто цитируют высказывание, приписываемое Марку Твену: “Неведение не приносит большинству людей никаких неудобств. Проблема в их обширных знаниях, которые таковыми не являются”».

Думаю, что эти лекции пополнили ваши знания.

Тем, кого заинтересовала теория размерности и подобия, могу порекомендовать уже упомянутую мою книгу «Введение в синергетику» (естественно, что в лекцию вошло многое из нее), книгу Хантли, книгу Дибая и Каплана, а также следующие издания:

1. Брук Ю.М., Стасенко А.Л. Как физики делают оценки – метод размерности и порядки физических величин // О современной физике – учителю. М.: Знание, 1975. С. 54–131.
2. Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1977.
3. Бриджмен П. Анализ размерностей. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001, 148 с.
4. Журнал «Квант» за разные годы.

«ЛЕВЫЕ» СРЕДЫ. ЧЕМ ОНИ ИНТЕРЕСНЫ?*

*Шараевский Ю.П., профессор, заведующий
кафедрой нелинейной физики ФНП СГУ*

Введение: что представляют собой «левые» среды?

Одним из приоритетных направлений в науке сегодняшнего дня является создание искусственных материалов с необычными свойствами, которые не наблюдаются у природных материалов. Они получили название метаматериалы и представляют собой искусственно сконструированные структуры, состоящие из отдельных микро- и наноразмерных слоев с различными свойствами или объемных элементов (частиц) [1]. Например, в оптике они получили название фотонные кристаллы (одномерные, двумерные, трехмерные) [2]. Эти фотонные кристаллы уже сейчас, в отличие от природных кристаллов, демонстрируют удивительные свойства и начинают использоваться в оптических устройствах, в линиях связи и т.д. Активно в последние годы предпринимаются также и попытки сконструировать материалы, которые можно рассматривать как «левые» среды. Так что же представляют из себя «левые» среды?

В изотропной среде, свойства которой не зависят от направления, связь между параметрами электромагнитной волны (фазовой скоростью V_ϕ , длиной волны λ и частотой ω) определяется следующим соотношением:

$$k^2 = \frac{\omega^2}{V_\phi^2} = \frac{\omega^2}{C^2} \cdot \varepsilon\mu, \quad (1)$$

где $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число, C – скорость света в вакууме, а ε и μ – относительные диэлектрическая и магнитная проницаемости среды, соответственно.

Для вакуума $\varepsilon = \mu = 1$, а для всех остальных веществ, встречающихся в природе, $\varepsilon, \mu > 0$. Оптические свойства вещества характеризу-

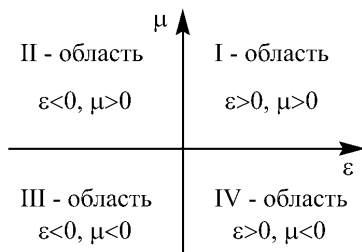


Рис. 1. Диаграмма $\varepsilon - \mu$

* © «Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика», 2012, т. 20, № 1.

ются показателем преломления n , который связан с ε , μ простым соотношением:

$$n = \pm\sqrt{\varepsilon\mu}. \quad (2)$$

Для всех известных материалов перед квадратным корнем должен стоять знак «+» и поэтому показатель преломления положителен. Если не учитывать потери в среде и считать, что ε и μ – действительные величины, то из соотношений (1) и (2) видно, что одновременная смена знаков ε и μ ($\varepsilon, \mu < 0$) не меняет эти соотношения.

Учитывая этот факт, можно высказать следующие предположения: 1) свойства веществ действительно не зависят от одновременной смены знаков ε и μ ; 2) одновременная смена знаков противоречит основным законам природы и таких веществ в природе не должно быть; 3) вещества с $\varepsilon < 0$ и $\mu < 0$ имеют право на существование и они должны обладать какими-то особыми свойствами. Именно эту последнюю гипотезу свыше 40 лет назад в 1967 году высказал советский ученый В.Г. Веселаго [3]. Такие вещества были названы им «левыми» (смысл этого термина мы поясним ниже). В зарубежной литературе они получили название *left-handed medium*. В работе [3] В.Г. Веселаго описал многие необычные свойства «левых» веществ, в частности, показал, что такие вещества должны обладать отрицательным показателем преломления, то есть в (2) для «левых» сред нужно брать знак «−». Кроме того, он высказал предположение, что искать «левые» вещества нужно среди анизотропных гиротропных сред*. Поясним смысл предположение Виктора Георгиевича следующей иллюстрацией. Представим диаграмму, по осям которой будем откладывать действительные значения ε и μ (рис. 1).

Если разместить на этой диаграмме все известные нам среды, то получится следующая картина [3]: область I – большинство изотропных диэлектриков, для которых ε и μ положительны; область II – это газообразная плазма и плазма твердых тел, для которых без магнитного поля величина ε определяется как

$$\varepsilon = 1 - \sum \frac{\omega_0^2}{\omega^2}, \quad (3)$$

где $\omega_0 = (4\pi N e^2 / m)^{1/2}$ – плазменная частота (N – концентрация носителей заряда, m – их масса, e – заряд), а суммирование проводится по всем типам носителей заряда. Из (3) видно, что при $\omega < \omega_0$ (на малых частотах)

* Анизотропными называются среды, свойства которых зависят от направления (кристаллы, ферромагнитные материалы и др.). Если анизотропия вызвана приложением внешнего воздействия (например, механического, приложением электрического и магнитного полей), то такие среды называются гиротропными [4].

$\varepsilon < 0$. Примером такой среды является ионосфера, от которой отражаются электромагнитные волны низких частот.

В областях III и IV изотропных веществ с $\mu < 0$ не существует. Однако в анизотропных гиротропных средах, для которых ε и μ не являются скалярными величинами, а зависят от направления и представляются в виде тензоров, компоненты тензоров ε и μ могут иметь любой знак. В частности, для некоторых типов волн, распространяющихся в определенных направлениях, ε и μ могут быть действительными величинами и отрицательными. Хорошо известными примерами таких сред являются: 1) плазма в магнитном поле, для которой при распространении в направлении постоянного магнитного поля плоской поперечной волны, поляризованной по кругу, может быть $\varepsilon < 0$, а $\mu > 0$ (этот случай относится к области II); 2) различные магнетики в постоянном магнитном поле, для которых может быть $\varepsilon > 0$ и $\mu < 0$ (этот случай относится к области IV).

В настоящее время большой интерес вызывают также вещества, у которых тензорный характер носят одновременно ε и μ . К таким веществам относятся, например, чистые ферромагнитные металлы и полупроводники. В них при распространении определенного типа волн вдоль направления приложенного внешнего магнитного поля эффективные электрическая и магнитная проницаемости могут одновременно принимать отрицательные значения. Такие вещества, по гипотезе В.Г. Веселаго, нужно отнести к области III на рис. 1, то есть к «левым» средам.

Но резкий всплеск интереса к «левым» средам возник лишь в самом конце XX века, когда были предприняты первые попытки по созданию искусственных материалов со свойствами, предсказанными В.Г. Веселаго для «левых» сред. В 2000 году англичанин Дэвид Смит вместе с коллегами из Калифорнийского университета (Сан-Диего, США) изготовили метаматериал с отрицательным показателем преломления и опубликовали результаты экспериментального исследования [5].

Почему же так интересны «левые» среды? На этот вопрос мы и постараемся ответить ниже.

1. Основные электродинамические соотношения для «правых» и «левых» сред

Для вывода основных соотношений, описывающих распространения волн в среде, необходимо использовать уравнения Максвелла и соотношения, характеризующие свойства среды $\mathbf{B} = \mu_0 \mu \mathbf{H}$, $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E}$, где \mathbf{B} , \mathbf{H} , \mathbf{D} , \mathbf{E} – вектора индукции и напряженностей магнитных и электрического по-

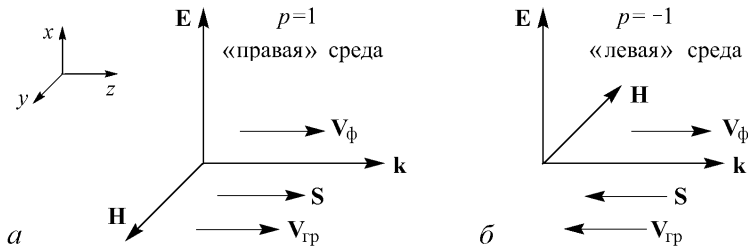


Рис. 2. Направление векторов \mathbf{k} , \mathbf{E} , \mathbf{H} и \mathbf{S} : a – для «правой» среды, b – для «левой» среды

лей, соответственно; ε_0 , μ_0 – электрическая и магнитная постоянные. Представим электрическую и магнитные проницаемости среды в виде $\varepsilon = p|\varepsilon|$, $\mu = p|\mu|$, где коэффициент $p = \pm 1$ [3].

Предположим, что в среде в направлении оси z распространяется плоская монохроматическая волна, у которой все величины изменяются по закону $\exp(i(\omega t - kz))$. Используя уравнения Максвелла и приведенные выше соотношения, для такой волны можно получить следующие выражения, описывающие связь между \mathbf{E} , \mathbf{H} и волновым вектором \mathbf{k}^* :

$$[\mathbf{k} \mathbf{E}] = \omega \mu_0 p |\mu| \mathbf{H}, \quad [\mathbf{k} \mathbf{H}] = -\omega \varepsilon_0 p |\varepsilon| \mathbf{E}. \quad (4)$$

Расположение векторов \mathbf{k} , \mathbf{E} и \mathbf{H} представлено на рис. 2.

Из соотношений (4) видно, что при $p = +1$ ($\varepsilon, \mu > 0$), векторы \mathbf{k} , \mathbf{E} и \mathbf{H} образуют правую тройку векторов: если вращать ручку буравчика от \mathbf{k} к \mathbf{E} , то буравчик будет двигаться в направлении вектора \mathbf{H} (рис. 2, a). Если $p = -1$ ($\varepsilon, \mu < 0$), то векторы \mathbf{k} , \mathbf{E} и \mathbf{H} образуют левую тройку векторов: буравчик движется в противоположную сторону от направления вектора \mathbf{H} (рис. 2, b). Таким образом, если $p = +1$, то среду можно назвать «правой», а при $p = -1$ – «левой» [3].

Поток энергии, переносимый электромагнитной волной, определяется вектором Умова–Пойнтинга \mathbf{S} , который записывается как

$$\mathbf{S} = [\mathbf{E} \mathbf{H}] = w \mathbf{V}_{\text{гр}}, \quad (5)$$

где w – плотность энергии электромагнитной волны; $\mathbf{V}_{\text{гр}} = \partial\omega/\partial\mathbf{k}$ – групповая скорость, то есть скорость переноса энергии.

*Вектор $\mathbf{C} = [\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}]$ означает векторное произведение двух векторов \mathbf{A} и \mathbf{B} , причем вектор \mathbf{C} перпендикулярен плоскости, в которой лежат вектора \mathbf{A} и \mathbf{B} , и вместе все три вектора \mathbf{A} , \mathbf{B} и \mathbf{C} образуют правую тройку векторов.

Таким образом, волна, распространяясь в среде, имеет две скорости – фазовую V_ϕ и групповую $V_{гр}$. Чтобы понять их смысл, представим себе импульс электромагнитной волны, движущийся в среде (рис. 3). Фазовая скорость – это скорость движения фазы волны, например, максимума или минимума колебательного процесса, а групповая скорость – это скорость, с которой движется огибающая импульса. Они не обязательно должны быть одинаковы и направлены в одну сторону.

Из соотношения (5) видно, что вектор \mathbf{S} , а следовательно, и $\mathbf{V}_{гр}$, образуют с векторами \mathbf{E} и \mathbf{H} всегда правую тройку векторов. Таким образом, для «правых» сред фазовая и групповая скорости всегда направлены в одну сторону (рис. 3, *a*), а для «левых» сред вектора $\mathbf{V}_{гр}$ и \mathbf{V}_ϕ – в разные стороны (рис. 3, *б*), то есть это среды с отрицательной групповой скоростью.

Для изотропных сред фазовая и групповая скорости могут быть направлены в разные стороны только при наличии дисперсии в среде, то есть при наличии зависимости величин ε и μ от частоты. Действительно, в дисперсионных средах выражение для плотности электромагнитной энергии должно быть записано в виде [6]

$$w = \frac{1}{2} \left(\varepsilon_0 \frac{\partial(\varepsilon\omega)}{\partial\omega} E^2 + \mu_0 \frac{\partial(\mu\omega)}{\partial\omega} H^2 \right). \quad (6)$$

При $\varepsilon = \text{const}$ и $\mu = \text{const}$ из (6) получаем хорошо известное выражение для плотности энергии в изотропной диэлектрической среде: $w = (1/2)(\varepsilon_0\varepsilon E^2 + \mu_0\mu H^2)$, причем $w > 0$ по определению. Поэтому условие $\varepsilon = \text{const}$ и $\mu = \text{const}$ может выполняться только для «правых» сред. Для «левых» сред, если $w > 0$, то необходимо выполнение условий $\partial(\varepsilon\omega)/\partial\omega > 0$ и $\partial(\mu\omega)/\partial\omega > 0$. Эти условия не противоречат отрицательности ε и μ , но требуют соответствующих зависимостей ε и μ от частоты $\varepsilon = \varepsilon(\omega)$ и $\mu = \mu(\omega)$, то есть «левая» среда должна обладать дисперсией.

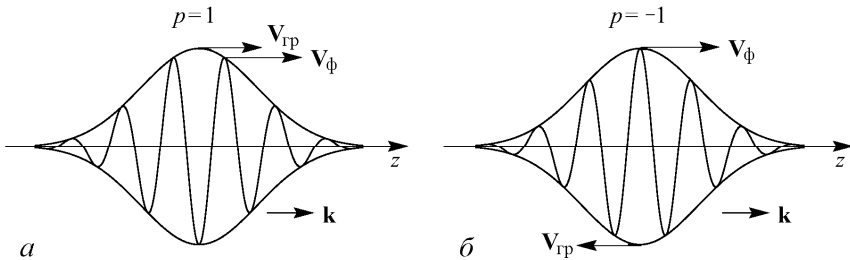


Рис. 3. Импульс электромагнитной волны, распространяющийся в направлении z : *a* – в «правой» среде, *б* – в «левой» среде

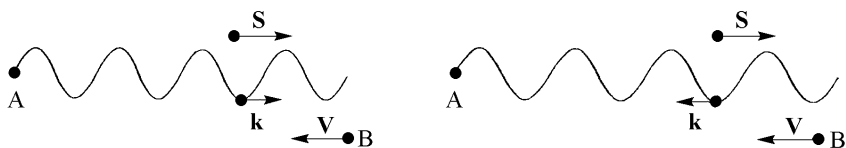


Рис. 4. Эффект Доплера: *a* – для «правой» среды ($p = +1$); *b* – для «левой» среды ($p = -1$)

Рассмотрим теперь некоторые физические следствия, которые вытекают из соотношений (4) и (5) для «левых» сред, когда фазовая скорость противоположна групповой (скорости распространения потока энергии).

Обращенный эффект Доплера. Изменение частоты колебаний вследствие движения источника или приемника называется эффектом Доплера. Пусть приемник излучения В движется со скоростью V относительно излучателя А, который излучает частоту ω_0 , как показано на рис. 4. В этом случае для частоты, воспринимаемой приемником вследствие доплеровского сдвига, можно записать выражение

$$\omega = \omega_0 \left(1 + p \frac{V}{V_{гр}} \right). \quad (7)$$

В «левой» среде ($p = -1$) приемник будет догонять точки волны, соответствующие какой-либо определенной фазе (рис. 4, б). Частота, воспринимаемая приемником (см. формулу (3)) будет меньше ω_0 , а не больше, как это должно быть для «правой» среды (рис. 4, а). При этом в формуле (7) скорости V и $V_{гр}$ направлены в разные стороны. Поэтому в «правой» среде

удаляющийся от нас объект кажется более красным из-за эффекта Доплера, а в «левой» среде будет казаться более синим.

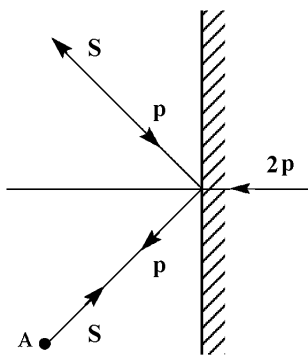


Рис. 5. Отражение луча, распространяющегося в «левой» среде, от идеально отражающей поверхности

Световое притяжение. Монохроматическую волну в «левой» среде можно рассматривать как поток фотонов, каждый из которых обладает импульсом $\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}$ (\mathbf{k} – волновой вектор), причем вектор \mathbf{k} направлен к источнику излучения А, а не от него, как это имеет место в «правой» среде (рис. 5). Поэтому луч света, распространяющийся в «левой» среде, при падении на идеально отражающую поверхность будет передавать

ей импульс $\mathbf{p} = 2N\hbar\mathbf{k}$ (N – число падающих фотонов), направленный к источнику, как показано на рис. 5. Поэтому световое давление, характерное для обычных сред, в «левой» среде заменяется световым притяжением.

2. Преломление луча на границе с «левой» средой: среда с отрицательным коэффициентом преломления

При переходе света из одной среды в другую на границе раздела двух сред (рис. 6) должны выполняться следующие условия*:

$$E_{t1} = E_{t2}, \quad H_{t1} = H_{t2} \quad (8)$$

– равенство тангенциальных компонент напряженностей электрического и магнитного полей, соответственно;

$$p_1 |\varepsilon_1| E_{n1} = p_2 |\varepsilon_2| E_{n2}, \quad p_1 |\mu_1| H_{n1} = p_2 |\mu_2| H_{n2} \quad (9)$$

– равенство нормальных компонент электрической и магнитной индукции, соответственно.

Из (8) следует, что тангенциальные компоненты полей \mathbf{E} и \mathbf{H} , то есть лежащие в плоскости падения, в падающем и преломленном лучах сохраняют свое направление. Что касается нормальных компонент (см. формулу (9)), то они сохраняют свое направление только тогда, когда среды имеют одинаковый знак ($p_1 = p_2$). Если первая среда «правая» ($p_1 = +1$), а вторая среда «левая» ($p_2 = -1$), то нормальные компоненты полей \mathbf{E} и \mathbf{H} меняют знак.

Это соответствует тому, что при переходе в среду с другим знаком p векторы \mathbf{E} и \mathbf{H} не только изменяются по величине из-за разных значений ε и μ , но еще испытывают зеркальное отражение относительно границы раздела двух сред. Преломленный луч во второй среде («левой») будет идти симметрично относительно оси, перпендикулярной к границе раздела, по сравнению со случаем, когда вторая среда – «правая» (рис. 6). Например, карандаш, погруженный в «левою» среду, будет казаться изогнутым наружу.

Для сред с различными параметрами p обычную формулу Снеллиуса, связывающую углы падения и отражения, следует записать в виде

$$\frac{\sin \varphi}{\sin \psi} = n_{12} = \frac{p_2}{p_1} \left| \sqrt{\frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_1 \mu_1}} \right|. \quad (10)$$

Из (10) видно, что коэффициент преломления двух сред n_{12} может быть отрицательным, если p_2 и p_1 имеют разные знаки.

*Записанные условия должны выполняться независимо от того «правая» среда или «левая».

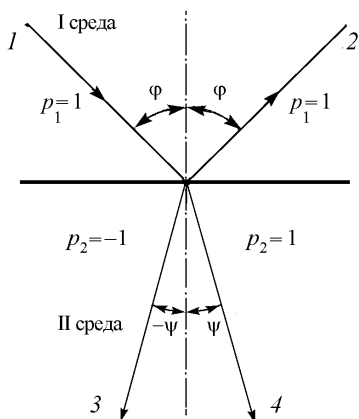


Рис. 6. Прохождение луча через границу двух сред: 1 – падающий луч, 2 – отраженный луч, 3 – преломленный луч при $p_2 = -1$; 4 – преломленный луч при $p = +1$

Примером такой среды является простая пластина толщиной d из «левого» вещества с $n < 0$, находящаяся в воздухе. На рис. 7 показано, что такая пластина может фокусировать в точку В излучение точечного источника А, находящегося на расстоянии $l < d$ от пластины.

Такая плоская пластина обладает удивительными свойствами – у нее отсутствует фокальная плоскость. Это означает, что линза создает объемное изображение предмета, что делает ее похожей на зеркало. Но, в отличие от зеркала, создаваемое изображение действительное, что открывает новые возможности для цветной фотографии. Плоско-параллельная пластина

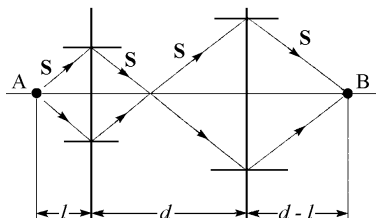


Рис. 7. Прохождение луча света через пластину из левого вещества; А – источник излучения, В – приемник излучения

Необходимо отметить, что на необычные законы преломления волн, для которых фазовая и групповая скорости направлены в разные стороны, впервые обратил внимание академик Л.И. Мандельштам в 1940 году [6]. В этой работе он указывает также на то, что пространственно-периодическая среда (имелась в виду кристаллическая решетка) является примером среды, показатель преломления которой в некотором диапазоне частот может быть отрицательным.

Использование «левых» сред позволяет, в принципе, создать весьма необычные преломляющие системы (см., например, [7–10]). Примером такой среды является простая пластина толщиной d из «левого» вещества с $n < 0$, находящаяся в воздухе. На рис. 7 показано, что такая пластина может фокусировать в точку В излучение точечного источника А, находящегося на расстоянии $l < d$ от пластины.

Такая плоская пластина обладает удивительными свойствами – у нее отсутствует фокальная плоскость. Это означает, что линза создает объемное изображение предмета, что делает ее похожей на зеркало. Но, в отличие от зеркала, создаваемое изображение действительное, что открывает новые возможности для цветной фотографии. Плоско-параллельная пластина с $\varepsilon = \mu = -1$ является «идеальной» линзой («суперлинза» [8]) поскольку: а) она имеет нулевой коэффициент отражения; б) создается идеальное изображение, так как набег фазы по любым траекториям между объектом и изображением равен нулю (любой луч половину пути проходит в обычной, а половину – в идеальной «левой» среде (рис. 7); фазовые скорости в этих средах равны и противоположно направлены, следовательно, набег фаз вдоль участков траек-

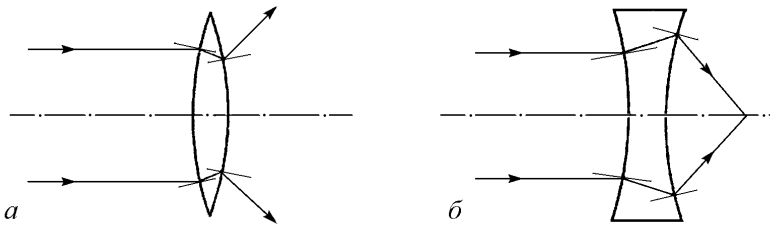


Рис. 8. Ход лучей через линзы из «левого» вещества: *а* – рассеивающая линза; *б* – собирающая линза

тории луча, расположенных в разных средах, компенсируют друг друга; в) разрешающая способность такой линзы превышает предел, обусловленный волновой природой света, то есть детали, различимые на изображении, могут быть намного меньше длины волны λ .

Для обычных линз из «левого» вещества ход лучей показан на рис. 8. Как видно из рисунка, выпуклая линза является рассеивающей, а вогнутая – собирающей.

3. Возможность реализации «левых» сред

Несмотря на то, что «левые» вещества должны обладать такими удивительными свойствами, реальная возможность создания таких веществ, как мы уже говорили выше, появилась лишь в последние годы. Начались интенсивные поиски моделирования «левых» сред на основе композитных структур (метаматериалов) путем чередования элементов, обладающих $\varepsilon < 0$ и $\mu > 0$, и элементов, обладающих $\varepsilon > 0$ и $\mu < 0$. Если размеры таких элементов будут намного меньше длины электродинамической волны λ , то для волны такая композитная структура будет подобна сплошной [5,8,10].

Первые композитные структуры, обладающие в диапазоне сверхвысоких частот ($f = 4.5$ ГГц) свойствами «левого» вещества, были изготовлены путем периодического расположения элементов из проводящего материала на диэлектрической подложке [5], как показано на рис. 9. Трехмерная решетка из тонких прямолинейных проводящих стержней обладает отрицательными эффективными значениями ε , а периодическая система из проводящих элементов различных типов (проволочные кольца с разрывом, спирали и т.д.) обладает отрицательными значениями μ . Период решетки, показанной на рис. 9, равен 2.68 мм. В 2004 году Энтони Грбич (Anthony Grbic) и Джордже Элефтериадис (George Eleftheriades) из университета Торонто экспериментально показали, что можно создать метаматериал с $\varepsilon = \mu = -1$ в

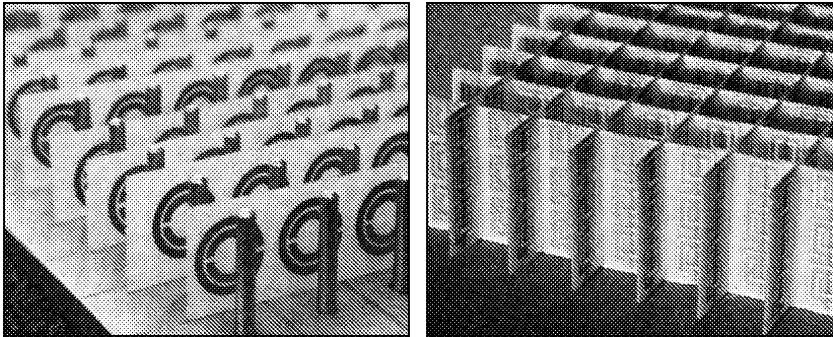


Рис. 9. Композитная структура из проводящих элементов

диапазоне сверхвысоких частот [8]. Их результаты доказали, что в принципе «суперлинзу» можно построить. Но можно ли ее создать в оптическом диапазоне длин волн?

Сложность создания метаматериалов с ϵ , $\mu < 0$ в области оптических длин волн заключается в следующем: а) размеры элементов должны быть порядка нанометров; б) металлы на оптических частотах обладают плохой проводимостью.

В настоящее время в этом направлении ведутся интенсивные исследования, направленные на решение указанных проблем (см., например, [8–10]).

Кроме того, как уже отмечалось выше, поиск «левых» сред можно проводить и среди анизотропных гиротропных сред, примером которых являются ферромагнитные материалы и полупроводники. Такие материалы отличаются тем, что у них имеются, во-первых, подвижные носители, образующие электронно-дырочную плазму, и во-вторых, существует система спинов, обеспечивающих большую магнитную восприимчивость. Однако такие материалы обладают еще очень малой подвижностью носителей, что не позволяет наблюдать в них слабозатухающие волны.

Выводы

Возможность создания метаматериалов с отрицательными значениями ϵ и μ заставляет физиков в настоящее время пересмотреть практически многие основные положения электродинамики (законы преломления, дифракционный предел разрешения и другие).

Создание таких материалов открывает широкие возможности для реализации новых физических идей: создание «идеальных суперлинз», новые возможности для цветной фотографии, способ обойти дифракционный предел позволяет оптической литографии проникнуть в диапазон нанометров и на порядки увеличить плотность записи на оптических дисках и т.д.

Хотя большинство экспериментов в настоящее время выполнено в диапазоне сверхвысоких частот, есть надежда, что будут созданы метаматериалы типа «левых» сред и в оптическом диапазоне.

Работа выполнена в рамках гранта РФФИ (№. 11-02-00057) и гранта Правительства РФ для государственной поддержки научных исследований, проводимых под руководством ведущих ученых в российских образовательных учреждениях высшего профессионального образования (№ 11.G34.31.0030).

Библиографический список

1. *Banerjee B.* An Introduction to Metamaterials and Waves in Composites. New York: CRC Press, 2011.
2. *Sakoda K.* Optical Properties of Photonic Crystals. Berlin: Springer-Verlag, 2001.
3. *Веселаго В.Г.* Электродинамика веществ с одновременно отрицательными значениями ϵ и μ // УФН. 1967. Т. 92, вып. 3. С. 517.
4. Физическая энциклопедия: Т. 1. М.: «Советская энциклопедия», 1988.
5. *Smith D.R., Padilla W.J., Vier D.C., Nemat-Nasser S.C., Schultz S.* Composite medium with simultaneously negative permeability and permittivity // Phys. Rev. Lett. 2000. Vol. 84, № 18. P. 4184.
6. *Мандельштам Л.И.* Лекции по теории колебаний. М.: Наука, 1972.
7. *Блюх К.Ю., Блюх Ю.П.* Что такое «левые» среды и чем они интересны? // УФН. 2004. Т. 174, № 4. С. 439.
8. *Пендри Д., Смит Д.* В поисках суперлинзы // В мире науки. 2006. № 11. С. 14.
9. *Силин Р.А.* Электромагнитные волны в искусственных периодических структурах // УФН. 2006. Т. 175, № 5. С. 562.
10. <http://www.ee.duke.edu/drsmith/>

КОЛЛОИДНОЕ ЗОЛОТО В СВЕТОВОЙ МИКРОСКОПИИ*

Богатырев В.А., профессор, ИБФРМ РАН, Саратов

Строго научное название этой темы – использование плазмонно-резонансных частиц** для диагностики и лечения раковых заболеваний [1]. Сегодня мы будем говорить только об оптических свойствах золотых наночастиц, которые позволяют различать их (визуализировать) на уровне световой микроскопии, на фоне отдельных клеток.

Коллоидное золото это взвесь мельчайших частиц – наночастиц золота в жидкости, чаще всего в воде. Растворы твердых частиц в жидкостях называют *золями*. Частицы, размеры которых составляют десятки нанометров, участвуют в броуновском движении и подчиняются законам диффузии, вследствие чего не оседают. Частицы столь малых размеров не могут быть различимы в обычный световой микроскоп из-за так называемого дифракционного предела разрешения. Однако, если объект освещать таким образом, чтобы в объектив не попадали прямые лучи от источника света, то рассеивающие свет частицы будут видны как яркие точки на темном фоне. Такая микроскопия называется *темнопольной*. Ближайшая аналогия темнопольной микроскопии – вид планет в телескопе на ночном небе.

Основным из оптических свойств плазмонно-резонансных частиц (ПРЧ), приложимых к оптической микроскопии, является необычайно высокая светимость, обусловленная резонансным светорассеянием. Для сферической формы интенсивность рассеяния от одной частицы возрастает пропорционально, примерно, шестой степени ее линейного размера. Яркость свечения ПРЧ определяется интенсивностью светорассеяния, а цвет зависит от спектрального положения плазмонного резонанса. В зависимости от размера и формы наночастицы золота могут преимущественно (резонансно) рассеивать свет в диапазоне от зеленой (длина волны света $\lambda \approx 550$ нм) до ближней инфракрасной области ($\lambda \approx 1500$ нм). Интенсивность светорассеяния заметно возрастает и смещается в длинноволновую область при изменении сферической формы частиц на вытянутую. Такие частицы называют наностержнями (НСт). Наиболее интенсивно эти частицы рассеивают в области так называемого продольного или второго резонанса, соответствующего продольной поляризации частицы. Их часто обозначают с индексом длины волны спектрального положения этого максимума [2].

* © «Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика», 2012, т. 20, № 1.

**Плазмонный резонанс – оптическое свойство, характерное для металлических частиц с размерами меньше примерно 100 нм ($1 \text{ нм} = 10^{-9} \text{ м}$).

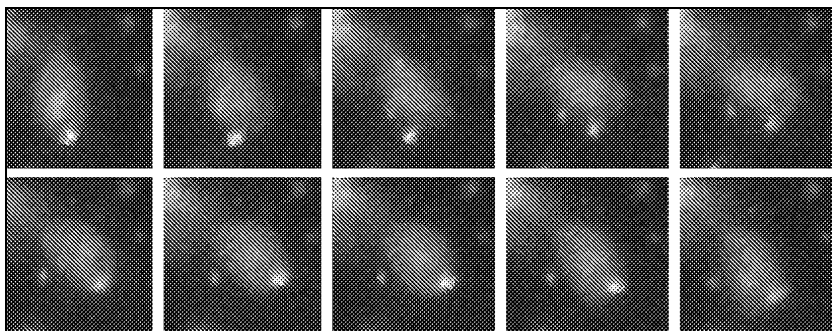


Рис. 1. Серия последовательных темнопольных изображений макрофагов с НСт 640

На рис. 1 приведен фрагмент фильма в покадровой развертке, показывающий поглощение золотых наностержней НСт 640 клетками иммунной системы – *макрофагами**. Отдельные НСт 640 выглядели как темно красные точки на фоне серо-голубого светорассеяния от клеточных структур. Светимость отдельных НСт весьма незначительна, и в образцах сразу после внесения золотые метки были практически не видны. Со временем увеличивалось количество клеток, имеющих яркие золотистые метки (светлое пятно в нижней части клетки), представляющие, по всей видимости, агрегаты НСт. Метки не теряли связи с активно перемещающимися клетками, в отличие от различных после 30 мин инкубации отдельных частиц и агрегатов, совершающих броуновские движения в инкубационной среде.

Анализ отснятого материала показал, что надежно визуализируются как отдельные свободные наночастицы, так и связанные с неподвижными и активно передвигающимися клетками. Однако примененная тогда нами техника не могла дать ответа – находятся ли наночастицы внутри клетки или на ее поверхности?

Кроме естественного любопытства, вопрос о локализации золотых наночастиц внутри или снаружи белых клеток крови имеет практическое значение в понимании механизма формирования иммунного ответа, выработке антител.

В настоящее время факт поглощения ПРЧ макрофагами и некоторыми раковыми клетками надежно установлен во многих научных лабораториях. Актуальными остаются вопросы выяснения путей проникновения наночастиц внутрь клетки.

В этом отношении хочется отметить работу испанских и американских ученых, совсем недавно опубликованную в журнале «Nanomedicine» [3].

*Макрофаг – клетка, обладающая способностью к фагоцитозу (поглощению твердых частиц).

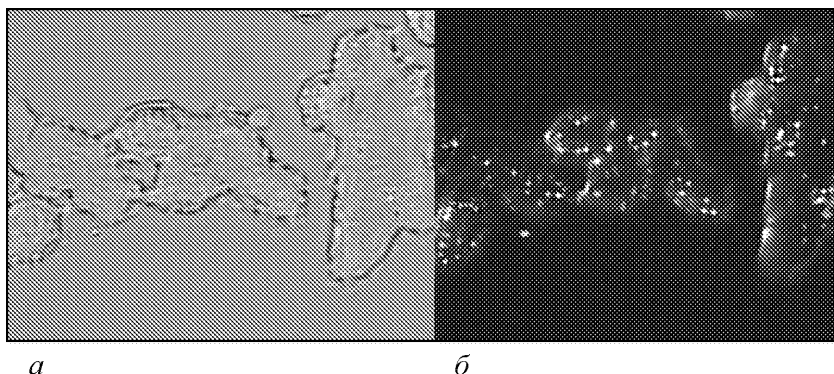


Рис. 2. Клетки HeLa с КЗ-40. Светлое поле проходящий свет (а), темное поле боковое освещение (б). Микроскоп Leica LMD 7000

В этой работе показано, что поглощение золотых сферических наночастиц с диаметрами менее 100 нм происходит как путем *фагоцитоза*, так и *макропиноцитоза** при участии клеточных рецепторов-мусорщиков (*scavenger receptors*).

К сожалению, авторы в статье не приводят микроскопические изображения клеток, однако, можно предположить, что анализ этих изображений был очень непростой задачей. Не случайно в разделе «Материалы и методы» авторы отмечают, что анализ проводили два независимых специально обученных эксперта при использовании стандартных программ обработки цифровых изображений типа «ImageJ» [4]. Дело в том, что препараты исследовали в проходящем свете. Такой способ *микроденситометрических*** исследований вполне приемлем лишь при достаточно больших дозах поглощенных наночастиц.

Гораздо более четкие различия можно получить, используя микроскопию темного поля. На рис. 2, а приведена полученная нами микрофотография раковых клеток человека линии HeLa с частицами коллоидного золота 40 нм в диаметре (КЗ-40) в проходящем свете без какого-либо способа физического контрастирования. Для сравнения на рис. 2, б то же поле зрения снято в режиме темного поля.

Более четкий ответ о внутриклеточной локализации ПРЧ дает конфокальная лазерная сканирующая микроскопия (КЛСМ). Основной прин-

* Пиноцитоз – активное поглощение клеткой жидкости из окружающей среды с формированием в цитоплазме пузырьков, содержащих жидкость. Макропиноцитоз – разновидность пиноцитоза, когда в состав пузырьков включены твердые частицы.

** Денситометрия – измерение плотности, в данном случае – оптической плотности.

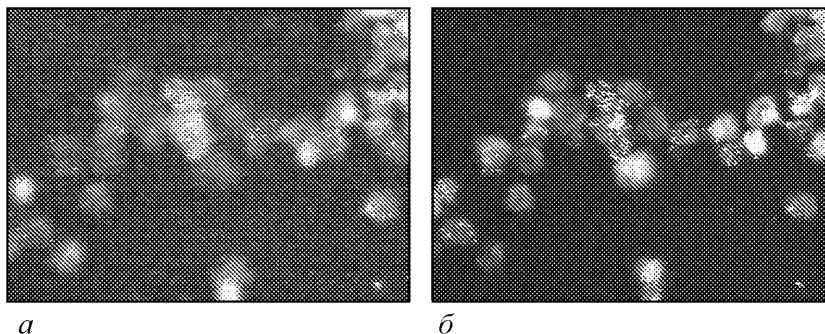


Рис. 3. Флуоресцентная микроскопия клеток HeLa с K3-50 при комбинированном освещении, голубой канал (а), красный канал (б). Микроскоп Leica LMD 7000. Разложение по каналам цветов – программа ImageJ

цип КЛСМ заключается в том, что на фотоприемник попадает только свет, проходящий через специальную диафрагму – пинхол, создавая, таким образом изображение плоскости сканирования, так называемый оптический срез, или z -стек.

Используя КЛСМ и золотые наночастицы, связанные с белком и *флуоресцентным** зондом, мы показали, что ПРЧ способны проникать внутрь животной клетки. Дальнейшие наши усилия были направлены на выявление зависимости между накоплением ПРЧ клетками различных линий и их морфофизиологическими характеристиками: жизнеспособностью, дыхательной активностью. Одним из таких тестов является измерение нарушений барьерной функции наружных клеточных мембран. Для этой цели используют красители, которые могут проникнуть в клетку только при нарушении целостности клеточных оболочек. Например, флуоресцентный краситель пропидий йодистый (PI), проникая в клетку через поврежденную мембрану, связывается с ДНК, интенсивность флуоресценции (красное свечение) при этом резко усиливается.

На рис. 3 приведена микрофотография образца клеток HeLa с золотыми наночастицами 50 нм (K3-50) дополнительно окрашенных PI.

На экране монитора и в окуляры микроскопа мертвые клетки выглядят как ярко красные в отличие от живых – серо-голубых. Разложение цветового изображения на составляющие дает более четкое представление, что у мертвых клеток ярко окрашиваются ядра (в центре рис. 3, б). Золотые метки также более отчетливо видны в красном канале, поскольку рассеива-

*Флуоресценция – вынужденное (холодное) свечение некоторых веществ, возбуждаемое светом более короткой длины волны.

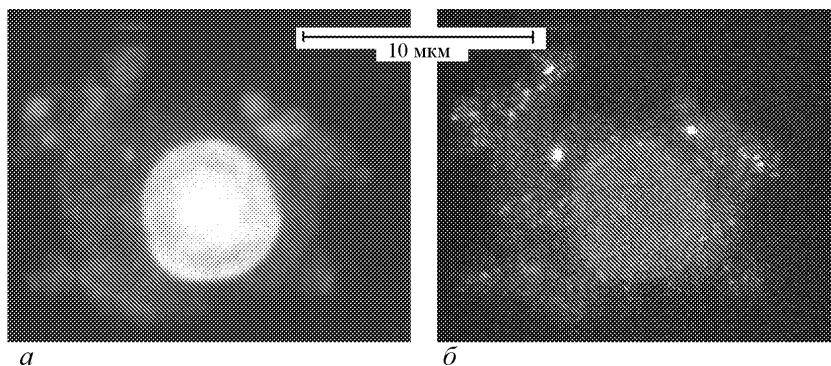


Рис. 4. Флуоресцентная микроскопия клеток HeLa с K3-50. Окраска акрединовым оранжевым. Зеленый канал (а); комбинированное освещение, красный канал (б). Микроскоп Leica LMD 7000. Разложение по каналам цветов – программа ImageJ

ют свет в основном в желто-красной области спектра. Анализ показывает, что золотые метки накапливаются в основном живыми клетками (область выше центра на рис. 3).

Интересные результаты нами были получены при использовании флуоресцентного красителя акрединового оранжевого в качестве *витального красителя**. Особенностью акредина оранжевого является то, что он взаимодействует не только с нуклеиновыми кислотами, но и, хотя в значительно меньшей степени, с белками цитоплазмы [5]. Поэтому мы решили использовать его как контрастирующий краситель для КЛСМ.

В результате первых же экспериментов выяснилось, что даже сравнительно мелкие золотые наночастицы в препаратах окрашенных акрединовым оранжевым надежно выявляются в режиме регистрации светорассеяния (рис. 4). Вероятнее всего это связано с электростатическим взаимодействием катионного акрединового оранжевого с отрицательно заряженной поверхностью золотых наночастиц, в результате чего возрастает их светорассеяние. Анализ этих изображений показывает, что золотые наночастицы накапливаются только в цитоплазме, но не в ядре клетки.

Заключение

Таким образом, золотые наночастицы являются удобным инструментом наблюдения за физиологическими клеточными процессами, хорошей альтернативой и дополнением к флуоресцентным зондам. Они надежно вы-

* Витальные красители используются для прижизненной окраски клеток.

являются методами световой темнопольной и конфокальной лазерной микроскопии.

Параметры жизнеспособности могут быть оценены по нарушению барьерной функции мембран, изменению дыхательной активности, состоянию ядерного аппарата и др. с использованием стандартных цитохимических наборов.

Для системного использования плазмонно-резонансных частиц в микроскопии раковых клеток необходимо проведение планомерных контрольных и калибровочных экспериментов. Тем не менее, как говорят коллеги медики, *прогноз благоприятный!*

Библиографический список

1. Дыкман Л.А., Богатырев В.А., Щеголев С.Ю., Хлебцов Н.Г. Золотые наночастицы: Синтез, свойства, биомедицинское применение. М: Наука, 2008. 319 с.
2. Алексеева А.В., Богатырев В.А., Хлебцов Б.Н., Мельников А.Г., Дыкман Л.А., Хлебцов Н.Г. Золотые наностержни: Синтез и оптические свойства // Коллоид. журн. 2006. Т. 68. С. 725.
3. Franca A., Aggarwal P., Barsov E.V., Kozlov S.V., Dobrovolskaia M.A., Gonzalez-Fernandez A. Macrophage scavenger receptor: A mediates the uptake of gold colloids by macrophages in vitro // Nanomedicine (Lond). 2011. Vol. 6, № 7. P. 1175.
4. URL: <http://rsbweb.nih.gov/ij/>
5. Сайфитдинова А.Ф. Двумерная флуоресцентная микроскопия для анализа биологических образцов / Учебно-методическое пособие. СПб: СОЛО, 2008. 72 с.

САМООРГАНИЗАЦИЯ И ОБРАЗОВАНИЕ СТРУКТУР*

*Храмов А.Е., профессор кафедры
электроники, колебаний и волн ФНП СГУ*

В данной лекции мы поговорим с вами о таком новом междисциплинарном направлении в современной нелинейной физике, как самоорганизация открытых систем [1–5]. В настоящее время усилия большого числа исследователей в самых различных областях естествознания направлены на изучение феноменов самоорганизации, которые позволяют объяснить самые различные явления, наблюдающиеся в окружающем нас мире. О чем же будет данная лекция? Если не останавливаться на частностях, то в нашей лекции мы обсудим три основных вопроса:

- самоорганизация (возникновение структур или паттернов, рост «упорядоченности», эволюция) в открытых неравновесных системах,
- физика нелинейных открытых систем,
- самоорганизация и образование структур, методы изучения этих явлений в биологических и социальных системах.

Однако прежде чем переходить непосредственно к анализу феноменов самоорганизации давайте остановимся на вопросе: а что же изучает физика открытых систем? Для теории самоорганизации и физики открытых систем наиболее интересны и важны сложные макроскопические системы, содержащие упорядоченные структуры, в которых порядок рождается из хаоса. Таких систем много, и они разнообразны. Среди наиболее активно исследуемых:

- конвективные и гидродинамические ячейки,
- вихри в атмосфере и океане,
- оптические квантовые генераторы (лазеры),
- химические реакции с временной и пространственной периодичностью,
- живые организмы и экосистемы,
- социальные системы.

Все имеющиеся экспериментальные данные и результаты наблюдений показывают, что для существования в системе упорядоченных структур (исключая равновесные структуры типа кристалла) система должна быть открытой, то есть должна обмениваться с окружающей средой энергией W

* © «Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика», 2012, т. 20, № 1.

и энтропией S , переносимыми средой и/или излучением, и, что не менее важно, информацией* I .

Классическими примерами самоорганизации, которые можно найти практически в любом учебнике по теории самоорганизации и физике открытых систем, являются так называемые «ячейки Бенара», «рябь Фарадея», реакция Белоусова–Жаботинского и возникновение генерации в оптическом квантовом генераторе. Рассмотрим некоторые из них более подробно.

Ячейки Бенара – это обычно шестигранные призматические ячейки, возникающие в подогреваемом снизу слое жидкости. Если слой некоторой достаточно вязкой жидкости снизу сильно нагреть, то между нижней и верхней границами жидкости возникает разность, или, как говорят физики, градиент температур (рис. 2, а). При малых градиентах температуры жидкость остается в покое, а тепло будет передаваться за счет теплопроводности. При превышении разности температур некоторого критического значения в жидкости начнется конвекция. Режим неподвижной теплопроводящей жидкости становится неустойчивым, и на смену ему приходит новый устойчивый режим, который теперь становится намного сложнее, с точки зрения динамики системы, – жидкость разбивается на множество конвективных ячеек, которые (если нет внешних возмущений) принимают форму правильных шестиугольников (рис. 2, б). В центре каждой ячейки жидкость движется вверх, а на краях – вниз (рис. 2, в). Важно то, что размер и форма ячеек не зависят от формы и размера сосудов, если он достаточно большой, ячейки искажаются только на границах кюветы.

Рябь Фарадея – характерные структуры, формируемые капиллярными волнами, возбуждаемыми на поверхности жидкости в кювете, совершающей вертикальные колебания с определенной частотой и амплитудой

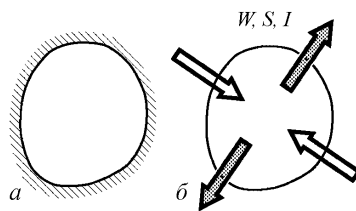


Рис. 1. Различия между «закрытыми» (а) и «открытыми» (б) системами: последние обмениваются с окружающей средой энергией W , энтропией S , переносимыми средой и/или излучением, и информацией I

*Понятия «энтропия» и «информация» в естественных науках тесно связаны между собой. Энтропия характеризует меру беспорядка системы, состоящей из многих элементов. В частности, применительно к статистической физике энтропия – мера вероятности осуществления какого-либо макроскопического состояния; в теории информации – мера неопределенности какого-либо опыта (испытания), который может иметь разные исходы. Последнее показывает, что энтропия, фактически, характеризует количество информации. В действительности, определение информации Шеннона в информатике совпадает со статистическим определением энтропии, данным Больцманом.

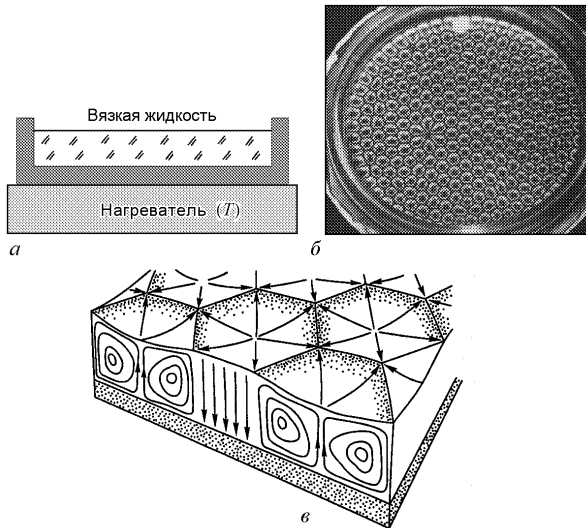


Рис. 2. Иллюстрация к описанию ячеек Бенара: *a* – схема, поясняющая экспериментальную установку, для наблюдения ячеек Бенара – температура нагревателя T является здесь основным управляющим параметром; *б* – фотография сформированных ячеек Бенара в силиконовом масле в кювете, подогреваемой снизу (фотография взята из альбома [6]); *в* – линии тока жидкости в режиме бенаровской конвекции

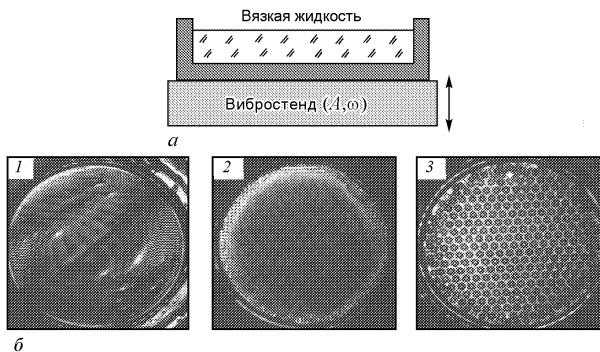


Рис. 3. Иллюстрация к описанию параметрически возбуждаемых капиллярных волн на поверхности жидкости – рябь Фарадея: *a* – схема, поясняющая экспериментальную установку, частота ω и амплитуда A вибрации являются основными управляющими параметрами, от которых зависит форма ячеек; *б* – примеры ячеек Фарадея, образующихся на поверхности жидкости при различных частотах и амплитудах внешнего воздействия: 1 – длинные валики, 2 – квадратная решетка, 3 – шестиугольные («сотовые») структуры (из работы [8])

(что соответствует изменениям с определенной частотой параметра системы – ускорения свободного падения g). Схема установки для наблюдения ряби Фарадея показана на рис. 3, а. Впервые наблюдал данное явление гениальный экспериментатор Майкл Фарадей в середине XIX века, и его эксперименты являются одними из первых по наблюдению самоорганизации в динамических системах. Действительно, как писал Фарадей в 1831 году: «Если поместить ртуть на вибрирующую оловянную тарелку, то получается очень красивая картина в отраженных солнечных лучах» (цитируется по [7]). Фарадей проводил эти эксперименты с различными жидкостями (водой, чернилами, молоком, яичным белком). В своих экспериментах он использовал кюветы различной формы (круглой, квадратной, прямоугольной) и выяснил, что практически всегда рябь образует квадратную решетку, которая слегка деформируется у границы кюветы. Фарадей исследовал и процесс возникновения структуры. Он показал, что пространственная структура капиллярной ряби не зависит ни от граничных и начальных условий, ни от сорта жидкости. Как видно из рис. 3, б, в зависимости от управляющих параметров системы (амплитуды и частоты внешнего воздействия, свойств жидкости) на поверхности жидкости могут образовываться как регулярные структуры квадратной формы, так и беспорядочно меняющиеся во времени и пространстве волны.

Реакция Белоусова–Жаботинского – колебательная химическая реакция в гомогенном растворе, открытая в 1950 году Б.П. Белоусовым и позднее подробно исследованная А.М. Жаботинским. При реакции Белоусова–Жаботинского раствор регулярно меняет свою окраску от бесцветной к желтой и далее снова к бесцветной и т.д. Период колебаний в зависимости от температуры и концентрации реагируемых веществ находится в пределах 10–100 с, что делает ее удобной для наблюдения. Следует отметить, что реакция Белоусова–Жаботинского, с точки зрения теории колебаний, в отличие от вышерассмотренных примеров, является автоколебательным процессом. Открытие Белоусова ждала непростая судьба: химики и биохимики вначале дружно отвергли возможность такой реакции и только позже данное открытие было признано и стало активно исследоваться, а сама реакция стала одной из эталонных моделей временной диссипативной структуры в физике открытых систем и теории самоорганизации. Когда реакция протекает в тонком неперемешиваемом слое, например в чашке Петри, можно наблюдать различные типы волновой активности, в частности, спиральные волны (рис. 4), то есть в этом случае можно говорить о пространственно-временной диссипативной структуре.

Что объединяет между собой все рассмотренные выше системы? Все они были макроскопическими открытыми системами, состоящими из большого числа элементарных объектов (атомов и молекул), которые можно принять за элементы структуры. Именно такие системы являются основными объектами, которые изучает теория самоорганизации. Элементы структур могут быть как микроскопическими (атомы и молекулы в физических и химических системах), так и малыми, оставаясь все же макроскопическими (макромолекулы в полимерах, клетки в биологических структурах, отдельные особи в биологических популяциях). Также они могут быть и не малыми телами, например, «элементарные» объекты в социологии – человек или даже отдельная группа людей («малая» группа). Благодаря сложности макроскопических открытых систем, в них возможно образование различ-

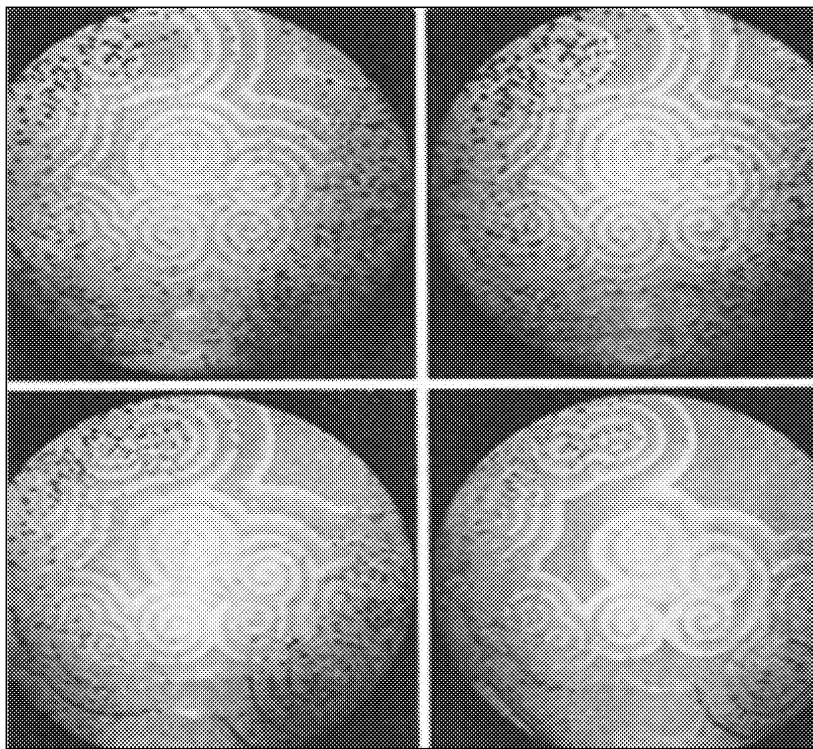


Рис. 4. Некоторые конфигурации, возникающие при реакции Белоусова–Жаботинского в тонком слое в чашке Петри

ного рода диссипативных структур (или «паттернов»*), и диссипация здесь играет конструктивную роль. Это кажется, на первый взгляд, удивительным, так как понятие диссипации ассоциируется с затуханием различного рода движений, с рассеянием энергии, с потерей информации. Тем не менее, диссипация необходима для формирования паттернов в открытых системах!

Чтобы подчеркнуть это обстоятельство, Илья Романович Пригожин ввел термин «*диссипативные структуры*», который объединяет все виды паттернов: временные (автоколебания в генераторе и реакции Белоусова–Жаботинского), пространственные (ячейки Бенара на поверхности жидкости), пространственно-временные структуры (автоволны на поверхности жидкости, паттерны в электронных потоках и т.д.).

Илья Романович Пригожин (1917–2003) – бельгийский физик и химик, лауреат Нобелевской премии по химии за работы по неравновесной термодинамике, диссипативным структурам и сложным системам. Основная масса его работ посвящена неравновесной термодинамике и статистической механике необратимых процессов.

Илья Пригожин родился 25 января 1917 года в Москве. В 1921 году семья эмигрировала из России в Западную Европу. В 1942 году Илья Пригожин окончил университет Брюсселя (Universite Libre de Bruxelles).

С 1961 по 1966 год Пригожин сотрудничал с институтом Ферми в Чикаго. В 1967 году в городе Остин (штат Техас) Пригожин основал Центр по изучению сложных квантовых систем (Center for Complex Quantum Systems). Одновременно, в 1967 году Пригожин возвращается в Бельгию, где он становится директором Центра статистической механики и термодинамики (Center for Statistical Mechanics and Thermodynamics).

Сложность открытых систем предоставляет широкие возможности для существования в них коллективных явлений. Подчеркивая определяющую роль кооперации при образовании диссипативных структур, Герман Хакен ввел понятие «*синергетика*», что означает – *коллективное действие* [9].



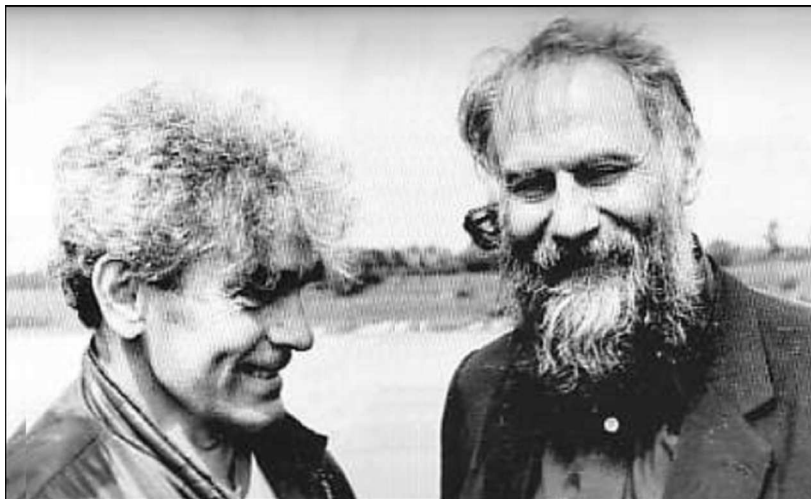
*Термин «паттерн» происходит от английского *pattern* – *структура* и является синонимом русского термина «структура».

По Юрию Львовичу Климонтовичу: «Синергетика – не самостоятельная научная дисциплина, а *новое междисциплинарное научное направление*, цель синергетики – выявление общих идей, методов и общих закономерностей в самых различных областях естествознания, а также социологии и даже лингвистики; более того, в рамках синергетики происходит кооперирование различных специальных дисциплин» [10].

Хакен Герман (род. 12 июля 1927 г.) – немецкий физик-теоретик, основатель синергетики. Изучал физику и математику в университетах Галле (1946–1948) и Эрлангена (1948–1950), получив степени доктора философии и доктора естественных наук. С 1960 г. является профессором теоретической физики университета Штутгарта. До ноября 1997 г. был директором Института теоретической физики и синергетики университета Штутгарта. С декабря 1997 г. является почетным профессором и возглавляет Центр синергетики в этом институте, а также ведет исследования в Центре по изучению сложных систем в университете Флориды (Бока Рэтон, США).

Юрий Львович Климонтович (1924–2002) – крупнейший физик-теоретик в области статистической физики и кинетической теории плазмы. Родился 28 сентября 1924 г. в Москве, профессор Московского государственного университета.

Основные результаты исследований Ю.Л. Климонтовича в области физики открытых систем собраны в трехтомной монографии: Климонтович Ю.Л. Статистическая теория открытых систем. Т. 1. М.: Янус, 1995; Т. 2. М.: Янус, 1999; Т. 3. М.: Янус, 2001.



Ю.Л. Климонтович и Г. Хакен во время прогулки на пароходе. Конференция «Синергетика-83» в Пущино.

Итак, мы дали краткое введение в физику открытых систем. Очень важной сферой приложений усилий специалистов в физике открытых систем являются биология, экология, биофизика, где подходы и методы теории самоорганизации могут помочь в объяснении и понимании многих известных феноменов живой природы.

Давайте рассмотрим два примера образования структур в биологических популяциях, а именно:

- формирование плодового тела у миксамеб *Dictyostelium discoideum*,
- закладка основы термитника.

Пример 1. *Миксоформы* – это микроорганизмы, которые обнаруживают самую простую многоклеточность. Выделяют миксоформы как в царстве прокариот (миксобактерии), так и в царстве грибов (миксомицеты, слизевики, слизевые грибы и акразиевые). Принадлежа к разным царствам, миксоформы ведут себя очень сходно в том смысле, что индивиды часть жизни проводят как одноклеточные, а затем объединяются в колонию (образуют *паттерн*), на которой вырастают плодовые тела – яркие грибочки. Среди различных миксоформ наиболее изученными являются миксамебы *Dictyostelium discoideum*.

На рис. 5 показан жизненный цикл миксамеб, который состоит из следующих стадий: споры, автономные амебы, колонии амеб, плодовое тело, цистоспор. Питаются миксамебы только в амебоидной стадии. В это время амебы равномерно рассредоточены по субстрату. При истощении корма амебы образуют колонию. Формирование плодового тела начинается следующим образом. Голодающие амебы начинают продуцировать циклический аденозинмонофосфат (цАМФ).^{*} Другие амебы, получившие сигнал в виде цАМФ, начинают: 1) перемещаться по градиенту его концентрации, 2) продуцировать цАМФ, 3) продуцировать фосфодиэстеразу (разрушителя цАМФ). В результате случайных флуктуаций концентрации цАМФ возникают первичные сгущения амеб, одно из которых становится *центром* будущей колонии (центром формирующегося паттерна).

Каков механизм формирования паттерна – сгущения миксамеб? В его основе лежит механизм формирования *положительной обратной связи*^{**}. Действительно, концентрация цАМФ пропорциональна размеру сгущения

^{*}Циклический аденозинмонофосфат (циклический АМФ, цАМФ, сАМР) – производное нуклеотида аденозинтрифосфата, выполняющий в организме роль вторичного посредника, используемого для внутриклеточного распространения сигналов некоторых гормонов (например, адреналина), которые не могут проходить через клеточную мембрану

^{**}Положительной обратной связью называют такую обратную связь, которая способствует росту возмущений в системе.

(колонии) амёб. Так как амёбы движутся по градиенту концентрации цАМФ, одновременно продуцируя цАМФ, то перед нами система с положительной обратной связью: одно из сгущений, образовавшееся из первичной флуктуации концентрации цАМФ, разрастается и образуется колония, на которой далее вырастает плодовое тело.

Результаты экспериментального исследования формирования плодового тела, проведенного в Мюнхенском зоологическом институте (Ludwig-Maximilians-Universität München), показывают, что на этапе формирования колонии из индивидуальных амёб в системе наблюдается возникновение спиральных волн (рис. 5). Это обусловлено взаимодействием цАМФ с фосфодиэстеразой, что приводит к незатухающим колебаниям концентраций реагентов вокруг точки неустойчивого равновесия. После того, как все амёбы собираются в единую колонию, волны движения амёб затухают, и сформировавшаяся колония перемещается как целое в поисках подходящего субстрата и, найдя его, формирует плодовое тело.

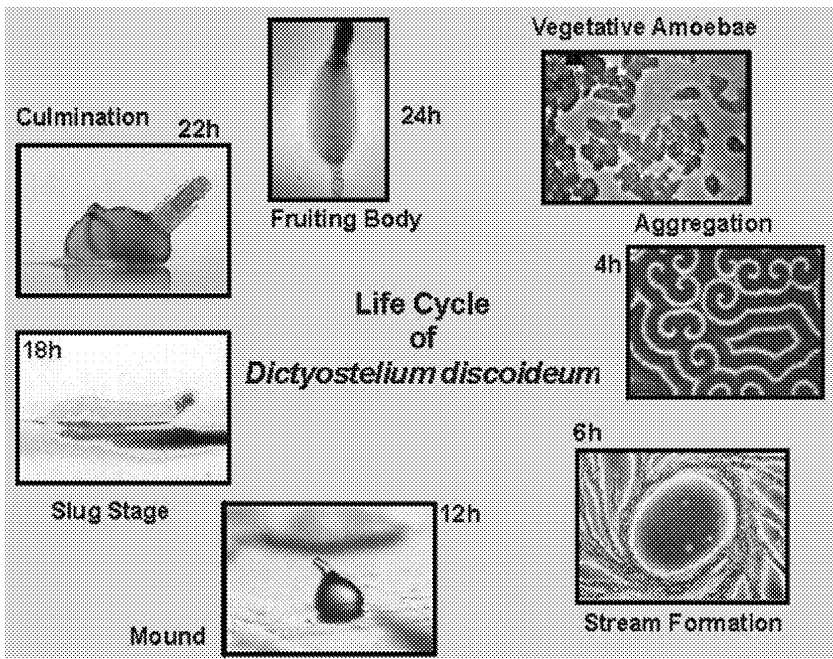


Рис. 5. Жизненный цикл и формирование плодового тела у миксамебы *Dictyostelium discoideum* (рисунок взят с [www-сайта: http://www.zi.biologie.unimuenchen.de/](http://www.zi.biologie.unimuenchen.de/))

Пример 2. Второй пример образования структур из популяционной биологии, который мы рассмотрим здесь, – это основа закладки термитника. Напомним, что *термиты* (лат. *isoptera*) – отряд общественных насекомых с неполным превращением. Как и все общественные насекомые, термиты живут в колониях, состоящих из каст. Число зрелых особей в колониях может достигать от нескольких сотен до нескольких миллионов. Типичная колония состоит из личинок (нимф), рабочих, солдат и репродуктивных особей. Термиты-рабочие занимаются нахождением, сбором и хранением пищи, заботой о потомстве, строительством и ремонтом колонии. Рабочие – единственная каста, способная переваривать целлюлозу, благодаря особым кишечным микроорганизмам – симбионтам. Именно рабочие занимаются кормлением всех остальных термитов. Своими впечатляющими размерами колонии также обязаны термитам-рабочим.

Колонии термитов живут в термитниках, стены которых строятся из комбинации экскрементов, измельченной древесины и слюны. Некоторые виды создают настолько прочные сооружения, что при попытке их разрушить ломаются даже автомашины. Размеры колоний некоторых африканских термитников таковы, что в их тени прячутся слоны. В гнезде предусмотрены места для разведения грибковых садов, содержания яиц и молодых личинок, репродуктивных особей, а также обширная сеть вентиляционных туннелей, которые позволяют поддерживать внутри термитника практически постоянный микроклимат. Кроме того, иногда имеются также помещения для термитофилов – животных, сосуществующих с термитами в симбиозе.

Как происходит закладка нового термитника? На начальной стадии закладки основания гнезда термиты на выбранное место приносят и беспорядочно разбрасывают комочки земли. Каждый комочек пропитан гормоном, привлекающим других термитов. Случайное скопление комочков, возникающее в какой-либо точке, создает флуктуацию концентрации гормона. Возросшая плотность термитов в окрестности этой точки приводит к нарастанию флуктуации (рис. 6, *а*). Процесс движения и концентрации термитов продолжается, заканчиваясь возникновением «опоры» гнезда (термитника). Число таких опор может быть несколько, расстояние между ними определяется радиусом распространения гормона. Мы опять имеем дело с вышеописанным механизмом *положительной обратной связи*, который приводит к росту начального возмущения.

Специальные эксперименты показали, что нарушение гормонального механизма положительной обратной связи приводит к тому, что процесс возведения термитника становится «хаотичным» (рис. 6, *б*). Действительно, распыливание вещества, подавляющего восприятие гормона у термитов, приводит к тому, что термиты начинают разбрасывать комочки случайным

образом по территории будущего гнезда, так что в итоге все пространство оказывается однородным образом заполнено гормоном и опоры для будущего термитника не возникает.

Таким образом, возникновение термитников снова определяется самоорганизацией в биологической популяции, заключающейся в формировании и «усилении» (за счет положительной обратной связи) пространственной неоднородности популяции на небольшом ареале.

Перейдем теперь к еще очень важному направлению исследований на стыке физики открытых систем и биологии – науке, изучающей мозг. Следует отметить, что изначально термин *паттерн* пришел в нелинейную динамику и физику открытых нелинейных систем от исследователей, работающих в этой научной области. С. Спрингер и Г. Дейч в книге «Левый мозг, правый мозг» (М.: Мир, 1983) пишут: «Саган характеризует правое полушарие как опознающее устройство, предназначенное для поиска паттернов (иногда реальных, иногда воображаемых) в поведении людей, а также в природных событиях. Эмоциональный тонус правого полушария таков, что он подозревает существование тайны не только там, где она есть, но и там, где ее нет. Для критического анализа создаваемых им паттернов и

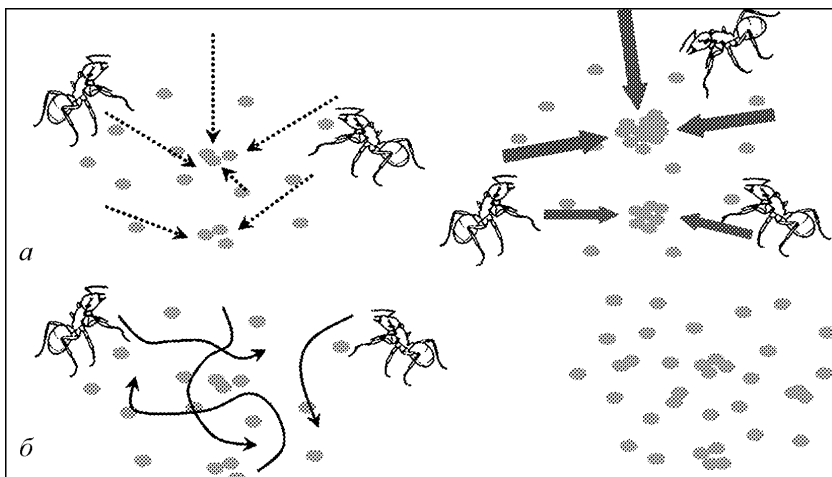


Рис. 6. *а* – механизм закладки нового термитника, основанный на механизме положительной обратной связи. Стрелками показаны направления движения термитов по градиенту концентрации гормона. *б* – результаты разрушения «гормонального» механизма, реализующего положительную обратную связь: движения термитов беспорядочны, областей повышенной концентрации гормона не возникает

для проверки соответствия их реальности ему необходимо левое полушарие... Поиск паттернов без критического анализа и жесткий скептицизм без поиска паттернов – это антиподы совершенной науки. Эффективный поиск знания нуждается в обеих функциях». С их мнением перекликается более ранняя работа Грея Уолтера. В своей книге «Живой мозг» (М.: Мир, 1966) он отмечает: «Понятие паттерн подразумевает любую последовательность явлений во времени или любое расположение предметов в пространстве, которое можно отличить от другой последовательности или другого расположения или сравнить с ними... Вообще говоря, можно считать, что науки возникают в результате поиска паттернов, а искусства – в результате создания паттерна, хотя между поисками и созданием паттерна существует более тесная связь, чем обычно полагают».

С точки зрения нейробиологии, человеческий мозг – сложнейший из известных материальных объектов. Он состоит из приблизительно $2 \cdot 10^{10}$ нейронов, каждый из которых образует в среднем 10^5 связей с другими нервными клетками, большинство из которых также расположено в коре головного мозга. Одновременно в головном мозге работает порядка 10^7 – 10^8 нейронов, которые динамически образуют распределенные нейронно-клеточные популяции. Очень точно написал о возможностях моделирования и анализа поведения головного мозга Юлий Александрович Данилов [11]:

«Головной мозг человека по праву можно считать сложной системой, какого бы определения сложности мы ни придерживались. Ясно, что детальное описание активности каждого из нейронов – занятие бесперспективное и довольно бессмысленное. Даже если бы такое описание удалось реализовать, то обилие информации препятствовало бы сколько-нибудь рациональной ее обработке и использованию...»

Не менее сложными объектами для исследования служат электрические и магнитные сигналы, свидетельствующие об активности головного мозга.

И в случае анализа структуры головного мозга, и в случае анализа электро- и магнито-энцефалограмм необходимо прибегнуть к так называемому «сжатую информации»...»

Ситуация оказывается очень схожей с описанием процессов в газах. Серьезный прогресс в построении молекулярно-кинетической теории произошел тогда, когда Людвиг Больцман отказался от попытки точного описания (с точки зрения механики) движения частиц в газе. Понятно, что это невозможно: ведь не существует даже точного решения для задачи трех тел. Больцман пошел по пути радикального изменения модели рассматриваемой системы, представив газ как некоторую сплошную среду в 6-мерном фазо-

вом пространстве координат и скоростей. Тем самым он отказался от задания координат и скоростей каждой частицы газа, а задал состояние системы интегральным образом – функцией распределения частиц в 6-мерном фазовом пространстве. Можно сказать, что при таком описании информации произошла операция «сжатия информации»: специалисты в области статистической физики отказались от описания динамики индивидуальных элементов, образующих большой «ансамбль», а описывают усредненные характеристики этого ансамбля.

Следует признать, что подобный подход может быть весьма эффективным и при анализе и понимании функционирования головного мозга.

Юлий Александрович Данилов (1936–2003) – Юлий Александрович Данилов родился в Москве в 1936 году. Окончил механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова в 1963 году. После окончания университета был принят на работу в Институт атомной энергии им. И.В. Курчатова (в настоящее время Российский научный центр «Курчатовский институт»), где проработал до последнего дня. Ю.А. Данилов создал и прочитал ряд оригинальных курсов по современным методам математической физики, статистической обработке экспериментальных данных и истории естествознания. Сфера его научных интересов простиралась от симметрии в физике и нелинейной динамики до философии и истории науки. Для Ю.А. Данилова практически не существовало лингвистических барьеров – он владел почти всеми европейскими языками, а также латинским и древнегреческим. Им опубликовано и переведено более 200 научных и научно-популярных статей, в его переводе вышло более 100 книг. Много лет участвовал



в переводе и издании трудов А. Эйнштейна, Г. Кирхгофа, А. Пуанкаре, В. Паули, в переводе и В. Гейзенберга, У. Р. Гамильтона, Д. Гильберта, вышедших в свет в серии «Классики науки». Он был постоянным автором журналов «Знание–сила», «Природа», «Химия и жизнь», «Квант», «Семья и школа», членом редколлегии журнала «Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика», неизменным лектором на ежегодных школах «Нелинейные дни в Саратове для молодых» и нижегородских школах «Нелинейные волны», создал серию научно-популярной литературы в издательстве «Мир».

В настоящее время выделилось новое междисциплинарное научное направление, получившее название *нейронаука* (*neuroscience*), которое направлено на изучение фундаментальных принципов работы мозга в целом, ансамблей нейронов и т.д. для объяснения феноменов мышления, памяти, интеллекта и сознания. Ключевая проблема нейронауки тесно связана с проблемами физики открытых систем и заключается в выявлении принципов самоорганизации и образования паттернов в больших функциональных системах, состоящих из колоссального числа элементов (нейронов) и упорядочивание их астрономических степеней свободы. Успешные исследования в области нейронауки возможны только на стыке наук о мозге с математикой, физикой, химией, компьютерными науками, а также лингвистикой, философией и т.д.

Одним из интересных пионерских проектов в нейронауке стал проект «Blue Brain» – первая попытка прямого моделирования активности головного мозга из «первых принципов», то есть создания модели некоторой части головного мозга, содержащей число модельных нейронов соизмеримое с реальным числом нейронов (сайт проекта: <http://bluebrain.epfl.ch/>). Реализация этого проекта происходит на базе Швейцарского политехнического университета (в Лозанне), в рамках которого используется суперкомпьютер Blue Gene, разработанный фирмой IBM для моделирования ансамбля нейронов колонки неокортекса.

Неокортекс – это новая область коры головного мозга, которая у низших млекопитающих только намечена, а у человека составляет основную часть коры. Новая кора располагается в верхнем слое полушарий мозга и отвечает за высшие нервные функции (сенсорное восприятие, выполнение моторных команд, пространственную ориентацию, осознанное мышление и у людей речь). Неокортекс у человека содержит порядка 18–25 миллионов нейронов (у мужчин – 20–25 миллионов, у женщин – 18–20 миллионов). Структура неокортекса относительно однородна и насчитывает шесть горизонтальных слоев нейронов, отличающихся по типу и характеру связей. Вертикально нейроны объединены в так называемые нейронные колонки, которые являются структурными единицами неокортекса. Одна колонка неокортекса содержит порядка 60–100 тыс. нейронов, дендриты которых проходят через всю высоту колонки. Для моделирования процессов в головном мозге в рамках проекта Blue Brain в качестве базовой системы была выбрана колонка неокортекса крысы, которая содержит намного меньшее количество нейронов – порядка 10 тысяч.

В конце 2006 года впервые удалось смоделировать одну колонку неокортекса молодой крысы. При этом использовался один компьютер Blue

Gene и было задействовано 8192 процессоров для моделирования 10000 нейронов. То есть практически один процессор моделировал один нейрон. Для соединения нейронов было смоделировано порядка $3 \cdot 10^7$ синапсов. Залогом успеха данного проекта стал суперкомпьютер Blue Gene, который разрабатывается фирмой IBM с 1999 года, с целью создания суперкомпьютера с производительностью в несколько пфлопс/с для решения задач биомолекулярного и нейро-моделирования*. В начале 2008 году запущена в эксплуатацию система Blue Gene с пиковой производительностью 3 пфлопс/с.

Реализация данного проекта привела к разработке новых интересных решений для компьютерного моделирования нейросетевых моделей. В частности, были разработаны: *новая модель сеточной структуры*, которая автоматически, по запросу, генерирует нейронную сеть по предоставленным биологическим данным; *новый процесс моделирования и саморегуляции*, который перед каждым расчетом автоматически проводит систематическую проверку и калибровку модели для более точного соответствия биологической природе.

Все это позволило создать первую модель колонки неокортекса клеточного уровня, построенную исключительно по биологическим данным. Возникли и определенные проблемы, связанные с тем, о чем писал Ю.А. Данилов: с невозможностью корректно проанализировать и представить огромный объем информации, содержащий сведения о динамике каждого нейрона. Так, «компьютерный визуальный образ» колонки неокортекса (10000 нейронов) имеет объем порядка 100 Гб. Модель колонки с отображением электрической активности имеет объем порядка 150 Гб. Был разработан специальный интерфейс 3D визуализации, который позволял представить информацию электрической активности нейронов и выявлять наиболее интересные зоны. На рис. 7 показана характерная картина, получающаяся в результате расчета динамики колонки неокортекса, где интенсивностью серого цвета показана степень возбуждения того или иного нейрона. Важно, что в исследованиях существует возможность сравнивать результаты, полученные в результате компьютерного моделирования, с опытными нейрофизиологическими данными, которые получают путем измерения

*FLOPS (акроним от англ. Floating point Operations Per Second, флопс) – величина, используемая для измерения производительности компьютеров, показывающая, сколько операций с плавающей запятой в секунду выполняет данная вычислительная система. Для сравнения вычислительной мощности суперкомпьютера Blue Gene с более привычными вычислительными системами можно привести следующие данные: персональный компьютер Intel Core 2 Duo E8400 600 МГц – 18.6 Гфлопс/с; игровая приставка Sony PlayStation 2 – 6.2 Гфлопс/с; калькулятор примерно 0.1 флопс/с; человек примерно 0.001–0.01 флопс/с.

микроэлектроэнцефалограммы колонки у лабораторного животного.

Как отмечает в своем пресс-релизе руководитель проект профессор Генри Макрам (Henry Markram), методы моделирования и анализа нейронных систем, разработанные и апробированные в ходе выполнения проекта, найдут широкое применение в дальнейших фундаментальных исследованиях в нейронауке и прикладных исследованиях в медицине. Фактически, этот проект – первая успешная попытка полномасштабного моделирования нейрофизиологической системы на базе модели клеточного уровня, построенная исключительно по биологическим данным. Эти исследования помогут разобраться с многими аспектами динамики нейронной сети головного мозга, а также с лечением тех или иных нервных заболеваний.

Но наряду с таким полномасштабным моделированием функций и поведения каких-то элементов нейронных ансамблей головного мозга, необходимо и построение более простых моделей тех или иных аспектов функционирования центральной нервной системы с привлечением методов и подходов физики открытых систем и теории самоорганизации. Здесь стоит согласиться с Ю.А. Даниловым, который полагал, что без операции «сжатия информации», без построения простых математических моделей, описывающих динамику и функционирование головного мозга, без синергетического подхода, под которым он понимал теорию явлений самоорганизации, невозможно понять, как же функционирует головной мозг высших млекопитающих и человека. В настоящее время все больше исследователи переключают свое внимание на подобные задачи и все шире привлекают методы и подходы физики открытых систем к изучению функционирования нейронных ансамблей (см., например, замечательные обзоры и книги [12–16]).

Следует отметить, что подходы, развитые в современной нелинейной физике, давно используют специалисты, занимающиеся изучением электри-

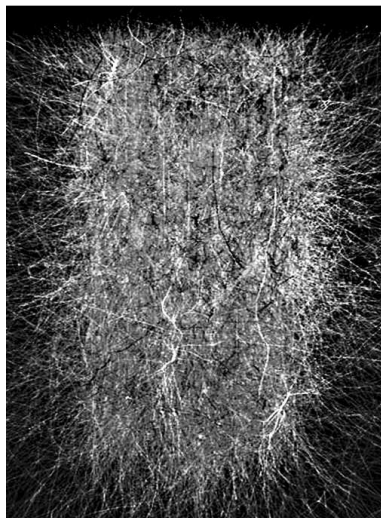


Рис. 7. Результаты 3D визуализации электрической активности колонки неокортекса. Интенсивностью серого цвета показана степень возбуждения того или иного нейрона (рисунок взят с сайта <http://bluebrain.epfl.ch/>) ©BBP/EPFL

ческой и магнитной активности головного мозга. Наиболее простой, наглядный, широко используемый и исторически возникший первым способ наблюдения активности головного мозга является регистрация электроэнцефалограмм (ЭЭГ) – электрического потенциала, зарегистрированного непосредственно на поверхности головного мозга или сквозь покрывающие его ткани. При проведении экспериментов на черепе испытуемого крепятся электроды, регистрирующие колебания напряжения. Показания каждого электрода представляются в виде некоторой функции, выражающей зависимость изменения напряжения от времени (то есть упомянутые выше ЭЭГ). В экспериментах на животных существует возможность имплантировать электроды непосредственно в мозг, регистрируя сигналы из глубинных областей мозга, скрытых корой головного мозга, что невозможно в опытах на человеке, исходя из этических норм. Особую роль электроэнцефалография играет при диагностике и лечении различных нервных заболеваний, когда на ЭЭГ появляются характерные паттерны, позволяющие идентифицировать тот или иной тип патологии мозга [17]. Данные типичные паттерны являются отражениями той или иной степени синхронизации больших ансамблей нейронов коры головного мозга. Далее в рамках исследований подобных типов патологического поведения специалисты-нейрофизиологи изучают только зафиксированные на ЭЭГ паттерны. Это означает, что из рассмотрения исключается поведение всего нейронного ансамбля коры головного мозга, а анализируется только динамика кластера, образованного нейронами, демонстрирующими синхронное поведение. Следует отметить, что подобные нейроны не обязательно располагаются локально в одном месте коры мозга, а могут находиться в самых различных частях мозга, учитывая разнообразие связей (в том числе дальних) между нейронами. Интересно, что подобные синхронные паттерны могут быть связаны не только с заболеваниями головного мозга, но и отражать различные когнитивные процессы [18]. Рассмотрение подобных синхронных паттернов значительно упрощает описание поведения нейронной системы [19–21], выступая в качестве некоторого метода «сжатия информации», который обсуждался выше.

Типичным примером паттернов на ЭЭГ, отражающих синхронную динамику нейронного ансамбля головного мозга, являются эпизоды параксимальной активности у больных эпилепсией. На рис. 8 показаны фрагменты ЭЭГ с различными типами эпилепсии. Осцилляторные паттерны, соответствующие эпилептическим событиям, на ЭЭГ характеризуются большей амплитудой и регулярностью колебаний по сравнению с фоновой десинхронизированной ЭЭГ. В настоящее время клинические исследования осцилляторных паттернов на ЭЭГ применяют для прямой диагностики всех без

исключения эпилептических расстройств, а также для дифференциальной диагностики, например, в случае психогенных судорог неэпилептической природы, обморочных состояний, расстройств движений, мигрени. Изменение картины появления тех или иных ритмов на ЭЭГ служит одним из критериев для оценки эффективности медикаментозного лечения. В некоторых случаях данные о регистрируемых на ЭЭГ паттернах несут прогностическую информацию, и с их помощью можно предсказать ход развития болезни в кратко- и долгосрочной перспективе.

В заключение лекции скажем несколько слов о возникновении паттернов в социальных системах. Это отдельная огромная тема, требующая специального рассмотрения. Поэтому здесь ограничимся единственным примером, который относится к изучению динамики формирования мнений в малых группах и хорошо известен в психологии. Речь идет о знаменитых опытах С. Эша [22]. Суть опыта заключается в том, что участники эксперимента, составляющие малую группу, должны были выбирать на карточке Б линию, которая совпадает по длине с линией-образцом на карточке А (рис. 9, а). Во время исследований испытуемый сталкивался с тем, что все остальные участники единодушно оценивали линию 1 на карточке Б как равную линии-образцу. В результате большинство (порядка 90% испытуемых) демонстрировали конформизм и соглашались с заведомо неправильным мнением: в социальной группе формировался паттерн поведения. На рис. 9, б показаны сцены, снятые во время испытаний С. Эша. Участник под номером 6 – единственный подлинный испытуемый. На его лице мы

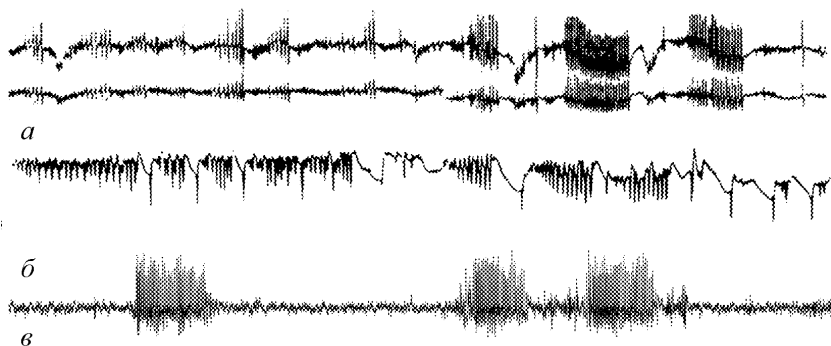


Рис. 8. Эпилептическая активность – образование пространственно-временных паттернов синхронного поведения в нейронном ансамбле в записях ЭЭГ: а – пациента с посттравматической генерализованной эпилепсией, б – пациента, больного редкой в медицинской практике эпилепсией Кожевникова; в – крыса с врожденной абсанс-эпилепсией

видим запоздалое изумление, вызванное тем, что все остальные участники эксперимента дали очевидно неверные ответы относительно длины линии.

Количество примеров формирования паттернов в поведенческих реакциях можно продолжать. В частности, этологи, исследователи, которые изучают поведение животных в естественном окружении, обратили внимание на то, что в поведении представителей многих видов животных часто имеют место жесткие автоматические модели [23]. Называемые жестко фиксированными моделями (паттернами) поведения, эти автоматические последовательности действий заслуживают особого внимания, поскольку они имеют сходство с определенным автоматическим реагированием людей. Как у людей, так и у животных данные модели, как правило, приводятся в действие каким-то одним элементом информации. Это единственная специфическая черта (паттерн поведения) играет роль «спускового крючка». Она часто оказывается очень ценной, поскольку позволяет индивиду принимать правильное решение без тщательного и полного анализа всех остальных элементов информации в конкретной ситуации. Преимущество такого стереотипного реагирования (наличия паттерна) заключается в его эффективности и «экономичности»; автоматически реагируя на несущую основную информацию черту – «спусковой крючок», индивид сохраняет свое время, энергию и умственный потенциал. Однако такие поведенческие паттерны несут в себе и опасность, связанную с тем, что их можно использовать как «лазейки» для навязывания человеку «чужого» мнения (как в опытах Эша), являясь, с точки зрения прикладной психологии, механизмами уступчивости или влияния. Таких механизмов, побуждающих одного человека подчинить-



Рис. 9. Опыты С. Эша (иллюстрации взяты из книги [22])

ся требованиям другого, психологам известно достаточно много. Главное то, что все они основаны на определенных паттернах (или, как часто говорят психологи, стереотипах, или казуальных схемах) поведения, «зашитых» в психологию человека, который склонен в большинстве случаев автоматически, не раздумывая, реагировать на внешнюю информацию в соответствии с заранее усвоенными причинно-следственными связями.

Подводя некоторые итоги сказанного в данной лекции, отметим, что существует огромное число примеров самоорганизации и образования структур в системах самой различной природы. Применительно к живым системам можно сказать, что исследование процессов самоорганизации в них позволяет понять механизмы эволюции, распространения популяций, особенности строения различных живых организмов, а также порой законы функционирования человеческого общества.

Подобные исследования помогут в разрешении самой удивительной загадки, стоящей перед человечеством, – загадки сознания, а также дать возможность выработать новые подходы к лечению и диагностике многих заболеваний (эпилепсия, болезни Альцгеймера, Паркинсона и т. д.).

Автор выражает благодарность Д.И. Трубецкову и А.А. Короновскому за плодотворные обсуждения и ценных замечаний, А.Е. Филатовой за обращение внимания на интересные примеры самоорганизации в биологических системах.

Работа поддержана Президентской программой поддержки научных школ РФ (проект НШ–3407.2010.2).

Библиографический список

1. Трубецков Д.И. Введение в синергетику. Хаос и структуры. М.: Эдиториал УРСС, 2004.
2. Климонтович Ю.Л. Введение в физику открытых систем. М.: Янус-К, 2002.
3. Трубецков Д.И., Мчедлова Е.С., Красичков Л.В. Введение в теорию самоорганизации открытых систем. М.: Физматлит, 2002.
4. Эбелинг В., Энгель А., Файстель Р. Физика процессов эволюции. М.: УРСС, 2001.
5. Безручко Б.П., Короновский А.А., Трубецков Д.И., Храмов А.Е. Путь в синергетику. Экскурс в десяти лекциях. 1-е изд. М.: Комкнига, 2005; 2-е изд. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2010.
6. Ван-Дейк М. Альбом течений жидкости и газа. М.: Мир, 1986.
7. Faraday M. On the forms and states assumed by fluids in contact with vibrating elastic surfaces // Philos. Trans. R. Soc., London. 1831. Vol. 121.

- Р. 319. (подробнее на русском языке о ряби Фарадея можно прочитать в книге [5])
8. *Езерский А.Б., Рабинович М.И., Реутов В.П., Старобинец И.М.* // ЖЭТФ. 1986. № 1. С. 2070.
 9. *Хакен Г.* Синергетика. М.: Мир. 1980.
 10. *Климонтович Ю.Л.* Введение в физику открытых систем // СОЖ. 1996. № 8. С. 109.
 11. *Данилов Ю.А.* Синергетика – внутри и вокруг человека // Философия науки. 1982. Вып. 8.
 12. *Иваницкий Г.Р., Медвинский А.Б., Цыганов М.А.* // УФН. 1994. Т. 164. С. 1041.
 13. *Абарбанель Г.Д.И., Рабинович М.И., Селверстон А., Баженов М.В., Хуэрта Р., Сущик М.М., Рубчинский Л.Л.* // УФН. 1996. Т. 166. С. 363.
 14. *Некоркин В.И.* // УФН. 2008. Т. 178. С. 313.
 15. *Рабинович М.И., Мюезинолу М.К.* // УФН. 2010. Т. 180. С. 371.
 16. *Хакен Г.* Принципы работы головного мозга. Синергетический подход к активности мозга, поведению и когнитивной деятельности. М.: Per Se, 2001.
 17. *Encyclopedia of the human brain / Ed. by Ramachandran V.S.* Elsevier Science, 2002.
 18. *Свидерская Н.Е.* Синхронная электрическая активность мозга и психические процессы. М.: Наука, 1987.
 19. *Иваницкий А.М., Лебедев А.И.* Разгадывая тайны ритмов мозга // Журн. высш. нервн. деят. 2007. Т. 57. С. 636.
 20. *Короновский А.А., ван Луйтелар Ж., Овчинников А.А., Ситникова Е.Ю., Храмов А.Е.* Диагностика и анализ осцилляторной нейросетевой активности головного мозга с использованием непрерывного вейвлетного преобразования // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2011. Т. 19, № 1. С. 86.
 21. *Ситникова Е.Ю., Короновский А.А., Храмов А.Е.* Анализ электрической активности головного мозга при абсанс-эпилепсии: Прикладные аспекты нелинейной динамики // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2011. Т. 19, № 6.
 22. *Зимбардо Ф., Ляйпне М.* Социальное влияние. СПб: Питер, 2001.
 23. *Чалдини Р.* Психология влияния. СПб: Питер, 1999.

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ДВУХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ МОДЕЛЕЙ ГЕНЕРАТОРОВ ОБРАТНОЙ ВОЛНЫ ТИПА О («НЕПРЕРЫВНАЯ» И «ДИСКРЕТНАЯ» МОДЕЛИ)

Васильев А.А., студент 4 курса ФНП СГУ

Волощук С.С., студент 4 курса ФНП СГУ

Введение

Существует несколько различных моделей генератора обратной волны, позволяющих рассматривать характеристики возникающих колебаний: время переходного процесса, амплитуды выходного сигнала, распределение поля в системе, – а также тип установившейся динамики: одночастотный, многочастотный, хаотический.

В данной работе была предпринята попытка сравнения двух моделей ЛОВ: так называемой «непрерывной» (см., например, [1]), и «клистронной» (см. [2, 3]).

Используемые модели

«Непрерывная» модель. Используем модель, описанную в [1], которая строится в предположении отсутствия влияния пространственного заряда и потерь в замедляющей системе, медленного изменения амплитуды поля во времени и постоянстве групповой скорости волны. С учётом этих допущений уравнения для ЛОВО записываются в следующем виде:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial q} \right)^2 \Phi_m &= -\operatorname{Re} (F \cdot e^{i\Phi_m}), \\ \frac{1}{u} \frac{\partial F}{\partial \tau} - \frac{\partial F}{\partial q} &= -\frac{2}{M} \sum e^{-i\Phi_m}. \end{aligned} \quad (1)$$

В этих уравнениях q – безразмерная координата, τ – безразмерное время. F – амплитуда электромагнитного поля, Φ_m – фаза m -го крупного электрона относительно фазы электромагнитной волны, M – общее число крупных электронов, u – отношение групповой скорости волны к скорости пучка, $L = 2\pi CN$ – безразмерная длина лампы. При этом необходимо, чтобы выполнялись граничные условия.

$$\Phi_m|_{q=0} = \frac{2\pi m}{M}, \quad (2)$$

$$\left[\frac{\partial \Phi_m}{\partial \tau} + \frac{\partial \Phi_m}{\partial q} \right]_{q=0} = 0.$$

$$F|_{q=L} = 0. \quad (3)$$

Условие (3) справедливо в отсутствии внешнего сигнала на коллекторном конце лампы или отсутствии отражений от её границ в автономном режиме.

При наличии внешнего воздействия уравнения (1) не изменятся, сохранятся и граничные условия (2) на выходном конце лампы, а условие (3) на входном конце изменится:

$$F|_{q=L} = F_0(\tau) \cdot e^{i\phi(\tau)}. \quad (4)$$

Здесь $F_0(\tau)$ – амплитуда внешнего сигнала, $\phi(\tau)$ – разность фаз между комплексной амплитудой поля на выходном конце лампы и амплитудой внешнего воздействия. Предположим, что внешний сигнал – гармонический с частотой Ω , близкой к частоте автономной генерации лампы ω_0 и функция $F_0(\tau)$ внешнего воздействия имеет вид: $F_0 \cdot e^{i\Omega\tau}$. Будем считать, что в системе может происходить фазовая синхронизация. Запишем уравнение фазовой синхронизации – уравнение Адлера в виде:

$$\frac{d\phi}{d\tau} + \omega_0 \kappa \sin \phi - (\Omega - \omega_0) = 0. \quad (5)$$

Здесь введён параметр κ (см. [?]), который может быть записан следующим образом:

$$\kappa = \frac{C}{L} \frac{F_0}{F_{q=0}} \left(1 + \frac{1}{u} \right)^{-1} \left/ \left[\frac{\partial}{\partial \Phi_0} \operatorname{arctg} \left(\frac{L^3 \operatorname{Im} \Psi(\Phi_0)}{1 + L^3 \operatorname{Re} \Psi(\Phi_0)} \right) \right] \right.,$$

где F_0 – модуль амплитуды внешнего воздействия, $F_{q=0}$ – модуль амплитуды выходного сигнала лампы, Φ_0 – угол пролёта электронов, $\Psi(\Phi_0)$ – функция квадратичной группировки электронов.

Полученные уравнения (1)–(5) – уравнения «непрерывной» модели позволяют произвести расчёты для анализа динамики ЛОВ.

«Дискретная» модель (клистронная модель). Модель основана на предположении о том, что эффективное взаимодействие электронного потока с электромагнитной волной происходит в узких промежутках – «зазорах» вблизи правой и левой границы системы. В ЛОВ групповая скорость волны противоположна скорости электронного потока, поэтому модуляция электронного пучка происходит около левой границы системы – там, где амплитуда поля максимальна. Возбуждение обратной электромагнитной волны происходит около правой границы – там, где пучок хорошо сгруппирован. В клистронном приближении уравнение движения и уравнение возбуждения могут быть записаны в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} &= -L^2 \frac{\delta(\xi) + \delta(\xi - 1)}{2} \operatorname{Re}(F \cdot \exp(i\theta)), \\ \frac{\partial F}{\partial \tau} - \frac{\partial F}{\partial \xi} &= -L \frac{\delta(\xi) + \delta(\xi - 1)}{2} I, \\ I &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i\theta} d\theta_0, \end{aligned} \tag{6}$$

где $\delta(\xi)$ – дельта-функция Дирака, θ – фаза электрона в поле волны, I – первая гармоника сгруппированного тока. Также имеются граничные условия:

$$\begin{aligned} \theta|_{\xi=0} &= \theta_0, \\ \left. \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} &= 0, \\ F(\xi = 1) &= F_{ext}(\tau). \end{aligned} \tag{7}$$

Здесь $F_{ext}(\tau)$ – комплексная амплитуда внешнего воздействия; $F(\xi = 0) = F_0 e^{i\phi_0}$. Интегрируя дважды первое уравнение, получим:

$$\theta|_{\xi=0} = \theta_0 - \frac{L^2}{2} F_0 \xi \cos(\theta_0 + \phi_0).$$

Подставляя это соотношение в уравнение для первой гармоники сгруппированного тока и интегрируя, приходим к выражению:

$$I = 2i \cdot J_1 \left(\frac{L^2}{2} F_0 \xi \right) e^{i\phi_0}, \tag{8}$$

где J_1 – функция Бесселя первого рода первого порядка. Интегрируя второе уравнение системы (6) с учётом (8), находим:

$$F(0, \tau) = -iLJ_1 \left(\frac{L^2}{2} |F(0, \tau - 1)| \right) \cdot \exp(i \arg [F(0, \tau - 1)]) + F_{ext}(1, \tau - 1). \quad (9)$$

В случае отсутствия внешнего воздействия, вводя обозначения $F(\tau) = \frac{L^2}{2} F(0, \tau)$, приходим к соотношению, уже полученному ранее в [2]:

$$F(\tau + 1) = -\frac{iL^3}{2} \frac{J_1(|F(0, \tau)|)}{|F(0, \tau)|} F(0, \tau). \quad (10)$$

Приведённое уравнение позволяет аналитически вычислять амплитуду поля на выходном конце лампы в дискретные моменты времени. Единственный параметр в полученном уравнении – безразмерная длина лампы L .

Наряду с описанной клистронной моделью была рассмотрена релятивистская клистронная модель [3]. В этой работе рассматривается мягкий и жёсткий режим генерации в ЛОВ. Жестким режимом называют режим стационарных колебаний при электронных токах, меньше стартового.

С учётом релятивистских эффектов в этой работе получено выражение для высокочастотной составляющей тока электронного потока:

$$J(z, a) = -2\pi i \exp[-izf(\gamma_0)] J_1[za\gamma_0 f'(\gamma_0)], \quad (11)$$

где $J_1(x)$ – функция Бесселя 1-го порядка, $f(\gamma) = d\theta/dz$ – изменение фазы вдоль пространства дрейфа.

При переходе в (11) к нерелятивистскому случаю получается уравнение, аналогичное (8). Это показывает, что жесткий режим генерации возникает только при учете релятивизма. Отметим также, что подобный режим также характерен для непрерывной модели в случае учёта релятивизма.

Полученные для обеих моделей уравнения позволяют произвести их сравнение.

Сравнение двух моделей

Определим соответствие моделей друг другу. Для сравнения на рис. 1 построена бифуркационная диаграмма: по оси абсцисс отложен параметр L , а по оси ординат установившиеся амплитуды поля $|F|$, причём, одному параметру L может соответствовать как одна амплитуда поля (стационарные колебания), так и несколько (автомодуляция или хаотический режим).

Как видно из приведённого рисунка, для небольших значений параметра характер диаграмм совпадает: происходит удвоение периода. Однако после нескольких удвоений в «непрерывной» модели происходит уменьшение периода, и для $L=6$ система переходит в режим автодулированных колебаний. Для «квистронной» модели также существуют области параметров, при которых многочастотные колебания сменяются колебаниями с малым периодом (например, при $L=2.5$ система переходит к стационарной генерации), однако переход к этим областям более резкий, в отличие от «непрерывной» модели, отсутствует постепенное уменьшение периода колебаний.

Рассмотрим решения уравнений для «непрерывной» модели при различных значениях управляющих параметров в случае наличия внешнего воздействия. На рис. 2 приведена временная реализация модуля амплитуды поля на выходном конце устройства. Как можно видеть, добавление синхронизирующего сигнала может как «ухудшить» динамику лампы, не допуская перехода её в режим одночастотной генерации, так и «улучшить», уменьшив время переходного процесса на начальном этапе. На рис. 3 представлены аналогичные зависимости для другого значения расстройки частоты. Что ожидаемо – амплитуда внешнего сигнала, при которой происходит синхронизация, больше той, что требовалась для предыдущей расстройки.

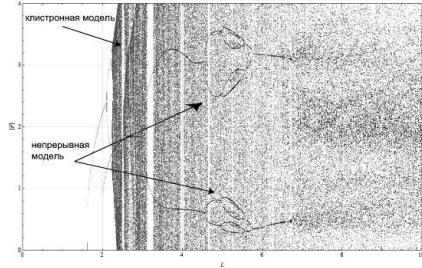


Рис. 1. Бифуркационная диаграмма (непрерывная модель – чёрный цвет, квистронная – серый)

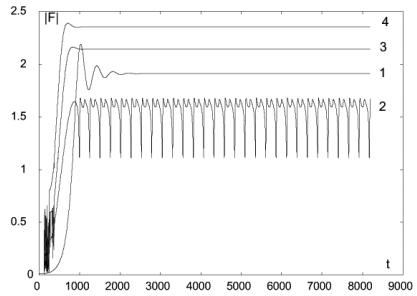


Рис. 2. Временная реализация амплитуды поля на выходном конце лампы (амплитуда внешнего воздействия F_0 : 1 – 0.0, 2 – 0.3, 3 – 0.6, 4 – 0.8; параметр расстройки $\Delta\Omega = 0.1$)

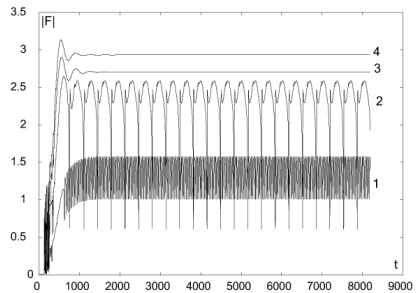


Рис. 3. Временная реализация амплитуды поля на выходном конце лампы (амплитуда внешнего воздействия F_0 : 1 – 0.0, 2 – 0.3, 3 – 0.6, 4 – 0.8; параметр расстройки $\Delta\Omega = 0.2$)

На рис. 4 приведены бифуркационные диаграммы для «дискретной» модели ЛОВ. Как можно видеть, уход частоты синхронизирующего сигнала от центральной частоты приводит к разрушению одночастотных колебаний, многочастотные же переходят к хаотическому режиму. Впрочем, как видно из рис. 5, увеличение амплитуды синхронизирующего сигнала позволяет перевести хаотические колебания в режим с конечным дискретным спектром.

На рис. 6 приведена зависимость выходного сигнала лампы от безразмерной длины L и амплитуды внешнего воздействия для «непрерывной» модели, а на рис. 7 – для «дискретной». Как видно, при больших значениях синхронизирующего сигнала и малых L приведённые характеристики систем совпадают, впрочем, лишь качественно.

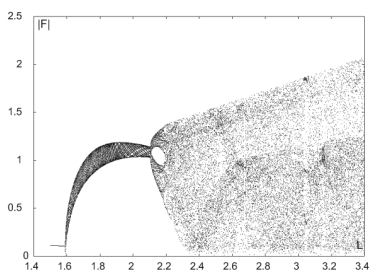


Рис. 4. Бифуркационная диаграмма клистронной модели при $F_0 = 0.1$, $\Delta\Omega = 1.0$

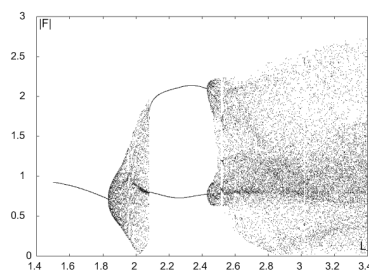


Рис. 5. Бифуркационная диаграмма клистронной модели при $F_0 = 0.8$, $\Delta\Omega = 1.0$

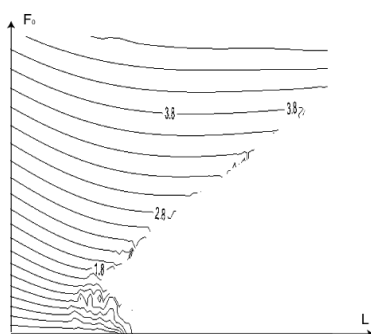


Рис. 6. Линии уровня одинакового выходного сигнала для «непрерывной» модели ЛОВ. L – безразмерная длина, F_0 – амплитуда воздействия

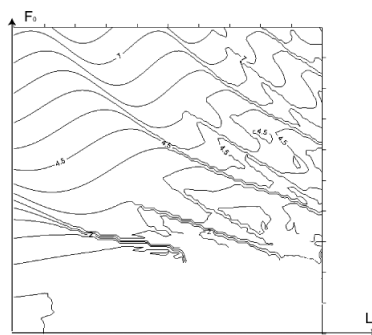


Рис. 7. Линии уровня одинакового выходного сигнала для клистронной модели ЛОВ. L – безразмерная длина, F_0 – амплитуда воздействия

Выводы

В данной работе анализировалось соответствие двух моделей генератора обратной волны: «непрерывной» и «клистронной». Показано, что «дискретная» модель может быть использована лишь для качественного описания динамики системы. Более точную «непрерывную» модель следует использовать в том случае, если важно количественное выражение получаемых численными методами результатов.

Библиографический список

1. *Кузнецов С.П., Трубецков Д.И.* Две лекции по нестационарной теории взаимодействия электронных пучков с электромагнитными волнами // Лекции по электронике СВЧ (3-я зимняя школа-семинар инженеров). Издательство Саратовского университета, 1976. С. 160–169.
2. *Титов В.Н.* «Тонкая структура» процессов автомодуляции и перехода к хаосу в распределенной автоколебательной системе «электронный поток – обратная электромагнитная волна»: Автореф. дис... канд. физ.-мат. наук / Саратов: СГУ, 2000. 22 с.
3. *Абубакиров Э.Б.* О мягком и жёстком режимах генерации в лампе обратной волны // Известия вузов. Радиофизика. 2010. Т. 53, № 9–10. С. 646–651.

Научный руководитель: *Трубецков Д.И.*, чл.-кор. РАН, профессор, д.ф.-м.н., зав. кафедрой электроники, колебаний и волн СГУ.

СИМУЛЯЦИЯ СХЕМЫ ШИРОКОПОЛОСНОЙ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ, ОСНОВАННОЙ НА СИНХРОНИЗАЦИИ СИСТЕМ С ГИПЕРБОЛИЧЕСКИМ ХАОСОМ И ФАЗОВОМ ПОДМЕШИВАНИИ

Демина Н.В., студентка 5 курса ФНП СГУ

Целью настоящей работы является изучение функциональных возможностей схемы конфиденциальной передачи информации основанной на известном принципе подмешивания информационного сигнала к хаотическому [1]. Расшифровка закодированного таким образом сигнала согласно данной методике осуществляется благодаря феномену синхронизации: передатчик и приемник должны представлять собой идентичные хаотические системы синхронизованные связью, что позволяет вычлнить полезную информацию, подмешанную к хаотическому сигналу передатчика, сопоставив его с соответствующим сигналом приемника.

Отличительной чертой исследуемой в настоящей работе схемы от предложенных ранее [1] является то, что в качестве источников динамического хаоса в приемнике и передатчике в ней используется генератор хаоса гиперболического типа, предложенный в [2–3]. Такой тип поведения обладает структурной устойчивостью. Это свойство является весьма полезным при реализации радиотехнических устройств – генераторов хаоса вообще и схем передачи данных на основе синхронизации в частности. Преимущество определяется тем, что малые «неидеальности» устройства, возмущения параметров, определяющих динамику устройства функций и шумы в определенных пределах не будут влиять на характер генерируемого хаотического сигнала, а также на возможность синхронизации двух генераторов, даже слабо неидентичных.

На рис. 1 представлена схема радиотехнического устройства с гиперболическим аттрактором – аттрактором Смейла–Вильямса. Данная схема реализует динамику системы двух связанных осцилляторов ван дер Поля

$$\begin{cases} \ddot{x} - (A \cos \Omega t - x^2)\dot{x} + \omega^2 x = \varepsilon y \cos \omega t, \\ \ddot{y} - (-A \cos \Omega t - y^2)\dot{y} + (2\omega)^2 y = \varepsilon x^2. \end{cases} \quad (1)$$

предложенную в [2]. Основные принципы функционирования системы состоят в следующем. Собственная частота второго осциллятора вдвое боль-

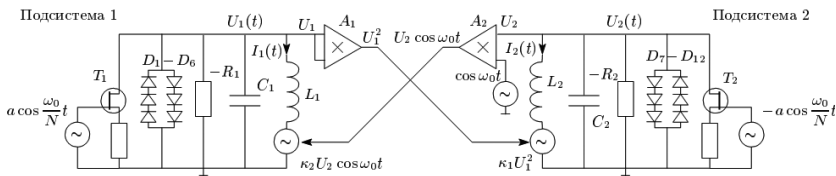


Рис. 1. Схема устройства с гиперболическим аттрактором Смейла–Вильямса на основе двух связанных осцилляторов ван дер Поля

ше частоты первого. Параметр, ответственный за бифуркацию Андронова–Хопфа и рождение автоколебательного режима в парциальных системах, медленно периодически модулируется. Период модуляции T содержит целое число периодов собственных колебаний индивидуального осциллятора. Модуляция автоколебаний двух подсистем производится в противофазе. На одном полупериоде модуляции первый осциллятор находится в режиме генерации, а второй ниже порога возбуждения. На втором полупериоде наоборот генерирует второй осциллятор, а первый затухает. Осцилляторы связаны между собой специальным образом. Первый осциллятор действует на второй через член, пропорциональный квадрату обобщенной координаты x . При этом наиболее эффективно он действует на стадии своей генерации. Порождаемая при этом вторая гармоника является резонансной для второго осциллятора, так как его частота вдвое больше частоты сигнала от первого осциллятора. Удвоенная (в результате возведения в квадрат) фаза воздействия служит затравкой для фазы второго осциллятора при переходе его к стадии возбуждения (амплитудная затравка не принципиальна по сравнению с собственной динамикой осциллятора при его «раскачке»). В свою очередь, второй осциллятор на стадии генерации действует на первый посредством члена, пропорционального произведению переменной y и опорного сигнала на рабочей частоте первого осциллятора. Резонансным для первого осциллятора является сигнал на разностной частоте. Фазовой затравкой для первого осциллятора, когда он вновь начинает генерировать, служит полученная вторым осциллятором на предыдущем полупериоде фаза, которая в свою очередь равна удвоенной фазе первого осциллятора период назад. Таким образом, режим колебаний в системе носит характер поочередной передачи возбуждения от одного осциллятора к другому. При этом фаза колебаний первого осциллятора через период T удваивается. Делая стробоскопическое сечение через период T можно наблюдать отображение «сдвиг» Бернулли для фазы

$$\varphi_{u+1} = 2\varphi_u \bmod 2\pi, \tag{2}$$

которое является эталонной моделью – «суррогатом» развитого динамического хаоса.

Рассмотрим два генератора гиперболического хаоса (1), и осуществим в них однонаправленную сильную связь следующим образом

$$\begin{cases} \begin{cases} \ddot{x} - (A \cos(\Omega t) - x^2)\dot{x} + 2\pi x = \varepsilon y \cos(2\pi t), \\ \ddot{y} - (-A \cos(\Omega t) - y^2)\dot{y} + 4\pi^2 y = \varepsilon x^2. \end{cases} \\ \begin{cases} \ddot{z} - (A \cos(\Omega t) - z^2)\dot{z} + 2\pi z = \varepsilon y \cos(2\pi t), \\ \ddot{p} - (-A \cos(\Omega t) - p^2)\dot{p} + 4\pi^2 p = \varepsilon z^2. \end{cases} \end{cases} \quad (3)$$

Продемонстрируем возможность синхронизации этих систем. Возьмем одинаковые значения параметров в подсистемах, но существенно различные начальные условия. На представленном на рис. 2 графике хорошо видно, что со временем траектории временных реализаций сближаются вплоть до полной синхронизации.

Пусть первая из подсистем является передатчиком, а вторая подсистема (на которую однонаправленно действует первая) является приемником. Подмешаем полезный информационный сигнал к члену, через который осуществляется связь и который определяет собой сигнал, который должен

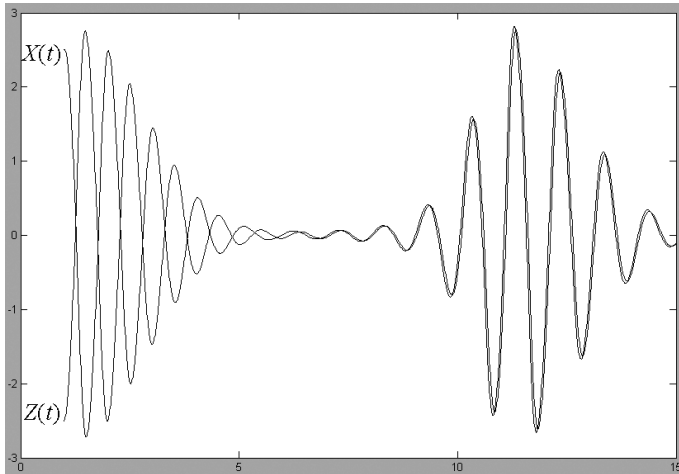


Рис. 2. Процесс синхронизации пары связанных генераторов гиперболического хаоса (3) при значениях параметров $T = 10$, $A = 3.5$, $\varepsilon = 0.5$. Представлены графики временных реализаций переменных $x(t)$ и $z(t)$, стартующих их разных начальных условий

уходить в канал связи. Пусть подмешивание информации производится к фазе в соответствии со следующими уравнениями:

$$\begin{aligned}
 \text{передатчик : } & \begin{cases} \ddot{x} - (A \cos(\Omega t) - x^2)\dot{x} + 2\pi x = \varepsilon y \cos(2\pi t + \rho(t)) \\ \ddot{y} - (-A \cos(\Omega t) - y^2)\dot{y} + 4\pi^2 y = \varepsilon x^2. \end{cases} \\
 \text{сигнал в канале связи } & S(t) = \cos(2\pi t + \rho(t)) \\
 \text{приемник : } & \begin{cases} \ddot{z} - (A \cos(\Omega t) - z^2)\dot{z} + 2\pi z = \varepsilon S(t), \\ \ddot{p} - (-A \cos(\Omega t) - p^2)\dot{p} + 4\pi^2 p = \varepsilon z^2. \end{cases}
 \end{aligned} \tag{4}$$

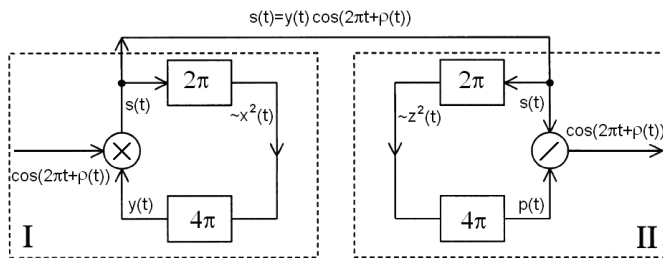


Рис. 3. Схема передачи информации на основе нелинейного подмешивания

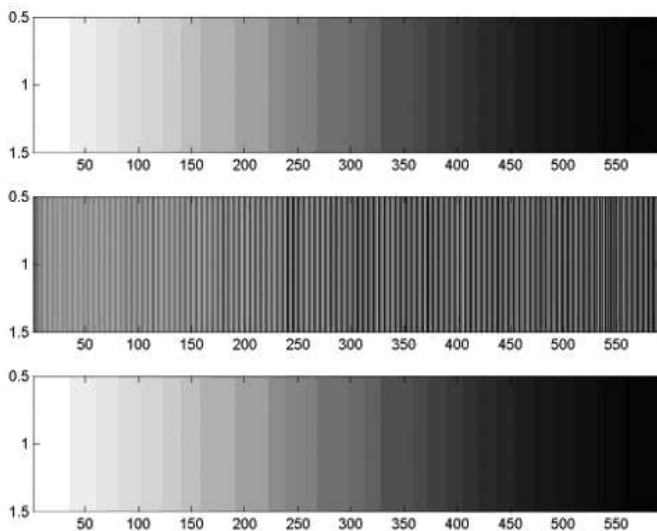


Рис. 4. Передача графического изображения: исходные данные (вверху), закодированные данные (средний рисунок), восстановленные данные (внизу)

где первые два уравнения отвечает за функции передатчика, последние два за функции приёмника, а $\rho(t)$ – полезная информация. Схема основы данной методики передачи данных приведена на рис. 3.

Характеристики подмешиваемого информационного сигнала должны быть таковы, чтобы он не нарушал гиперболический тип хаотического поведения в передатчике и не мешал процессу синхронизации передатчика и приемника. Тогда делением сигнала, пришедшего из канала связи, на переменную $p(t)$ получим величину $\cos(2\pi t + \rho(t))$, из которой тригонометрическими преобразованиями можно извлечь информацию $\rho(t)$. В общем случае информацией может любая последовательность чисел, например, последовательность, графический вид которой представляет собой градиент серого цвета. Как видно из рис. 4, такая последовательность успешно детектируется предложенным методом.

Библиографический список

1. *Дмитриев А.С., Панас А.И.* Динамический хаос: новые носители информации для систем связи. М.: Физматлит, 2002.
2. *Kuznetsov S.P.* Example of a physical system with a hyperbolic attractor of the Smale–Williams type // *Phys. Rev Lett.*, V. 95, 2005, P. 144101.
3. *Кузнецов С.П., Селезнев Е.П.* Хаотическая динамика в физической системе со странным аттрактором типа Смейла–Вильямса // *ЖЭТФ*, Т. 129, № 2, 2006, С. 400-412.

Научные руководители: *Исаева О.Б.*, к.ф.-м. н., доцент ФНП СГУ, *Жалин А.Ю.*, к.ф.-м. н., с.н.с. СФИРЭ им. В.А. Котельникова РАН.

РАЗРЫВ ЛИНИИ ПЕРЕХОДА К ХАОСУ В КОНСЕРВАТИВНО СВЯЗАННЫХ ОТОБРАЖЕНИЯХ ЭНО ПРИ ИЗМЕНЕНИИ ПАРАМЕТРА ДИССИПАЦИИ

Дубинин А.С., студент 4 курса ФНП СГУ

Важнейшим направлением нелинейной динамики является изучение связанных нелинейных систем. В настоящей работе исследуются изменения, происходящие на плоскости управляющих параметров консервативно связанных отображений Эно при различных значениях связи, особое внимание уделяется определению значений параметров, при котором формируется разрыв линии Фейгенбаума.

Данная задача является интересной в контексте исследования систем с малым уровнем диссипации. Поскольку связанные системы активно исследуются в нелинейной динамике, их поведение при приближении к консервативному пределу вызывает интерес. Для исследования необходимо выбирать связь между подсистемами таким образом, чтобы она не вносила дополнительной диссипации, и уровень диссипации в полученной системе определялся лишь значением параметров диссипации в подсистемах. В качестве системы для исследования выбираем систему связанных отображений Эно [1], переходящую в предельном случае бесконечно сильной диссипации в систему связанных логистических отображений.

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= \lambda_1 - x^2 - bv_n + \varepsilon(x_n - y_n), \\v_{n+1} &= x_n, \\y_{n+1} &= \lambda_2 - y^2 - bu_n + \varepsilon(y_n - x_n), \\y_{n+1} &= u_n.\end{aligned}\tag{1}$$

Таким образом, якобиан системы (1) равен b^2 , он не зависит от параметра связи, а определяется лишь параметром диссипации подсистем. Следовательно линейная связь не вносит дополнительной диссипации.

На рис. 1–2 приведены карты режимов системы (1) и увеличенные фрагменты карт на плоскости параметров подсистем (λ_1, λ_2) при различных значениях параметра диссипации b . Периодические режимы на карте представлены палитрой оттенков серого. Области неперiodической динамики

(хаотической и квазипериодической) показаны черным цветом, а области разбегания траекторий на бесконечность белым.

Карты симметричны относительно главной диагонали, которой отвечает случай идентичных подсистем. При малых значениях параметра b

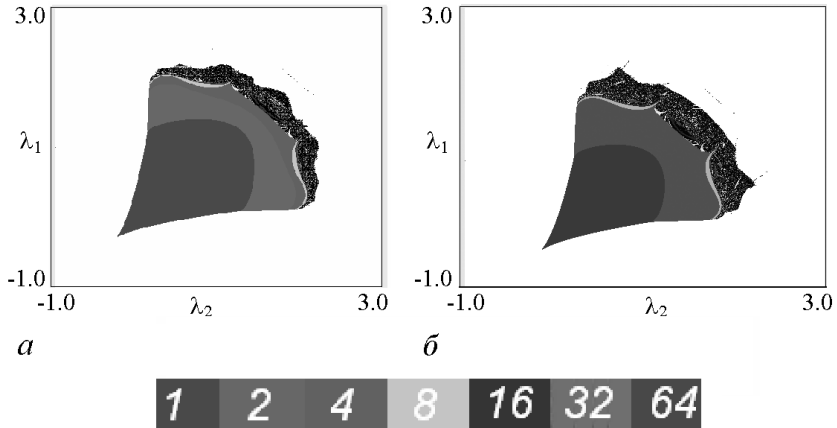


Рис. 1. Карты динамических режимов для связанных отображений Эно. Для параметров: $\varepsilon = 0.4$ и $b = 0.3$ (а), $\varepsilon = 0.45$ и $b = 0.29$, где ε – параметр связи, b – диссипация

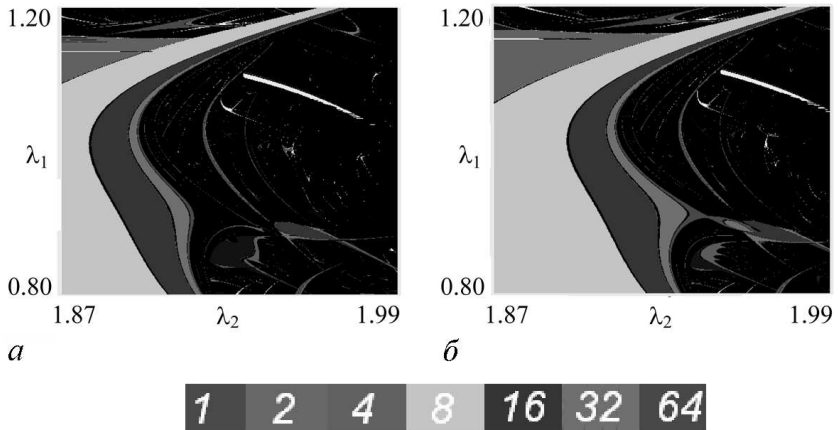


Рис. 2. Увеличенные фрагменты карты динамических режимов для значений связи $\varepsilon = 0.45$ до разрыва (а), якобиан $b = 0.29$ и после разрыва (б); $b = 0.29787$

(в случае достаточно сильной диссипации) вблизи главной диагонали наблюдается переход к хаосу через разрушение квазипериодических режимов, а когда параметры (λ_1, λ_2) существенно отличаются, переход происходит по сценарию Фейгенбаума. Можно заметить, что область квазипериодических режимов ограничена линией бифуркации Неймарка–Сакера на базе режима периода 4. Языки Арнольда, находящиеся в области квазипериодических режимов, «втыкаются» в линию бифуркации Неймарка–Сакера [2].

При уменьшении диссипации с устройством рассматриваемой λ_1 плоскости параметров происходят изменения. Особенно интересна область, где формируется разрыв линии Фейгенбаума [3]. Можно заметить, что разрыв происходит, когда граница основной области периодических режимов λ_2 (a – на представленных картах видна граница области периода 64) перестает быть гладкой и сливается с окном периодических режимов.

Таким образом, мы рассмотрели области, где формируется разрыв при вариации параметра связи от $\varepsilon = 0.2$ до $\varepsilon = 0.45$. Были найдены значения якобиана, при котором начинает формироваться разрыв (см. рис. 1–2). Было установлено, что для малых значений связи разрыв формируется при малой диссипации, и существует зависимость между «критическими» значениями связи и потерь в системе – увеличение связи приводит к увеличению соответствующего уровня диссипации. Далее приведена зависимость значения параметра b , при котором происходит разрыв, от значения параметра связи.

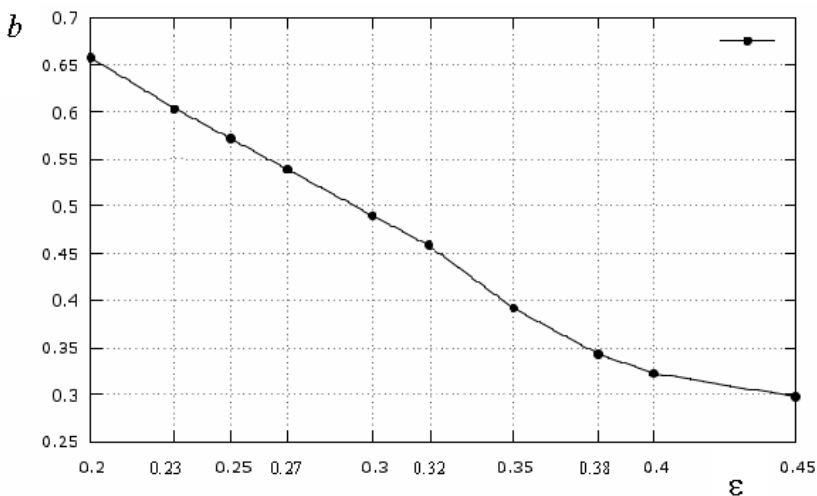


Рис. 3. График зависимости «критического» значения параметра диссипации от параметра связи

Таким образом, в ходе выполнения работы была исследована плоскость управляющих параметров при различных значениях связи. Были найдены области, где формируется разрывы линии перехода к хаосу через каскад удвоений периода. Были найдены значения параметра диссипации, при котором начинает формироваться разрыв, и построена их зависимость от параметра связи.

Библиографический список

1. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос. М.: Физматлит, 2006. 355 с.
2. *Кузнецов А.П., Савин А.В., Тюрюкина Л.В.* Введение в физику нелинейных отображений. Саратов: Научная книга, 2010. 134 с.
3. *Кузнецов А.П. и др.* Эволюция плоскости параметров консервативно связанных отображений Эно при изменении уровня диссипации //Мат. IX межд. шк. «ХАОС». Саратов: РИО журнала «Изв. вузов. ПНД», 2010, сс. 148–149.

Научный руководитель: *Савин Д.В.*, к.ф.-м.н., ассистент.

РАБОТОСПОСОБНОСТЬ МЕТОДА НЕЛИНЕЙНОЙ ГРЕЙНДЖЕРОВСКОЙ ПРИЧИННОСТИ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ НЕАДЕКВАТНЫХ МОДЕЛЕЙ

Корнилов М.В., аспирант ФНиБМТ СГУ

Сысоев И.В., к.ф.-м.н., доцент КДМиБМИ ФНиБМТ СГУ

Введение. В данной работе исследуется эффективность метода нелинейной причинности по Грейнджеру в зависимости от силы связи в случае, когда модель неадекватна объекту вследствие дефицита данных о нем, для систем как с дискретным, так и непрерывным временем, но с ярко выраженным временным масштабом.

Причинность по Грейнджеру [1] – это метод оценки связанности между системами по их экспериментальным сигналам на основе построения эмпирических прогностических моделей. Метод активно применяется как в медицине, например, для анализа различных сигналов мозга и конечностей [2–4], в климатологии [5,6], а также в других областях.

Построение модели. Пусть имеется два временных ряда: ряд $\{x_n\}_{n=1}^N$ от системы X и ряд $\{y_n\}_{n=1}^N$ от системы Y . На основе анализа реализаций $\{x_n\}_{n=1}^N$ и $\{y_n\}_{n=1}^N$ требуется определить, влияет ли система Y на систему X или нет. На первом шаге строится индивидуальная модель:

$$x_n = f(x_{n-l}, x_{n-2l}, \dots, x_{n-D_s l}, c^S) + \xi_n^S. \quad (1)$$

Полученная в результате модель имеет среднеквадратичную ошибку аппроксимации ε_S^2 , равную дисперсии остатков ξ_n^S . Следующим шагом строится совместная модель:

$$x_n = g(x_{n-l}, x_{n-2l}, \dots, x_{n-D_s l}, y_{n-l-\tau}, \dots, y_{n-D_a l-\tau}, c^j) + \xi_n^j. \quad (2)$$

Аналогичным образом рассчитывается среднеквадратичная ошибка прогноза ε_j^2 . Эффективность работы метода оценивалась с помощью показателя улучшения прогноза:

$$PI = 1 - \frac{\varepsilon_j^2}{\varepsilon_S^2}. \quad (3)$$

Если данные из ряда Y не помогают предсказывать динамику системы X , то $PI = 0$. В случае если PI достигает 1, динамика X описывается совместной моделью намного лучше, чем индивидуальной.

Отдельно следует отметить, что в качестве аппроксимирующей функции модели использовался полином произвольного вида со всевозможными перекрестными слагаемыми.

Оценка значимости полученных результатов. Так как совместная ошибка может быть меньше индивидуальной вследствие действия случайных факторов, требуется оценка статистической значимости рассчитываемого значения PI . Для этого использовались суррогатные временные ряды, полученные как временные ряды тех же систем, что и исследовались, но при отсутствии связи. Ансамбль суррогатных рядов получался варьированием начальных условий и реализации динамического шума.

Для оценки статистической значимости значений показателя улучшения прогноза генерировался ансамбль из 100 рядов суррогатных данных и оценивался 95%-й квантиль.

Численный эксперимент. В работе на основе реконструкции временных рядов эталонных отображений окружности, Икеды, Заславского, потоковых систем Рёсслера, Лоренца при различных соответствиях формы модели и структуры объекта.

Для систем с дискретным временем при исследовании работоспособности метода нелинейной грейнджеровской причинности, рассматривались системы различной степени адекватности предполагаемой модели, объекты строились с различными уровнями шума (динамический, статический), с вариациями коэффициентами связности.

Параметры систем подбирались таким образом, чтобы получить хаотические режимы.

Исследование работоспособности метода нелинейной грейнджеровской причинности начали с двух связанных однонаправленной нелинейной связью отображений окружности:

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_n + \Delta_x + \kappa_x \sin x_n + k \sin y_n + \xi_n, \\y_{n+1} &= y_n + \Delta_y + \kappa_y \sin y_n + \eta_n.\end{aligned}\tag{4}$$

Из формулы видно, что отображение окружности включает в себя функцию, разложимую в бесконечный степенной ряд, что требует использовать полином достаточно высокой степени при аппроксимации нелинейной функции. В результате численного эксперимента метод позволил выявить значимую связь в верную сторону начиная с достаточно малых значений коэффициента связи. Использование нелинейной модели дает существенное преимущество перед нелинейной моделью.

Для двух связанных линейной связью систем Ресслера

$$\begin{cases} \frac{\partial x_1}{\partial t} = -(y_1 + z_1) \\ \frac{\partial y_1}{\partial t} = x_1 + a_1 y_1 + k y_2 \\ \frac{\partial z_1}{\partial t} = b_1 + z_1(x_1 - c_1) \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\partial x_2}{\partial t} = -(y_2 + z_2) \\ \frac{\partial y_2}{\partial t} = x_2 + a_2 y_2 \\ \frac{\partial z_2}{\partial t} = b_2 + z_2(x_2 - c_2) \end{cases} \quad (9)$$

было показано, что метод позволяет выявить значимую связь даже для неадекватных модели и объекта. Использование нелинейной модели дает существенные преимущества по сравнению с линейной. Важным также оказывается выбор значения лага (рис. 2, с, d). Из представленных графиков видно, что при единичном лаге метод находит связь в неправильную сторону, и при больших значениях коэффициента связи она оказывается значимой.

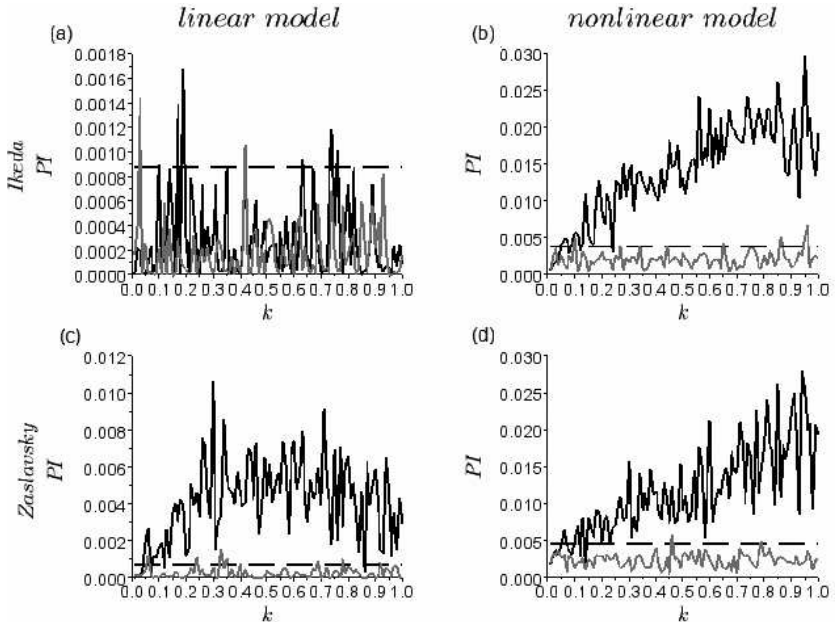


Рис. 1. Зависимость показателя улучшения прогноза PI от коэффициента связи k для двух связанных однонаправленной связью отображений Икеды (a,b) и Заславского (c,d). Штриховая линия – 95% суррогатный уровень, сплошная линия черного цвета – PI при определении связи в верную сторону, сплошная линия серого цвета – PI при определении связи в ложную сторону

При выборе лага равного четверти характерного периода метод позволяет определить значимую связь в верную сторону.

Для двух связанных линейной связью систем Лоренца (10) использование метода нелинейной причинности по Грейнджеру позволило получить значимую связь как для единичного, так и для лага, равного четверти характерного периода.

$$\begin{cases} \frac{\partial x_1}{\partial t} = \sigma_1(y_1 - x_1) \\ \frac{\partial y_1}{\partial t} = x_1(r_1 - z_1) - y_1 \\ \frac{\partial z_1}{\partial t} = x_1y_1 - b_1z_1 + kz_2 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\partial x_2}{\partial t} = \sigma_2(y_2 - x_2) \\ \frac{\partial y_2}{\partial t} = x_2(r_2 - z_2) - y_2 \\ \frac{\partial z_2}{\partial t} = x_2y_2 - b_2z_2 \end{cases} \quad (10)$$

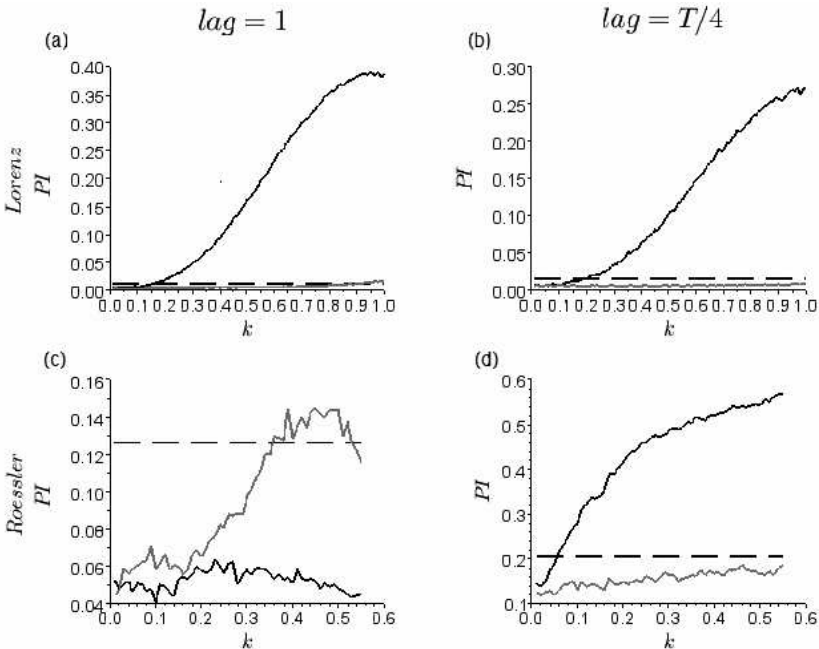


Рис. 2. Зависимость показателя улучшения прогноза PI от коэффициента связи k для двух связанных однонаправленной связью систем Лоренца (a,b) и Рёсслера (c,d). Штриховая линия – 95% суррогатный уровень, сплошная линия черного цвета – PI при определении связи в верную сторону, сплошная линия серого цвета – PI при определении связи в ложную сторону

При этом использование нелинейной модели оказывается критичным при определении наличия направленной связи.

Выводы. В результате численного эксперимента было показано, что метод нелинейной причинности по Грейнджеру позволяет выявить значимую связь там, где она действительно присутствует, даже при использовании существенно неадекватной по структуре модели. Для успеха важно правильно выбрать лаг модели, а также использовать нелинейные аппроксимирующие функции.

Работа выполнена при финансовой поддержке АБЦП «Развитие научного потенциала высшей школы», проект № 2.1.1/1738.

Библиографический список

1. *Granger C.W.J.* Investigating causal relations by econometric models and cross-spectral methods // *Econometrica*. 1969. Vol. 37, № 3. P. 424.
2. *Andrea Brovelli, Mingzhou Ding, Anders Ledberg, Yonghong Chen, Richard Nakamura, and Steven L. Bressler.* Beta oscillations in a large-scale sensorimotor cortical network: Directional influences revealed by Granger causality. *PNAS* 2004; 101; 9849-9854.
3. *L.A. Baccala, K. Sameshima, G. Ballester, A.C. Do Valle and C. Timolaria.* Studing the interactions between brain structures via directed coherence and Granger causality. *Applied sig. processing*, (1998) 5: 40-48.
4. *P. Tass, D. Smirnov, A. Karavaev, U. Barnikol, T. Barnikol, I. Adamchic, C. Hauptmann, N. Pawelczyk, M. Maarouf, V. Sturm, H.-J. Freund, and B. Bezruchko.* «The causal relationship between subcortical local field potential oscillations and parkinsonian resting tremor»// *J. Neural Eng.* 2010. Vol. 7. 016009.
5. *И.И. Мохов, Д.А. Смирнов, П.И. Наконечный, С.С. Козленко, Ю. Куртс.* Оценка взаимного воздействия Эль-Ниньо – Южного колебания и Индийского муссона // в «Современные проблемы динамики океана и атмосферы», ред. А.В. Фролов и Ю.Д. Реснянский. М.: ТРИАДА ЛТД, 2010. С. 251–267.

Научные руководители: профессор, д.ф.-м.н. *Безручко Б.П.*, доцент, к.ф.-м.н. *Сысоев И.В.*

УВЕЛИЧЕНИЕ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ МЕТОДА НЕЛИНЕЙНОЙ ГРЕЙНДЖЕРОВСКОЙ ПРИЧИННОСТИ С РОСТОМ УРОВНЯ ВНЕШНЕГО ИЗМЕРИТЕЛЬНОГО ШУМА

Парамонов Ф.Б., студент 5 курса ФНБМТ СГУ

Введение. Построение эмпирических математических моделей по экспериментальным данным в виде временных рядов может иметь различные практические применения, в том числе к задаче о поиске связанности между объектами по их экспериментальным данным. Самый распространённый подход к решению этой проблемы – метод причинности по Грейнджеру [1]. Исходно метод был разработан для линейных моделей, но в настоящее время рассматриваются различные его нелинейные обобщения [2,3], в том числе с аппроксимацией нелинейных функций в виде полиномов общего вида [4].

Для любого численного анализа экспериментальных данных важным является вопрос об учёте шумов измерений и их влиянии на рассчитанные меры. Несмотря на то, что этот вопрос для линейного метода причинности по Грейнджеру уже затрагивался в некоторых работах [5,6], подробное исследование для нелинейного обобщения не проводилось. *Целью нашей работы* является исследовать зависимость основного показателя метода нелинейной грейнджеровской причинности – улучшения прогноза от уровня измерительного шума при различных уровнях связи и режимах поведения на эталонных примерах.

Метод нелинейной грейнджеровской причинности. На первом этапе строится собственная модель(1):

$$x_n = f(x_{n-l}, x_{n-2l}, \dots, x_{n-D_s l}, c^s) + \xi, \quad (1)$$

где f – аппроксимирующая функция, l – лаг модели, D_s – собственная размерность модели, c^s – неизвестные коэффициенты, ξ – остатки. Коэффициенты c^s оцениваются методом наименьших квадратов по экспериментальной реализации $\{x_n\}_{n=1}^N$. Полученная модель имеет среднеквадратичную ошибку аппроксимации ε_s^2 , равную дисперсии остатков ξ_n^s .

Следующим шагом строится совместная модель (2):

$$x_n = g(x_{n-1}, x_{n-2l}, \dots, x_{n-D_s l}, y_{n-l}, y_{n-2l}, \dots, y_{n-D_a l}, c^j) + \xi_n^j, \quad (2)$$

где D_a – размерность добавки, c^j – коэффициенты совместной модели.

После того, как совместная модель (2) построена, можно рассчитать среднеквадратичную ошибку прогноза ε_j^2 . Случай $\varepsilon_j^2 < \varepsilon_s^2$ показывает, что данные из ряда системы Y помогли предсказать поведение системы X . В таком случае можно сказать, что Y действует на X по Грейнджеру.

В качестве количественной меры воздействия используется PI – улучшение прогноза, определяемое по формуле (3):

$$PI = 1 - \varepsilon_j^2 / \varepsilon_s^2 \quad (3)$$

$PI = 0$ в случае, если данные из ряда Y не помогают предсказывать динамику системы X , т.е. $\varepsilon_j^2 = \varepsilon_s^2$. PI достигает 1, если динамика X полностью описывается совместной моделью ($\varepsilon_j = 0$), но не описывается индивидуальной.

Численный эксперимент. Генерируется два временных ряда, в основе каждого лежит некоторое отображение последования, связанные однонаправленно с коэффициентом связи k ; использовались как идентичные отображения, расстроенные по параметрам, так и различные. Таким образом, исходя из математических предпосылок в случае не нулевой связи при отсутствии шума величина $PI = 1$, при нулевой силе связи $PI = 0$. Исходя из теоретических соображений можно ожидать, что величина PI должна монотонно спадать с ростом σ , однако в ходе экспериментов было выявлено наличие локального экстремума для разных значений σ и k .

Модели, используемый в численном моделировании:

1. Логистическое отображение, воздействующее на логистическое отображение:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= r_x \cdot x_n (1 - x_n) + k \cdot y_n, \\ y_{n+1} &= r_y \cdot y_n (1 - y_n). \end{aligned} \quad (4)$$

Коэффициенты выбирались из диапазонов: $r_x = 3.20 \div 3.64$, $r_y = 3.7$

2. Отображение окружности, воздействующее на отображение окружности:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + \Delta_x + k_x \cdot \sin(x_n) + k \cdot y_n, \\ y_{n+1} &= y_n + \Delta_y + k_y \cdot \sin(y_n). \end{aligned} \quad (5)$$

Коэффициенты выбирались из следующих диапазонов: $k_x = 1.45 \div 1.62$, $\Delta_x = 0.01$, $k_y = 3.6, 3.65, 3.7, 3.8$, $\Delta_y = 0.01$.

3. Отображение Эно, воздействующее на отображение Эно:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 1 - a_x \cdot x_n^2 - b_x \cdot x_{n-1} + k \cdot y_n, \\ y_{n+1} &= 1 - a_y \cdot y_n^2 - b_y \cdot y_{n-1}. \end{aligned} \quad (6)$$

Коэффициенты выбирались из следующих диапазонов: $a_x = 0.3 \div 1.38$, $b_x = -0.2$, $a_y = 1.8$, $b_y = 0.05$, $a_y = 1.15$, $b_y = 0.2$, $a_y = 1.15$, $b_y = 0.25$, $a_y = 1.2$, $b_y = 0.2$.

4. Отображение Эно воздействующее на отображение окружности:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + \Delta_x + k_x \cdot \sin(x_n) + \kappa \cdot y_n, \\ y_{n+1} &= 1 - a_y \cdot y_n^2 - b_y \cdot y_{n-1}. \end{aligned} \tag{7}$$

Коэффициенты выбирались из следующих диапазонов: $k_x = 1.95 \div 2.25$, $3.37 \div 3.50$, $a_y = 1.3$, $b_y = 0.2$, $a_y = 1.3$, $b_y = 0.25$, $a_y = 1.3$, $b_y = 0.25$.

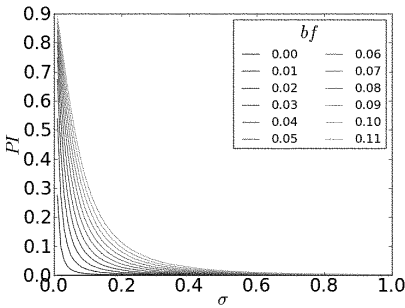


Рис. 1. Отображение Эно воздействует на отображение Эно, при $a_x = 0.34$, $b_y = -0.2$, $a_y = 1.8$, $b_y = -0.05$

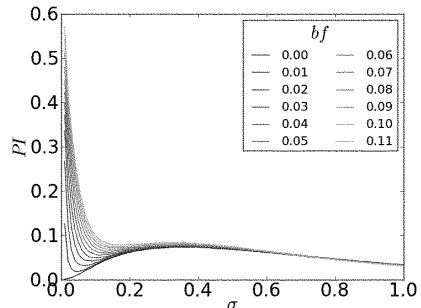


Рис. 2. Отображение Эно воздействует на отображение Эно, при $a_x = 1.10$, $b_x = -0.2$, $a_y = 1.15$, $b_y = -0.2$

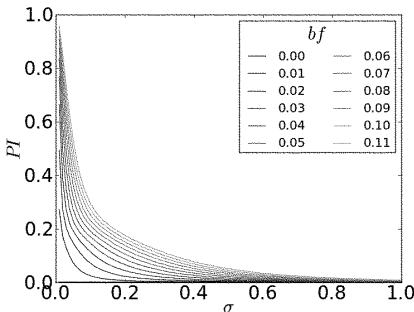


Рис. 3. Отображение Эно, воздействующее на отображение окружности, при $k_x = 1.96$, $\Delta_x = 0.1$, $a_y = 1.3$, $b_y = 0.25$

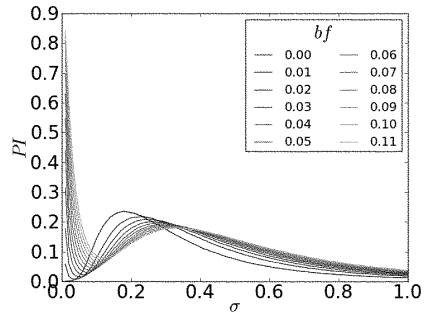


Рис. 4. Отображение Эно, воздействующее на отображение окружности, при $k_x = 2.12$, $\Delta_x = 0.1$, $a_y = 1.3$, $b_y = 0.15$

Наблюдаемый эффект увлечения PI на рис. 2 и рис. 4 можно объяснить тем, что с ростом среднеквадратичного отклонения шума совместная ошибка растет медленнее, чем индивидуальная.

Заключение. Нетривиальное поведение зависимости $PI(\sigma)$ (наличие локальных минимума и максимума и, соответственно, рост $PI(\sigma)$ в некотором диапазоне σ) наблюдается в тех же системах, что и тривиальная монотонная зависимость, но при других параметрах, причём имеют значение как параметры воздействующей, так и воздействуемой систем. При этом немонотонное поведение $PI(\sigma)$ может наблюдаться как для любых значений силы связи, так и только для некоторых. в обнаруженных нами примерах немонотонное поведение $PI(\sigma)$ имело место только в случае, когда в воздействующей подсистеме параметры соответствовали периодическому режиму индивидуальной динамики. Однако вследствие малого числа обнаруженных наблюдений данный факт нуждается в дополнительной проверке.

Работа поддержана грантом АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы».

Библиографический список

1. *C.W.J. Granger.* Investigating Causal Relations by Econometric Models and Cross-spectral Methods. *Econometrica*, Vol. 37, No. 3., 1969, pp. 424–438.
2. *Daniele Marinazzo, Mario Pellicoro, and Sebastiano Stramaglia.* Nonlinear parametric model for Granger causality of time series. *Phys. Rev. E* 73, 066216 (2006).
3. *K. Ishiguro, N. Otsu, M. Lungarella and Y. Kuniyoshi.* Comparison of nonlinear Granger causality extensions for low-dimensional systems. *Phys. Rev. E* 77, 036217 (2008).
4. *Yonghong Chen, Govindan Rangarajan, Jianfeng Feng, Mingzhou Ding.* Analyzing Multiple Nonlinear Time Series with Extended Granger Causality. *Physics Letters A.* Volume 324, Issue 1, Pages 26–35.
5. *H. Nalatore, M. Ding, and G. Rangarajan,* *Phys. Rev. E* 75, 031123 (2007).
6. Comparison of linear signal processing techniques to infer directed interactions in multivariate neural systems. Matthias Winterhaldera, Bjorn Scheltera,b, Wolfram Hesse, Karin Schwabc, Lutz Leistritz, Daniel Klan, Reinhard Bauerd, Jens Timmerab, Herbert Witte // *Signal Processing*, 85 (2005) 2137–2160.

Научный руководитель: Сысоев И.В., к.ф.-м.н.

ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛЬНЫХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ ПОД ВНЕШНИМ ПЕРИОДИЧЕСКИМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ

Сысоева М.В., аспирант ФНБМТ СГУ

Реконструкция динамических моделей автоколебательных систем с запаздыванием по их экспериментальным хаотическим и периодическим временным рядам представляет собой актуальную задачу современной физики [1]. В данной работе предложен оригинальный метод восстановления колебательных систем с запаздыванием, находящихся под внешним периодическим воздействием, по их временным рядам. Особенностью метода является учет априорной информации о виде модельного уравнения системы при построении регрессионной модели. Рассмотрен типичный случай, когда регрессионная модель учитывает линейную зависимость аппроксимирующей функции от состояния системы в текущий момент времени, полиномиальную зависимость от состояния системы в задержанные моменты времени и наличие внешнего воздействия.

Предлагаемый метод реконструкции систем с задержкой применялся для одного из наиболее широко используемых дифференциальных уравнений с запаздыванием, находящегося под внешним периодическим воздействием:

$$\varepsilon \dot{x}(t) = -x(t) + f(x(t - \tau_0)) + g(w, t), \quad (1)$$

где x – динамическая переменная, τ_0 – время запаздывания, ε – параметр, характеризующий инерционные свойства системы, f – нелинейная функция, g – функция внешнего периодического воздействия, w – частота внешнего воздействия, t – время. Характерной особенностью этого уравнения является то, что его правая часть содержит линейную зависимость от текущего состояния динамической переменной $x(t)$ и нелинейную зависимость от состояния переменной в задержанный момент времени $x(t - \tau_0)$.

Для восстановления по временному ряду системы с запаздыванием, описываемой уравнением вида (1), будем строить регрессионную модель специального вида, в структуре которой учтем априорную информацию о виде модельного уравнения. Модель будем строить в виде точечного отображения.

Сначала перейдем от дифференциального уравнения (1) к разностному уравнению:

$$\varepsilon \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = -x(t) + f(x(t - \tau_0)) + g(w, t), \quad (2)$$

где Δt – малое время, равное интервалу выборки. Уравнение (2) можно переписать в виде:

$$x(t + \Delta t) = a_1 x(t) + a_2 f(x(t - \tau_0)) + a_2 g(w, t), \quad (3)$$

где $a_1 = 1 - \Delta t/\varepsilon$, $a_2 = \Delta t/\varepsilon$. Запишем уравнение (3) в виде отображения:

$$x_{n+1} = a_1 x_n + a_2 f(x_{n-m}) + a_2 g(w, n\Delta t), \quad (4)$$

где $n = t/\Delta t$ – дискретное время, $m = \tau_0/\Delta t$ – дискретное время задержки.

Для реконструкции уравнения (4) по временному ряду построим модели следующего вида:

$$y_{n+1} = \alpha_0 y_n + \sum_{i=0}^S \alpha_{i+1} y_{n-\tau}^i + \sum_{i=1}^N \alpha_{i+S+1} \cos(i2\pi w n \Delta t) + \sum_{i=1}^N \alpha_{i+N+S+1} \sin(i2\pi w n \Delta t), \quad (5)$$

где α_0 – коэффициент, количественно характеризующий линейную зависимость модели от текущего состояния y_n , $\alpha_1, \dots, \alpha_{S+1}$ – коэффициенты степенного полинома степени S , аппроксимирующего нелинейную зависимость модели от задержанной переменной $y_{n-\tau}$, $\alpha_{S+2}, \dots, \alpha_{N+S+1}$ – коэффициенты тригонометрического полинома степени N , τ – пробное время запаздывания, перебираемое с постоянным шагом из некоторого интервала.

Использование структуры (5) вносит специфику в процедуру расчета коэффициентов по сравнению со стандартными подходами, так как частота внешнего воздействия w входит в модельное уравнение нелинейно. Поэтому для нахождения частоты внешнего воздействия используется метод Ньютона (для частоты задается начальная догадка), но при этом значения линейно входящих в (5) коэффициентов на каждом шаге рассчитываются линейным методом наименьших квадратов.

Для количественной оценки качества восстановления модельного уравнения использовалась ошибка прогноза модели на один шаг вперед в зависимости от пробного времени задержки τ при фиксированных S и N :

$$E^2(\tau) = \langle (x_{n+1} - y_{n+1}(\tau))^2 \rangle, \quad (6)$$

где угловые скобки обозначают усреднение по времени. Значение τ , при котором наблюдается минимальное значение $E^2(\tau)$, принимается в качестве оценки дискретного времени запаздывания m , которое связано с истинным временем запаздывания $\tau_0 = m\Delta t$.

Определив коэффициенты модели (5) можно восстановить параметр инерционности и нелинейную функцию системы с задержкой, а также амплитуду и частоту внешнего воздействия. В качестве оценки параметра ε будем использовать $\hat{\varepsilon} = \Delta t/1 - \alpha_0$. Нелинейную функцию f можно восстановить по коэффициентам аппроксимирующего её полинома $\alpha_1, \dots, \alpha_{S+1}$. Амплитуду внешнего воздействия можно определить по коэффициентам тригонометрического полинома $\alpha_{S+2}, \dots, \alpha_{2N+S+1}$ как корень из суммы квадратов этих коэффициентов. Частота же внешнего воздействия определяется с помощью метода Ньютона и выдаётся как ещё один параметр нашего метода.

Эффективность метода продемонстрирована на примере модельных дифференциальных уравнений первого порядка с одним временем запаздывания, имеющих квадратичную или сигмоидную нелинейную функцию. В качестве периодического внешнего воздействия были выбраны гармонический сигнал и сигнал осциллятора ван дер Поля.

Показано, что предложенный подход позволяет правильно восстановить частоту внешнего воздействия лишь в некотором диапазоне начальных приближений, причем ширина этого диапазона уменьшается с увеличением длины временного ряда. Поэтому оценку частоты внешнего воздействия целесообразно проводить в скользящем окне. Исследованы границы применимости метода в зависимости от уровня динамического и измерительного шума. Метод может быть применен для реконструкции неавтономных систем с задержкой, совершающих как хаотические, так и периодические колебания.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 10-02-00980.

Библиографический список

1. Пономаренко В.И., Прохоров М.Д., Караваяев А.С., Безручко Б.П. // ЖЭТФ. 2005. Т. 127, № 3. С.515.

Научный руководитель: Пономаренко В.И., д.ф.-м. н., профессор.

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ДВУХПОТОКОВОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

Титов А.В., аспирант ФНП СГУ

Настоящая работа посвящена построению линейной теории двухпучковой неустойчивости на основе теории связанных волн. Данный подход позволил подробно изучить: двух-, трех- и четырехволновые взаимодействия двух электронных пучков. Получены аналитические выражения, а также диаграммы распределений токов волн пространственного заряда электронных пучков.

Двухпучковая неустойчивость – классический пример неустойчивости в консервативных системах. К тому же эта неустойчивость является хрестоматийным примером конвективной и абсолютной неустойчивостей (см., например, [1,2]).

В свое время делались попытки создания двухлучевых усилителей с целью продвижения в миллиметровый диапазон длин волн [3,4]. Однако, на каком-то этапе эти исследования прекратились, в первую очередь из-за низкой плотности электронных потоков и трудностей в изготовлении микроструктурных элементов входных и выходных устройств.

Сегодня интерес к подобным устройствам возрождается. В частности, можно упомянуть интригующие, но малопонятные тезисы доклада К. Birhofberger, В.Е. Carlsten, R. Faehl [5].

Современные работы в области вакуумной микроэлектроники с использованием катодов с полевой эмиссией также позволяют надеяться на возрождение приборов типа двухлучевой лампы.

Цель настоящей работы состояла в последовательном рассмотрении различных вариантов взаимодействия попутных и встречных электронных потоков на основе теории связанных волн пространственного заряда. Рассмотрение включало двух-, трех- и четырехволновые взаимодействия. Система уравнений, описывающая два одномерных электронных потока с гидродинамической точки зрения имеет вид [6]:

$$\begin{cases} E = -\frac{i_1 + i_2}{j\omega\varepsilon_0}, \\ \frac{\partial^2 i_1}{\partial x^2} + 2jk_{e1} \frac{\partial i_1}{\partial x} - k_{e1}^2 i_1 = j\omega\varepsilon_0 k_{p1}^2 E, \\ \frac{\partial^2 i_2}{\partial x^2} + 2jk_{e2} \frac{\partial i_2}{\partial x} - k_{e2}^2 i_2 = j\omega\varepsilon_0 k_{p2}^2 E. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь $k_{e1,2} = \omega/v_{1,2}$, $k_{p1,2} = \omega_{p1,2}/v_{1,2}$, $i_{1,2}$ – плотности токов, $v_{1,2}$ – постоянные составляющие скоростей электронных потоков, $\omega_{p1,2}$ – плазменные частоты, E – амплитуда электрического поля, ε_0 – электрическая постоянная, j – мнимая единица.

Далее с помощью преобразования Лапласа из нее можно получить интегральную форму уравнений для тока при нулевых начальных условиях

$$\begin{cases} i_1(x) = -k_{p1}^2 \int_0^x i_2(\zeta) \frac{\sin k_{p1}(x-\zeta)}{k_{p1}} e^{-jk_{e1}(x-\zeta)} d\zeta, \\ i_2(x) = -k_{p2}^2 \int_0^x i_1(\zeta) \frac{\sin k_{p2}(x-\zeta)}{k_{p2}} e^{-jk_{e2}(x-\zeta)} d\zeta \end{cases} \quad (2)$$

или

$$\begin{cases} i_1(x) = -\frac{k_{p1}}{2j} \left[e^{-j(k_{e1}-k_{p1})x} \int_0^x i_2(\zeta) e^{j(k_{e1}-k_{p1})\zeta} d\zeta - e^{-j(k_{e1}+k_{p1})x} \int_0^x i_2(\zeta) e^{j(k_{e1}+k_{p1})\zeta} d\zeta \right], \\ i_2(x) = -\frac{k_{p2}}{2j} \left[e^{-j(k_{e2}-k_{p2})x} \int_0^x i_1(\zeta) e^{j(k_{e2}-k_{p2})\zeta} d\zeta - e^{-j(k_{e2}+k_{p2})x} \int_0^x i_1(\zeta) e^{j(k_{e2}+k_{p2})\zeta} d\zeta \right]. \end{cases} \quad (3)$$

Из интегральной формы видно, что токи представляют собой сумму быстрой и медленной волн. Далее можно легко получить систему уравнений в форме связанных колебаний.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{di_{16}}{dx} = -j(k_{e1} - k_{p1})i_{16} + j\frac{k_{p1}}{2}i_{26} + j\frac{k_{p1}}{2}i_{2M}, \\ \frac{di_{1M}}{dx} = -j(k_{e1} + k_{p1})i_{1M} - j\frac{k_{p1}}{2}i_{26} - j\frac{k_{p1}}{2}i_{2M}, \\ \frac{di_{26}}{dx} = -j(k_{e2} - k_{p2})i_{26} + j\frac{k_{p2}}{2}i_{16} + j\frac{k_{p2}}{2}i_{1M}, \\ \frac{di_{2M}}{dx} = -j(k_{e2} + k_{p2})i_{2M} - j\frac{k_{p2}}{2}i_{16} - \frac{k_{p2}}{2}i_{1M}, \end{array} \right. \quad (4)$$

здесь i_{16} , i_{1M} , i_{26} , i_{2M} – амплитуды тока быстрой волны и медленной волны первого и второго потока соответственно, $k_{e1,2} = \omega/v_{1,2}$, $k_{p1,2} = \omega_{p1,2}/v_{1,2}$, ω – частота, $v_{1,2}$ – постоянные составляющие скоростей электронных потоков, $\omega_{p1,2}$ – плазменные частоты.

Если искать решение для тока быстрой волны первого потока в виде

$$i_{16}(x) = \sum_{i=1}^4 C_i e^{-jk_i x}, \quad (5)$$

то выражения для остальных волн будут иметь вид:

$$i_{1M}(x) = \sum_{i=1}^4 \left\{ -\frac{2[k_i - (k_{e1} - k_{p1})][k_i - (k_{e2} - k_{p2})][k_i - (k_{e2} + k_{p2})]}{k_{p1}k_{p2}^2} - 1 \right\} \times \\ \times C_i e^{-jk_i x}, \quad (6)$$

$$i_{26}(x) = \sum_{i=1}^4 \frac{[k_i - (k_{e1} - k_{p1})][k_i - (k_{e2} + k_{p2})]}{k_{p1}k_{p2}} C_i e^{-jk_i x}, \quad (7)$$

$$i_{2M}(x) = \sum_{i=1}^4 \left\{ -\frac{[k_i - (k_{e1} - k_{p1})][k_i - (k_{e2} - k_{p2})]}{k_{p1}k_{p2}} \right\} C_i e^{-jk_i x}. \quad (8)$$

Далее зададим начальные условия. Пусть они имеют вид $i_{16}(0) = i_{160}$, $i_{1M}(0) = i_{1M0}$, $i_{26}(0) = i_{260}$, $i_{2M}(0) = i_{2M0}$. Если ввести безразмерные параметры $k_{e1}L = \beta_{e1}$, $k_{p1}L = \beta_{p1}$, $k_{p2}L = \beta_{p2}$, $k_1L = \beta_1$, $k_2L = \beta_2$, $k_3L = \beta_3$, $k_4L = \beta_4$, $x/L = X$, где L – длина пространства взаимодействия, то можно получить следующую систему уравнений для нахождения констант:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^4 C_i = i_{160}, \\ \sum_{i=1}^4 \left\{ \frac{2 [\beta_i - (\beta_{e1} - \beta_{p1})] [\beta_i - (\beta_{e2} - \beta_{p2})] [\beta_i - (\beta_{e2} + \beta_{p2})]}{\beta_{p1} \beta_{p2}^2} - 1 \right\} C_i = i_{1M0}, \\ \sum_{i=1}^4 \frac{[\beta_i - (\beta_{e1} - \beta_{p1})] [\beta_i - (\beta_{e2} + \beta_{p2})]}{\beta_{p1} \beta_{p2}} C_i = i_{260}, \\ \sum_{i=1}^4 \left\{ - \frac{[\beta_i - (\beta_{e1} - \beta_{p1})] [\beta_i - (\beta_{e2} - \beta_{p2})]}{\beta_{p1} \beta_{p2}} \right\} C_i = i_{2M0}. \end{array} \right. \quad (9)$$

На рис. 1. приведено распределение токов волн пространственного заряда для случая попутных потоков при $i_{160} = i_{1M0} > 0$, $i_{260} = i_{2M0} = 0$. Как видно из рисунка, амплитуды всех волн возрастают вдоль по длине системы. Эта диаграмма соответствует теории двухлучевой лампы.

Аналогичным образом можно провести выкладки для случая встречных потоков. Зададим граничные условия в виде $i_{16}(0) = i_{160}$, $i_{1M}(0) = i_{1M0}$, $i_{26}(L) = i_{26L}$, $i_{2M}(L) = i_{2ML}$. На рис. 2. показано распределение токов волн пространственного заряда при $i_{160} = i_{1M0} > 0$, и $i_{26L} = i_{2ML} = 0$.

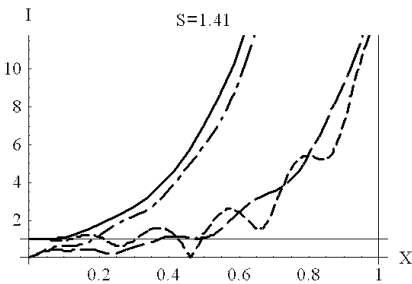


Рис. 1. Распределение токов волн для случая попутных потоков. Сплошная и мелкопунктирная линия описывают амплитуды токов БВПЗ и МВПЗ первого потока соответственно. Крупно-пунктирная линия и линия «пунктир-точка» описывают БВПЗ и МВПЗ второго потока соответственно. Здесь I – безразмерная амплитуда тока, X – безразмерная координата, S – отношение скоростей первого и второго потока

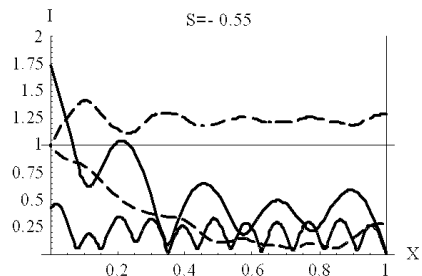


Рис. 2. Распределение токов волн для случая встречных потоков. Верхняя и нижняя пунктирные линии описывают МВПЗ и БВПЗ первого потока соответственно. Верхняя и нижняя сплошные линии описывают БВПЗ и МВПЗ второго потока соответственно. Здесь I – безразмерная амплитуда тока, X – безразмерная координата, S – отношение скоростей первого и второго потока

От общего случая четырехволнового взаимодействия можно легко перейти к случаям двух- и трехволнового взаимодействия путем «выключения» из взаимодействия одной или двух волн. Эти приближения позволяют проводить некоторые аналогии между процессами в двухлучевой лампе и процессами в ЛБВ и ЛОВ. В частности из-за совпадения в некоторых случаях структур дисперсионных соотношений и схожего характера

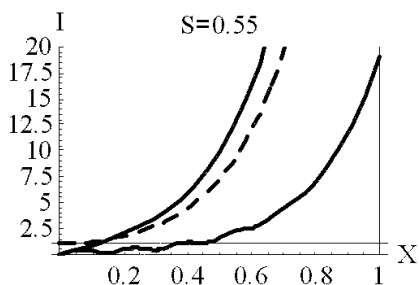


Рис. 3. Распределение тока для случая взаимодействия МВПЗ с БВПЗ и МВПЗ в двух однонаправленных потоках. Верхняя сплошная линия соответствует БВПЗ второго потока, пунктирная линия соответствует МВПЗ первого потока, нижняя сплошная линия соответствует медленной волне второго потока

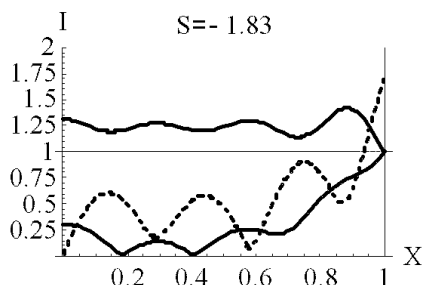


Рис. 4. Распределение тока для случая взаимодействия БВПЗ с БВПЗ и МВПЗ в двух встречных потоках. Пунктирной линией обозначен ток БВПЗ первого пучка, нижняя сплошная линия соответствует БВПЗ второго пучка, верхняя сплошная линия соответствует МВПЗ второго пучка

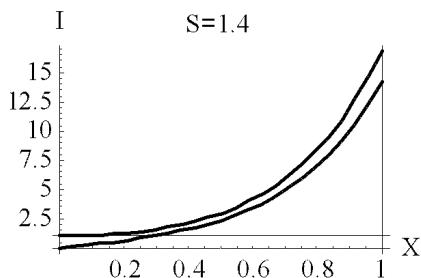


Рис. 5. Распределение тока для случая взаимодействия быстрой и медленной волны в двух однонаправленных потоках. Верхняя кривая соответствует БВПЗ первого потока, нижняя – МВПЗ второго потока

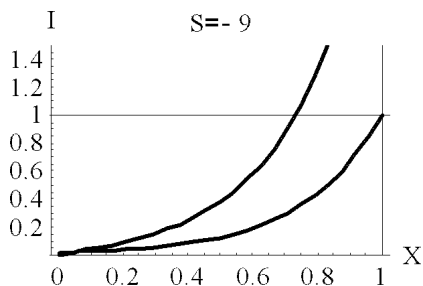


Рис. 6. Распределение тока в системе для случая двух быстрых волн в двух встречных потоках при начальной модуляции более быстрого (второго) электронного пучка по току. Верхняя линия соответствует первому потоку, нижняя – второму

пространственного распределения токов волн. Распределения, соответствующие трехволновому приближению, приведены на рис. 3 и рис. 4, а на рис. 5 и рис. 6. приведены распределения токов волн пространственного заряда в двухволновом приближении. Все выше указанные диаграммы были получены впервые.

Таким образом, в данной работе построена последовательная линейная теория двухпотокового взаимодействия на основе метода связанных волн, что позволило подробно изучить: двухволновые взаимодействия БВ-ПЗ с взаимодействия, трехволновые взаимодействия, четырехволновые взаимодействия. Для случая встречных электронных потоков столь подробное исследование проведено впервые.

Библиографический список

1. *Р. Бриггс*. Двухпучковая неустойчивость. Достижения физики плазмы. Т.3 и 4 // Изд-во «Мир»; М.:1974.
2. *М.С. Рабинович, Д.И. Трубецков*. Введение в теорию колебаний и волн, 2-е изд., перераб. и доп. // М.: Наука 1992, 454 с.
3. *В.М. Лопухин*. Возбуждение электромагнитных колебаний и волн электронными потоками // М.: 1953. 324 с.
4. *В.Н. Шевчик, Г.Н. Шведов, А.В. Соболева*. Волновые и колебательные явления в электронных потоках на сверхвысоких частотах. Изд. СГУ, 1962.
5. *K. Birhofberger, B.E. Carlsten, R. Faehl*. Generation of millimeter and sub- millimeter radiation in a compact oscillator utilizing the two-stream instability // IVEC 2008, april 22-24, 2008, p. 164.
6. *В.Н. Шевчик, Д.И. Трубецков*. Аналитические методы расчета в электронике СВЧ. // М.: Сов. Радио, 1970, 584 с.

Научный руководитель: *Трубецков Д.И.*, чл.-кор. РАН, профессор, д.ф-м.н. зав. кафедрой электроники, колебаний и волн СГУ.

К ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ЭЛЕКТРОННО-ВОЛНОВОЙ ЛАМПЫ (ЭВЛ)

Фунтов А.А., студент 3 курса ФНП СГУ

В последние годы появился новый интерес к анализу ЭВЛ, в основе действия которой лежит двухпучковая неустойчивость. Смысл возвращения к ЭВЛ связан с новыми попытками использовать её в терагерцовом диапазоне [4,5]. В настоящей работе приведены результаты достаточно полного расчета корней дисперсионного уравнения задачи в широком диапазоне изменений параметров.

Дисперсионное уравнение и его решение. Рассмотрим электронно-волновое взаимодействие 2-х электронных потоков, используя следующую модель: два бесконечно широких, хорошо перемешанных электронных потока двигаются в направлении оси x ; скорость первого потока v_{01} меньше скорости второго v_{02} . На входе в пространство взаимодействия потоки промодулированы.

Как известно, дисперсионное соотношение, соответствующее двухпучковой неустойчивости, имеет вид [1]:

$$\frac{\beta_{p1}^2}{(\beta_{e1} - \beta)^2} + \frac{\beta_{p2}^2}{(\beta_{e2} - \beta)^2} = 1, \quad (1)$$

где $\beta_{pi} = \omega_{pi}/v_{0i}$ (здесь $i = 1, 2$), ω_{pi} – плазменная частота соответствующего потока, $\beta_{ei} = \omega/v_{0i}$, ω – частота модулирующего сигнала.

Введем следующие обозначения:
средняя скорость потоков

$$v_0 = \frac{v_{01} + v_{02}}{2},$$

отклонение от средней скорости

$$\delta = \frac{v_{02} - v_{01}}{2},$$

плазменная частота

$$\omega_0 = \sqrt{\eta \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}},$$

где $\rho_0 = (\rho_1 + \rho_2)/2$ – средняя постоянная плотность заряда, $\eta = e/m$ – удельный заряд электрона, ρ_i – постоянная плотность заряда соответствующего потока, ε_0 – диэлектрическая проницаемость вакуума; параметр двух-лучевого усиления [2], также известный как параметр неоднородности

$$\kappa = \frac{\omega \delta}{\omega_0 v_0}.$$

Произведем замену переменных: $\omega_{pi} = \omega_0 r_i$, $v_i = v_0 h_i$ ($i = 1, 2$), $\beta_0 = \omega_0/v_0$. Заметим, что $h_1 + h_2 = 2$. Тогда уравнение (1) примет вид:

$$\frac{r_1^2/h_1^2}{(\kappa v_0/(h_1 \delta) - \beta/\beta_0)^2} + \frac{r_2^2/h_2^2}{(\kappa v_0/(h_2 \delta) - \beta/\beta_0)^2} = 1. \quad (2)$$

Его решения запишем следующим образом:

$$\beta_i = \frac{\beta_0}{6h_1 h_2} \left(\frac{12\kappa}{h_2 - h_1} \pm \sqrt{3} \sqrt{4\kappa^2 + 2C - \frac{(4\kappa^2 - C^2)}{D}} - D \pm \right. \\ \left. \pm \sqrt{3} \sqrt{8\kappa^2 + 4C + \frac{(4\kappa^2 - C^2)}{D} + D - \frac{12\sqrt{3}\kappa(h_2^2 r_1^2 - h_1^2 r_2^2)}{\sqrt{4\kappa^2 + 2C - \frac{(4\kappa^2 - C^2)}{D}} - D}} \right),$$

где

$D = \sqrt[3]{-[4\kappa^2 - C]^3 + 216\kappa^2 h_1^2 h_2^2 r_1^2 r_2^2 + 12\kappa\sqrt{3}h_1 h_2 r_1 r_2 \sqrt{[4\kappa^2 - C]^3 - 108\kappa^2 h_1^2 h_2^2 r_1^2 r_2^2}}$,
 $C = h_1^2 r_2^2 + h_2^2 r_1^2$. Заметим, что если предположить $\omega_{p1} = \omega_{p2} = \omega_0$, то решения примут вид:

$$\beta_i = \frac{\beta_0}{6h_1 h_2} \left(\frac{12}{h_2 - h_1} \pm \sqrt{3} \sqrt{4^2 + 2C - \frac{(4^2 - C^2)}{D}} - D \pm \right. \\ \left. \pm \sqrt{3} \sqrt{8^2 + 4C + \frac{(4^2 - C^2)}{D} + D - \frac{24\sqrt{3}}{\sqrt{4^2 + 2C - \frac{(4^2 - C^2)}{D}} - D}} \right),$$

где $D = \sqrt[3]{-[4\kappa^2 - C]^3 + 216\kappa^2 h_1^2 h_2^2 + 12\kappa\sqrt{3}h_1 h_2 \sqrt{[4\kappa^2 - C]^3 - 108\kappa^2 h_1^2 h_2^2}}$,
 $C = h_1^2 + h_2^2$. Если сделать предположение $h_2^2 - h_1^2 = 2$, то решив систему:

$$\begin{cases} h_2^2 - h_1^2 = 2, \\ h_1 + h_2 = 2, \end{cases}$$

найдем $h_2 = 1.5$ и $h_1 = 0.5$. В этом случае два вышеописанных решения полностью совпадают.

Приведем таблицу подстановки знаков в зависимости от номера β_i .

№ i	1-й \pm	2-й \pm
1	–	–
2	–	+
3	+	–
4	+	+

Таблицей надлежит пользоваться следующим образом: если берем β_3 , то вместо первого знака \pm в двух вышеописанных решениях берем знак $+$, а вместо второго знака \pm берем $-$.

Поскольку полученные решения претендуют на более полное описание ЭВЛ, то для доказательства сравним их с известными, но частными решениями [2] в предположении $\omega_{p1} = \omega_{p2} = \omega_0$.

Для этого решим дисперсионное уравнение (1), считая, что волновое число для k -ой парциальной волны имеет вид

$$\beta_k = \frac{\omega}{v_0} + \gamma.$$

Сделаем следующие допущения: $\omega_{p1} = \omega_{p2} = \omega_0$, $v_0 \gg \delta$ и замену $\xi = \gamma v_0 / \omega_0$. Тогда уравнение (1) после простых преобразований примет вид:

$$\frac{1}{(\kappa - \xi)^2} + \frac{1}{(\kappa + \xi)^2} = 1.$$

Нетрудно видеть, что это биквадратное уравнение, решения которого

$$\xi_k = \pm \sqrt{\kappa^2 + 1 \pm \sqrt{4\kappa^2 + 1}}.$$

Заметим, что $\xi_1 = -\xi_2$ и $\xi_3 = -\xi_4$.

№ k	1-й \pm	2-й \pm
1	+	–
2	–	–
3	+	+
4	–	+

Для того, чтобы сравнить решения, полученные в данной работе, и частные решения рассмотрим сначала зависимости волновых чисел и добавки ξ от κ . Приведем графики зависимостей $B(\kappa)$, где $B_i = \beta_i / \beta_0$ (см. рис. 1–9).

Как видно из рис. 1, $B(\kappa)$ это ζ плюс чисто действительное линейное слагаемое. Нетрудно видеть, что крестатронный режим* начался с $\kappa \approx 1.35$, в то время, как в хорошо известном решении [1–3] он начинается с $\kappa = \sqrt{2}$. Это объясняется, по-видимому, тем, что в [2] полагается $v_0 \gg \delta$ (это условие не соблюдается на рис. 1, а), однако, как

* Будем далее режим, где отсутствуют нарастающие решения, по аналогии с ЛБВ называть крестатронным.

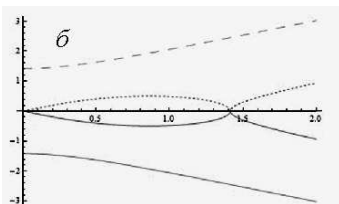
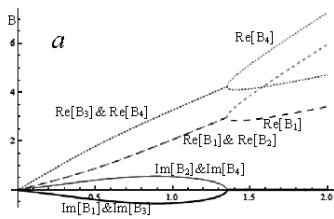


Рис. 1. *a* - Зависимость $B(\chi)$ при $h_1=0.5$, $h_2=1.5$, $r_1=1$, $r_2=1$. *б* - Зависимость $\xi(\chi)$

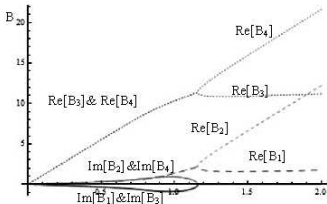


Рис. 2. Зависимость $B(\chi)$ при $h_1 = 0.1$, $h_2 = 1.9$, $r_1 = 1$, $r_2 = 1$

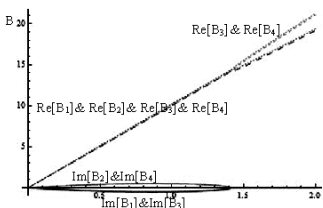


Рис. 3. Зависимость $B(\chi)$ при $h_1 = 0.9$, $h_2 = 1.1$, $r_1 = r_2 = 1$

будет видно из рисунков ниже, чем ближе скорости потоков, тем позднее начинается крестатронный режим (см. рис. 3).

Рис. 2 показывает тот факт, что чем больше различаются скорости потоков, тем раньше начинается крестатронный режим.

Видно, что рис. 3 сильнее напоминает рис. 1, *б* при вышеуказанных условиях, чем рис. 1, *а*.

Заметим, что крестатронный режим начинается с $\chi = \sqrt{2}$ или с $\chi = 1.35$ для одинаковых плазменных частот, а для неодинаковых он начинается раньше, что следует из рис. 4 и подтверждается рис. 5 и рис. 8. Крестатронного режима может не быть при определенных значениях параметров как, например, на рис. 6, где значения мнимых компонент $B(\chi)$ много меньше действительных.

Как видно из рис.6 и рис.7 при значительном преобладании плазменной частоты быстрого потока над медленным двухлучевой неустойчивости нет, т.к. возмущения, возникшие во втором потоке не могут распространяться в первом из-за большой разности частот.

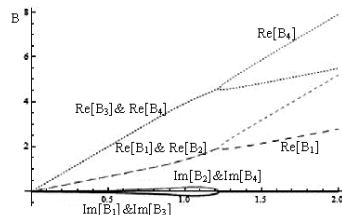


Рис. 4. Зависимость $B(\chi)$ при $h_1 = 0.5$, $h_2 = 1.5$, $r_1 = 1.41$, $r_2 = 0.14$

Особенно любопытна ситуация встречных потоков (см. рис. 9), где может достигаться сравнительно большая неустойчивость из-за больших значений мнимой компоненты по сравнению с действительной. Из рассмотренного выше следует, что чем сильнее различаются потоки, тем раньше начинается крестатронный режим.

Амплитуды парциальных волн. Найдем амплитуды парциальных волн из следующей системы уравнений [1]:

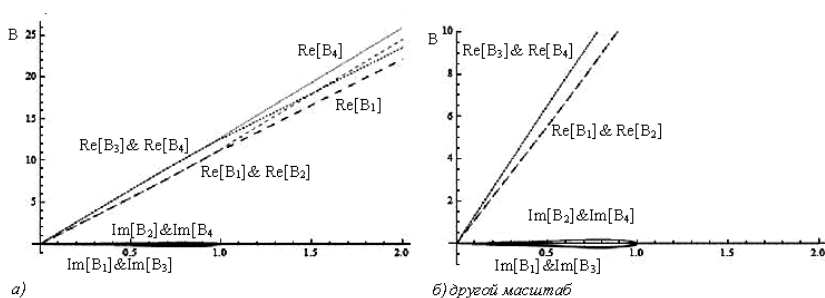


Рис. 5. Зависимость $B(x)$ при $h_1 = 0.5$, $h_2 = 1.5$, $r_1 = 1.41$, $r_2 = 0.14$

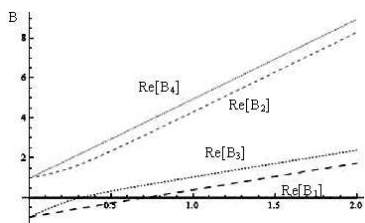


Рис. 6. Зависимость $B(x)$ при $h_1 = 0.5$, $h_2 = 1.5$, $r_1 = 0.14$, $r_2 = 1.41$

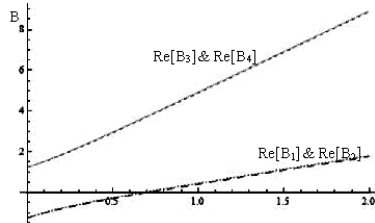


Рис. 7. Зависимость $B(x)$ при $h_1 = 0.5$, $h_2 = 1.5$, $r_1 = 0.43$, $r_2 = 1.35$

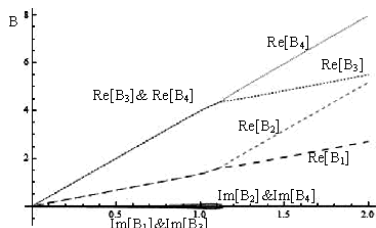


Рис. 8. Зависимость $B(x)$ при $h_1 = 0.5$, $h_2 = 1.5$, $r_1 = 1.41$, $r_2 = 0.05$

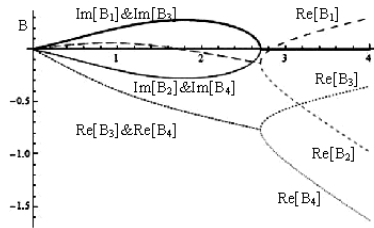


Рис. 9. Зависимость $B(x)$ при $h_1 = -0.5$, $h_2 = 1.5$, $r_1 = 1$, $r_2 = 1$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^4 \frac{E_i(0)}{\beta_{ek} - \beta_i} = \frac{jv_{0k}v_k(0)}{\eta}, \\ \sum_{i=1}^4 \frac{E_i(0)}{(\beta_{ek} - \beta_i)^2} = -\frac{v_{0k}^2 i_k(0)}{j\eta I_{0k}\beta_{ek}}, \end{cases}$$

где $k = 1, 2$, $v_k(0)$ и $i_k(0)$ – начальные значения переменных компонент скорости и силы тока для соответствующих потоков, I_{0k} – постоянная составляющая тока для соответствующих потоков, $j = \sqrt{-1}$.

Приведем решения вышеописанной системы (в дальнейшем решения обозначим (3)):

$$\begin{aligned} E_1 = & \frac{-j(\beta_1 - \beta_{e1})^2(\beta_1 - \beta_{e2})^2}{\eta I_{01}\beta_{e1}I_{02}\beta_{e2}(\beta_1 - \beta_2)(\beta_1 - \beta_3)(\beta_1 - \beta_4)(\beta_{e1} - \beta_{e2})^3} \times \\ & \times [i_2(0)I_{01}v_{02}^2\beta_{e1}(\beta_2 - \beta_{e2})(\beta_{e1} - \beta_{e2})(-\beta_3 + \beta_{e2}) \times (-\beta_4 + \beta_{e2}) + \\ & + I_{02}\beta_{e2}(i_1(0)v_{01}^2(\beta_2 - \beta_{e1})(\beta_{e1} - \beta_{e2})(-\beta_3 + \beta_{e1})(-\beta_4 + \beta_{e1}) + \\ & + I_{01}\beta_{e1}[v_{01}v_1(0)(\beta_{e1}[\beta_{e1}^2 + 2\beta_4\beta_{e2} - 3\beta_{e1}\beta_{e2}] - \\ & - \beta_3[-2\beta_{e1}\beta_{e2} + \beta_4(\beta_{e1} + \beta_{e2})] - \beta_2[-2\beta_{e1}\beta_{e2} + \beta_4(\beta_{e1} + \beta_{e2}) + \\ & + \beta_3(-2\beta_4 + \beta_{e1} + \beta_{e2})]) + v_{02}v_2(0)(-\beta_{e2}[2\beta_4\beta_{e1} + \beta_{e2}(-3\beta_{e1} + \beta_{e2})] + \\ & + \beta_3[-2\beta_{e1}\beta_{e2} + \beta_4(\beta_{e1} + \beta_{e2})] + \beta_2[-2\beta_{e1}\beta_{e2} + \beta_4(\beta_{e1} + \beta_{e2}) + \\ & + \beta_3(-2\beta_4 + \beta_{e1} + \beta_{e2})])], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_2 = & \frac{-j(\beta_2 - \beta_{e1})^2(\beta_2 - \beta_{e2})^2}{\eta I_{01}\beta_{e1}I_{02}\beta_{e2}(\beta_1 - \beta_2)(\beta_2 - \beta_3)(\beta_2 - \beta_4)(\beta_{e1} - \beta_{e2})^3} \times \\ & \times [i_2(0)I_{01}v_{02}^2\beta_{e1}(\beta_1 - \beta_{e2})(\beta_{e1} - \beta_{e2})(-\beta_3 + \beta_{e2}) \times (-\beta_4 + \beta_{e2}) + \\ & + I_{02}\beta_{e2}(i_1(0)v_{01}^2(\beta_1 - \beta_{e1})(\beta_{e1} - \beta_{e2})(-\beta_3 + \beta_{e1})(-\beta_4 + \beta_{e1}) + \\ & + I_{01}\beta_{e1}[v_{01}v_1(0)(\beta_{e1}[\beta_{e1}^2 + 2\beta_4\beta_{e2} - 3\beta_{e1}\beta_{e2}] - \\ & - \beta_3[-2\beta_{e1}\beta_{e2} + \beta_4(\beta_{e1} + \beta_{e2})] - \beta_1[-2\beta_{e1}\beta_{e2} + \beta_4(\beta_{e1} + \beta_{e2}) + \\ & + \beta_3(-2\beta_4 + \beta_{e1} + \beta_{e2})]) + v_{02}v_2(0)(-\beta_{e2}[2\beta_4\beta_{e1} + \beta_{e2}(-3\beta_{e1} + \beta_{e2})] + \\ & + \beta_3[-2\beta_{e1}\beta_{e2} + \beta_4(\beta_{e1} + \beta_{e2})] + \beta_1[-2\beta_{e1}\beta_{e2} + \beta_4(\beta_{e1} + \beta_{e2}) + \\ & + \beta_3(-2\beta_4 + \beta_{e1} + \beta_{e2})])], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_3 = & \frac{-j(\beta_3 - \beta_{e1})^2(\beta_3 - \beta_{e2})^2}{\eta I_{01} \beta_{e1} I_{02} \beta_{e2} (\beta_1 - \beta_3)(\beta_2 - \beta_3)(\beta_3 - \beta_4)(\beta_{e1} - \beta_{e2})^3} \times \\
& \times [i_2(0) I_{01} v_{02}^2 \beta_{e1} (\beta_1 - \beta_{e2})(\beta_{e1} - \beta_{e2})(-\beta_2 + \beta_{e2})(-\beta_4 + \beta_{e2}) + \\
& + I_{02} \beta_{e2} (i_1(0) v_{01}^2 (\beta_1 - \beta_{e1})(\beta_{e1} - \beta_{e2})(-\beta_2 + \beta_{e1})(-\beta_4 + \beta_{e1}) + \\
& + I_{01} \beta_{e1} [v_{01} v_1(0) (\beta_{e1} [\beta_{e1}^2 + 2\beta_4 \beta_{e2} - 3\beta_{e1} \beta_{e2}] - \beta_2 [-2\beta_{e1} \beta_{e2} + \beta_4 (\beta_{e1} + \beta_{e2})] - \\
& - \beta_1 [-2\beta_{e1} \beta_{e2} + \beta_4 (\beta_{e1} + \beta_{e2}) + \beta_2 (-2\beta_4 + \beta_{e1} + \beta_{e2})]) + \\
& + v_{02} v_2(0) (-\beta_{e2} [2\beta_4 \beta_{e1} + \beta_{e2} (-3\beta_{e1} + \beta_{e2})] + \beta_2 [-2\beta_{e1} \beta_{e2} + \beta_4 (\beta_{e1} + \beta_{e2})] + \\
& + \beta_1 [-2\beta_{e1} \beta_{e2} + \beta_4 (\beta_{e1} + \beta_{e2}) + \beta_2 (-2\beta_4 + \beta_{e1} + \beta_{e2})])],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_4 = & \frac{j(\beta_4 - \beta_{e1})^2(\beta_4 - \beta_{e2})^2}{\eta I_{01} \beta_{e1} I_{02} \beta_{e2} (-\beta_1 - \beta_4)(\beta_2 - \beta_4)(-\beta_3 + \beta_4)(\beta_{e1} - \beta_{e2})^3} \times \\
& \times [i_2(0) I_{01} v_{02}^2 \beta_{e1} (\beta_1 - \beta_{e2})(\beta_{e1} - \beta_{e2})t(-\beta_2 + \beta_{e2})(-\beta_3 + \beta_{e2}) + \\
& + I_{02} \beta_{e2} (i_1(0) v_{01}^2 (\beta_1 - \beta_{e1})(\beta_{e1} - \beta_{e2})(-\beta_3 + \beta_{e1})(-\beta_2 + \beta_{e1}) + \\
& + I_{01} \beta_{e1} [v_{01} v_1(0) (\beta_{e1} [\beta_{e1}^2 + 2\beta_4 \beta_{e2} - 3\beta_{e1} \beta_{e2}] - \beta_2 [-2\beta_{e1} \beta_{e2} + \beta_3 (\beta_{e1} + \beta_{e2})] - \\
& - \beta_1 [-2\beta_{e1} \beta_{e2} + \beta_3 (\beta_{e1} + \beta_{e2}) + \beta_2 (-2\beta_4 + \beta_{e1} + \beta_{e2})]) + \\
& + v_{02} v_2(0) (-\beta_{e2} [2\beta_3 \beta_{e1} + \beta_{e2} (-3\beta_{e1} + \beta_{e2})] + \beta_2 [-2\beta_{e1} \beta_{e2} + \beta_3 (\beta_{e1} + \beta_{e2})] + \\
& + \beta_1 [-2\beta_{e1} \beta_{e2} + \beta_3 (\beta_{e1} + \beta_{e2}) + \beta_2 (-2\beta_3 + \beta_{e1} + \beta_{e2})])].
\end{aligned} \tag{3}$$

Для сравнения полученных решений с известными найдем выражения для парциальных амплитуд, повторив ход рассуждений в [2].

Для системы двух лучей начальные значения переменных компонент скорости и плотности тока в линейном приближении можно записать в виде

$$\begin{cases} v_k(0) = \pm \frac{j\eta}{\omega_0} \sum_{i=1}^4 \frac{E_i(0)}{\kappa \pm \xi_i}, \\ q_k(0) = -\frac{j\eta\omega\rho_0}{\omega_0^2} \sum_{i=1}^4 \frac{E_i(0)}{(\kappa \pm \xi_i)^2}, \end{cases} \tag{4}$$

где $k = 1, 2$ причем знаки «+» соответствуют $k = 2$.

Найдем из уравнений (2) значения амплитуд и обозначим их (5).

$$E_i(0) = \frac{j\omega_0(\kappa^2 - \xi_1^2)^2}{8\eta\kappa^3\xi_1(\xi_1^2 - \xi_3^2)} [\mp 2\kappa^3(v_1(0) + v_2(0)) + \xi_1(v_2(0) - v_1(0))(\kappa^2 + \xi_3^2) + \frac{\omega_0\kappa}{\omega\rho_0}\xi_1(q_1(0) + q_2(0))(\kappa^2 - \xi_3^2) \mp \frac{\omega_0\kappa^2}{\omega\rho_0}(-q_1(0) + q_2(0))(\kappa^2 - \xi_3^2)],$$

где $i = 1, 2$, знаки « \mp » соответствуют $i = 1$.

$$E_i(0) = \frac{j\omega_0(\kappa^2 - \xi_3^2)^2}{8\eta\kappa^3\xi_3(\xi_1^2 - \xi_3^2)} [\pm 2\kappa^3(v_1(0) + v_2(0)) - \xi_3(v_2(0) - v_1(0))(\kappa^2 + \xi_1^2) - \frac{\omega_0\kappa}{\omega\rho_0}\xi_3(q_1(0) + q_2(0))(\kappa^2 - \xi_1^2) \pm \frac{\omega_0\kappa^2}{\omega\rho_0}(-q_1(0) + q_2(0))(\kappa^2 - \xi_1^2)],$$
(5)

где $i = 3, 4$, знаки « \pm » соответствуют $i = 4$.

Нетрудно видеть, если раскрыть скобки в (3), то полученные выражения напоминает (5) с точностью до коэффициентов и переобозначений. Напомним, что уравнения (3) получены аналитически в рамках линейной теории без дополнительных приближений, в то время как в общеизвестной литературе [1–3] решения получены, либо в приближении равных плазменных частот, либо получены численно.

Библиографический список

1. Шевчик В.Н., Трубецков Д.И. Аналитические методы расчета в электронике СВЧ. М.: «Советское радио», 1970.
2. Канавец В.И., Кузьмина Г.А., Лопухин В.М. Шумы двулучевой лампы, вызванные дробовыми флуктуациями в потоках. «Радиотехника и электроника», 1958 г., № 6, стр. 800.
3. Шевчик В.Н., Шведов Г.Н., Соболева А.В. Волновые и колебательные явления в электронных потоках на сверхвысоких частотах. Издательство Саратовского университета, 1962 г.
4. Carlsten B.E., Bishotberger K.A., Faehl R.J. Compact two-stream generator of millimeter- and sub-millimeter – wave radiation. Phys.Plasmas 15, 073101 (2008).
5. Bishotberger K.A., Carlsten B.E., Faehl R.J. Generation of millimeter- and sub-millimeter radiation in a compact oscillator utilizing the two-stream instability. IVEC 2008, April 22-24, 2008, p. 164.

Научный руководитель: Трубецков Д.И., чл.-кор. РАН, профессор, д.ф.-м.н., зав. кафедрой электроники, колебаний и волн СГУ.

ОБОБЩЕННАЯ СИНХРОНИЗАЦИЯ ВО ВЗАИМНО СВЯЗАННЫХ СИСТЕМАХ

Шурыгина С.А., аспирант, ФНП СГУ

Одним из известных типов синхронного поведения связанных хаотических систем является режим обобщенной хаотической синхронизации [1]. Этот режим традиционно вводится в рассмотрение для системы двух однонаправлено связанных хаотических осцилляторов, ведущего $\mathbf{x}(t)$ и ведомого $\mathbf{u}(t)$, и означает, что после завершения переходного процесса между состояниями этих систем устанавливается уникальное функциональное соотношение $\mathbf{F}[\cdot]$ такое, что

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{F}[\mathbf{x}(t)]. \quad (1)$$

В последнее время появились попытки обобщения режима обобщенной синхронизации на системы с взаимным типом связи [2]. В то же самое время, известные работы, посвященные этой проблеме, направлены лишь на установление факта существования этого режима, в то время как само понятие обобщенной синхронизации для таких систем, как правило, не вводится в рассмотрение. Более того, во всех известных работах диагностика обобщенной синхронизации производится при помощи модификации метода вспомогательной системы [3], являющегося эффективным средством анализа обобщенной синхронизации в системах с однонаправленной связью, однако, вопрос о корректности применения этого метода к системам с взаимным типом связи остается открытым.

В настоящей работе предлагается универсальная концепция обобщенной синхронизации, справедливая для двух систем, связанных как однонаправлено, так и взаимно. Как будет показано ниже, диагностирование обобщенной синхронизации в таких системах можно осуществлять путем расчета спектра ляпуновских экспонент или при помощи метода ближайших соседей, при этом метод вспомогательной системы для систем с взаимным типом связи приводит к некорректным результатам.

Обобщим понятие обобщенной синхронизации (1) на случай взаимной связи между системами. Для учета взаимного влияния систем друг на друга уравнение (1) перепишем в виде

$$\mathbf{F}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)] = 0. \quad (2)$$

Таким образом, под обобщенной синхронизацией взаимно связанных систем, также как и в случае однонаправленной связи, мы будем понимать такой режим, при котором имеет место установление уникального функционального соотношения между состояниями этих систем, но функциональное соотношение в данном случае переписывается в виде (2).

Для диагностики обобщенной хаотической синхронизации в однонаправленных связанных системах традиционно используются три метода: метод ближайших соседей [1,4]; расчет ляпуновских экспонент [5]; метод вспомогательной системы [3]. Следует отметить, что метод вспомогательной системы получил наибольшее распространение на практике в связи с простотой его реализации и высокой точностью определения порогового значения установления синхронного режима. Именно поэтому метод вспомогательной системы и был впервые обобщен на случай взаимной связи между системами [2].

Согласно этому методу, наряду с каждой из двух систем должна быть введена в рассмотрение ее идентичная по управляющим параметрам копия, стартующая с других начальных условий, принадлежащих тому же бассейну притяжения хаотического аттрактора, и испытывающая воздействие со стороны другой системы. Обобщенная синхронизация в этом случае возникает тогда, когда системы и их копии начинают попарно демонстрировать идентичное поведение.

В то же самое время, более детальный анализ показывает, что такая модификация метода для двух взаимно связанных систем может приводить к некорректным результатам. В частности, по аналогии с работой [2], рассмотрим две взаимно связанные системы, $\mathbf{x}(t)$ и $\mathbf{u}(t)$, и введем в рассмотрение два вспомогательных осциллятора $\mathbf{x}'(t)$ и $\mathbf{u}'(t)$, идентичных по управляющим параметрам $\mathbf{x}(t)$ и $\mathbf{u}(t)$, соответственно. Тип связи между исходными $\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{u}(t)$ и вспомогательными $\mathbf{x}'(t)$, $\mathbf{u}'(t)$ системами, как упоминалось выше, должен быть однонаправленным. Тогда, следуя идеологии работы [2], когда одна из пар идентичных по управляющим параметрам систем (например, $\mathbf{u}(t)$ и $\mathbf{u}'(t)$) начинает демонстрировать идентичное поведение, в системе реализуется режим частичной обобщенной синхронизации. Как только состояния обеих пар идентичных систем начнут совпадать (то есть, $\mathbf{u}(t) \equiv \mathbf{u}'(t)$ и $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{x}'(t)$), в системе возникает режим полной обобщенной синхронизации.

Теперь рассмотрим вырожденную ситуацию, когда взаимодействующие взаимно связанные системы $\mathbf{x}(t)$ и $\mathbf{u}(t)$ идентичны. Тогда между состояниями взаимодействующих систем возможно установление режима полной хаотической синхронизации, когда $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{u}(t)$. Ввиду идентичности

вспомогательных систем, введенных в рассмотрение согласно методу, описанному выше, режимы частичной и полной обобщенной синхронизации должны совпадать друг с другом. Понятно, что режим обобщенной синхронизации, реализуемый между состояниями взаимно связанных систем, в данном случае эквивалентен режиму полной синхронизации между исходной системой и вспомогательной. В силу однонаправленного типа связи между ними, режим полной синхронизации в таких системах будет возникать в два раза позже, чем в исходных системах, связанных взаимно [2]. То есть, в терминологии работы [2], режим обобщенной синхронизации в данном случае оказывается сильнее режима полной синхронизации, что противоречит самому определению режима обобщенной синхронизации. Если параметры взаимодействующих систем немного расстроены, вместо полной синхронизации имеет место режим синхронизации с запаздыванием. В этом случае, как будет показано ниже, применение метода вспомогательной системы для осцилляторов с взаимным характером связи снова приводит к противоречию: режим обобщенной синхронизации в терминологии работы [2] оказывается сильнее синхронизации с запаздыванием. Таким образом, метод вспомогательной системы оказывается неприменимым для анализа обобщенной синхронизации во взаимно связанных системах.

Другим методом диагностики обобщенной синхронизации в однонаправленно связанных системах является метод ближайших соседей [1,4]. Кроме того, детектирование режима обобщенной синхронизации в таких системах возможно осуществлять при помощи расчета спектра ляпуновских экспонент [5]. В этом случае обобщенная синхронизация возникает тогда, когда старший условный ляпуновский показатель (рассчитанный для ведомой системы) становится отрицательным. Аналогичная ситуация наблюдается и в системах с взаимным типом связи: при увеличении параметра связи один из положительных показателей Ляпунова становится отрицательным. Можно предположить, что этот переход связан с установлением обобщенной синхронизации во взаимно связанных системах.

Согласно методу ближайших соседей, наличие функционального соотношения между состояниями взаимодействующих систем означает, что все близкие состояния в фазовом пространстве первой системы $\mathbf{x}(t)$ соответствуют близким состояниям в фазовом пространстве второй системы $\mathbf{u}(t)$ (более подробно см. [1]). Для двух взаимно связанных систем верно и обратное утверждение: все близкие состояния в фазовом пространстве второй системы $\mathbf{u}(t)$ должны соответствовать близким состояниям в фазовом пространстве первой системы $\mathbf{x}(t)$. Количественной характеристикой степени близости состояний систем является среднее расстояние между двумя

состояниями одной из систем \mathbf{u}^k и \mathbf{u}^{kn} , нормированное на среднее расстояние δ между случайно выбранными состояниями другой системы [11]:

$$d = \frac{1}{N\delta} \sum_{k=0}^{N-1} \|\mathbf{u}^k - \mathbf{u}^{kn}\|, \quad (3)$$

где N – число производимых итераций. В режиме обобщенной синхронизации $d \rightarrow 0$, в отсутствие функционального соотношения между состояниями взаимодействующих систем $d \approx 1$.

В то же самое время, несмотря на тот факт, что метод ближайших соседей может быть без труда применен к анализу взаимно связанных систем, он обладает принципиальным недостатком, являясь недостаточно точным. Следовательно, он позволяет определить порог возникновения синхронного режима только приблизительно и находит применение при обработке экспериментальных данных (где реализация других методов анализа представляется затруднительной) или используется для уточнения полученных результатов. Поэтому в настоящей работе мы будем использовать метод ближайших соседей для верификации факта наступления обобщенной синхронизации в системах с взаимным типом связи по моменту перехода второй (положительной) ляпуновской экспоненты в область отрицательных значений. Чтобы показать, что диагностируемый режим отличается от режима синхронизации с запаздыванием, в настоящей работе проводится также диагностика и этого режима.

Рассмотрим поведение двух взаимно связанных систем Ресслера

$$\begin{aligned} \dot{x}_{1,2} &= -\omega_{1,2}y_{1,2} - z_{1,2} + \varepsilon(x_{2,1} - x_{1,2}), \\ \dot{y}_{1,2} &= \omega_{1,2}x_{1,2} + ay_{1,2}, \\ \dot{z}_{1,2} &= p + z_{1,2}(x_{1,2} - c), \end{aligned} \quad (4)$$

где $\mathbf{x}_{1,2}(t) = (x_{1,2}, y_{1,2}, z_{1,2})^T$ – векторы состояния взаимодействующих систем, ε – параметр связи, $a = 0.15$, $p = 0.2$, $c = 10$ – управляющие параметры. Параметр ω_2 , характеризующий собственную частоту колебаний второй системы, был выбран равным $\omega_2 = 0.95$, в то время как аналогичный параметр первой системы варьировался в диапазоне $[0.89; 1.01]$, чтобы обеспечить расстройку между взаимодействующими осцилляторами.

Известно, что при увеличении силы связи ε взаимно связанные системы Ресслера (4) демонстрируют переход от асинхронного состояния к режиму синхронизации с запаздыванием [6] через режим фазовой синхронизации и синхронизации временных масштабов. Как отмечалось выше, режим

синхронизации с запаздыванием является частным случаем режима обобщенной синхронизации и представляет собой его более сильную форму, то есть, если в системе реализуется режим синхронизации с запаздыванием, в ней обязательно существует и режим обобщенной синхронизации. В то же самое время, диагностика режима обобщенной синхронизации при помощи метода вспомогательной системы, предложенная в [2], приводит к некорректным результатам. Для подтверждения этого факта произведем сравнение пороговых значений возникновения этих типов синхронного поведения друг с другом.

На рис. 1 приведены границы возникновения различных типов хаотической синхронизации на плоскости параметров (ω_1, ε) . Здесь также показаны границы режимов частичной и полной обобщенной синхронизации, диагностируемых методом вспомогательной системы. Нетрудно заметить, что в общем случае режимы частичной и полной обобщенной синхронизации возникают после момента возникновения синхронизации с запаздыванием (отметим, что в области достаточно больших значений расстройки собственных частот, возможно наступление этих режимов до наступления синхронизации с запаздыванием).

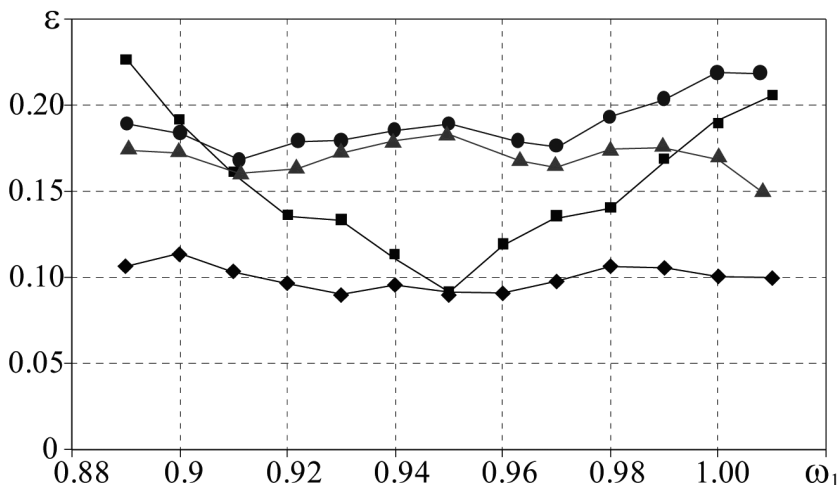


Рис. 1. Границы режимов синхронизации с запаздыванием (■), частичной (▲) и полной (●) обобщенной синхронизации в системе двух взаимно связанных осцилляторов Ресслера (4), а также кривая, соответствующая моменту перехода одной из положительных ляпуновских экспонент системы (4) в область отрицательных значений (показана ◆)

Таким образом, проведенные численные расчеты подтверждают теоретические рассуждения, приведенные ранее, о некорректности применения метода вспомогательной системы к анализу поведения хаотических осцилляторов, связанных взаимно. Покажем, что режим обобщенной синхронизации в этом случае может быть диагностирован по моменту перехода одной из положительных ляпуновских экспонент в область отрицательных значений.

На рис. 1 приведена также граница перехода второго ляпуновского показателя через ноль в системе (4) (показана на рис. 1 ромбами). Видно, что указанная граница не совпадает ни с одной из критических кривых (границами синхронизации с запаздыванием, частичной и полной обобщенной синхронизаций в терминологии работы [2]), приведенных на рисунке. Более того, она проходит ниже границы синхронизации с запаздыванием и практически не зависит от величины частотной расстройки между взаимодействующими системами.

Переход одной из положительных ляпуновских экспонент в область отрицательных значений объяснялся в работе [6] возникновением синхронизации с запаздыванием, а различие между критическими значениями параметра связи, соответствующими этим режимам, – наличием перемежающегося поведения – перемежающейся синхронизации с запаздыванием [7]. В то же самое время, как видно из рис. 1, границы возникновения обоих типов поведения абсолютно не связаны друг с другом: пороговое значение параметра связи, соответствующее установлению синхронизации с запаздыванием, монотонно растет при увеличении частотной расстройки, в то время как критическая кривая, характеризующая переход одной из положительных ляпуновских экспонент в область отрицательных значений, практически не зависит от последней. Более того, как было выявлено в ходе проведенных исследований, при различных значениях управляющих параметров взаимодействующих систем перемежающееся поведение может наблюдаться как до, так и после момента перехода положительной ляпуновской экспоненты через ноль.

Таким образом, переход одной из положительных ляпуновских экспонент во взаимно связанных системах в область отрицательных значений никак не связан с возникновением синхронизации с запаздыванием и перемежаемости вблизи ее границ. Можно предположить, что по аналогии со случаем однонаправленно связанных систем этот режим может быть интерпретирован как переход к обобщенной синхронизации в системах с взаимным типом связи. Для проверки сделанных предположений применим метод ближайших соседей для диагностики обобщенной синхронизации в системе

(4) при $\omega_1 = 0.99$. На рис. 2, б приведена зависимость количественной меры d от параметра связи ε .

На рис. 2, а показана также зависимость четырех старших ляпуновских экспонент для системы (4), $\omega_1 = 0.99$. Момент перехода одной из положительных ляпуновских экспонент в область отрицательных значений $\varepsilon_{GS} = 0.106$ отмечен стрелкой на обоих рисунках. Видно, что в этот момент количественная мера d оказывается близкой к нулю, что говорит о возникновении обобщенной синхронизации в системе (4).

Проанализируем характер зависимости $d(\varepsilon)$ более детально. Из рис. 2, б видно, что плоскость $(\varepsilon; d)$ может быть условно разделена на четыре области: I – $\varepsilon \in [0; 0.04)$, мера d уменьшается достаточно резко, характеризуя переход от асинхронного состояния к режиму фазовой синхронизации при $\varepsilon_{PS} = 0.04$; II – $\varepsilon \in [0.04; 0.09)$, d практически не меняется, что свидетельствует о существовании режима фазовой синхронизации; III – $\varepsilon \in [0.09; 0.12)$, мера d убывает очень медленно, что отвечает возникновению режима обобщенной синхронизации; IV – $\varepsilon > 0.12$, $d \approx 0$. Отметим, что в области IV имеет место слабое изменение количественного значения d : как до, так и после момента возникновения синхронизации с запаздыванием ($\varepsilon_{LS} \approx 0.169$, отмечено также стрелкой на рисунке) она практически не меняет своего значения. Приведенные расчеты свидетельствуют также о том, что режимы частичной и полной обобщенной синхронизации не приводят ни к качественным, ни к количественным изменениям количественной меры d и спектра ляпуновских показателей, в то время как все остальные типы синхронного поведения находят свое отражение и в той, и в другой характеристике.

На рис. 2, в–к приведены фазовые портреты взаимодействующих систем Ресслера (4) при различных значениях параметра связи ε . На фазовых портретах первой системы $\mathbf{x}(t)$ (рис. 2, в, д, ж, и) приведены также три случайно выбранные точки \mathbf{x}^k и их ближайшие соседи \mathbf{x}^{kn} . Рис. 2, г, е, з, к иллюстрируют соответствующие им состояния $\mathbf{u}^{k, kn}$ в фазовом пространстве второй системы $\vec{u}(t)$.

Нетрудно заметить, что при малых значениях параметра связи ($\varepsilon = 0.01$) все точки в фазовом пространстве второй системы распределены случайным образом по всему аттрактору (рис. 2, г). При увеличении параметра связи точки начинают группироваться в ограниченном диапазоне аттрактора, причем радиус этой области уменьшается с ростом параметра связи (сравните рис. 2, е, з). При $\varepsilon > \varepsilon_{LE}$ все состояния второй системы, соответствующие ближайшим соседям первого осциллятора, оказываются также близкими и наоборот (рис. 2, ж, з и рис. 2, и, к), что доказывает

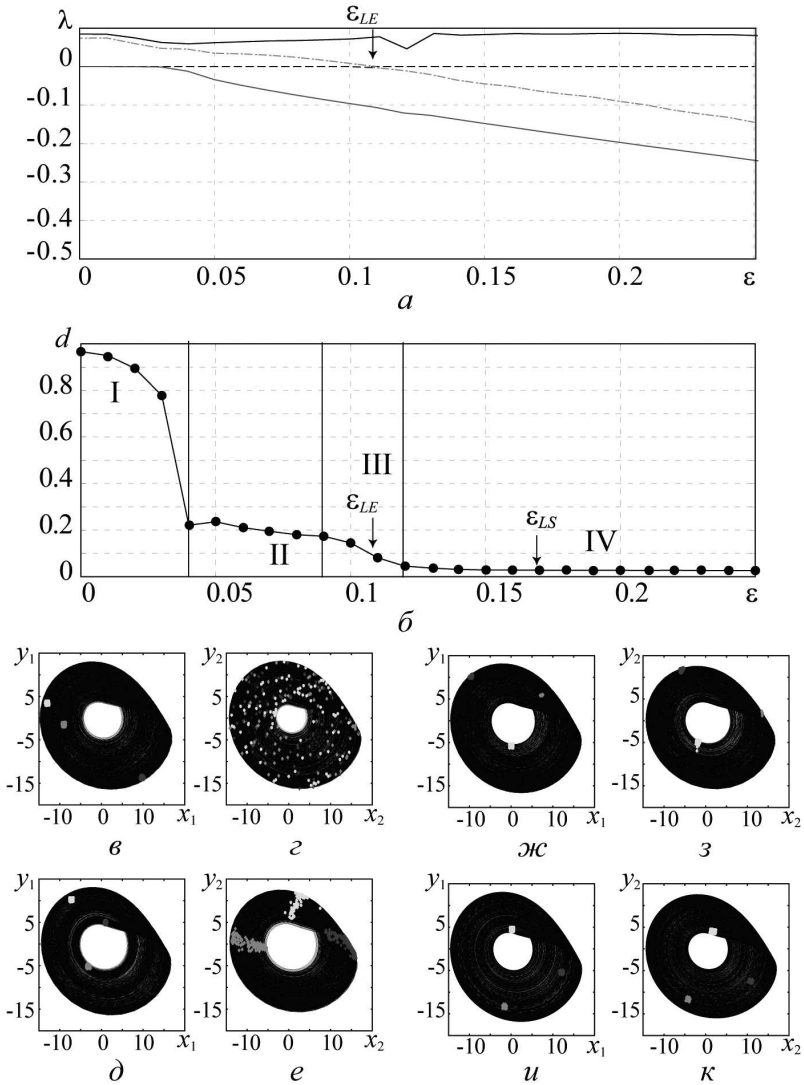


Рис. 2. Зависимость четырех старших ляпуновских экспонент (а) и количественной меры d (б) от параметра связи ε для системы (4), $\omega_1 = 0.99$ (в-к) Фазовые портреты осцилляторов Ресслера для различных значений параметра связи)

возникновение обобщенной синхронизации. В то же самое время, отметим также некую разницу между режимами обобщенной синхронизации и синхронизации с запаздыванием, заключающуюся в том, что в режиме синхронизации с запаздыванием изображающие точки, соответствующие ближайшим соседям, находятся практически в одних и тех же частях хаотического аттрактора (рис. 2, *и, κ*), в то время как в режиме обобщенной синхронизации они могут находиться в несколько разных областях (рис. 2, *ж, з*).

Таким образом, в настоящей работе проведено исследование режима обобщенной синхронизации в системах с взаимной связью. Предложена универсальная концепция обобщенной синхронизации, справедливая как для однонаправлено, так и взаимно связанных хаотических осцилляторов. Показано, что возникновение режима обобщенной синхронизации в таких системах связано с переходом второй ляпуновской экспоненты в область отрицательных значений. Полученные результаты подтверждены при помощи метода ближайших соседей. При этом показано, что метод вспомогательной системы для взаимно связанных систем приводит к некорректным результатам.

Работа выполнена при поддержке Совета по грантам Президента РФ (проект МК-672.2012.2) и РФФИ (проект № 12-02-00221-а).

Библиографический список

1. *Rulkov N.F. et al. // Phys. Rev. E. 1995. V. 51. № 2. P. 980.*
2. *Zheng Z. et al. // Phys. Rev. E. 2002. V. 65. P. 056211.*
3. *Abarbanel H.D.I. et al. // Phys. Rev. E. 1996. V. 53. № 5. P. 4528.*
4. *Parlitz U. et al. // Phys. Rev. E. 1996. V. 54. № 2. P. 2115-2117.*
5. *Pyragas K. // Phys. Rev. E. 1996. V. 54. P. R4508.*
6. *Rosenblum M.G. et al. // Phys. Rev. Lett. 1997. V. 78. № 22. P. 4193.*
7. *Boccaletti S., Valladares D.L. // Phys. Rev. E. 2000. V. 62. № 5. P. 7497.*

Научный руководитель: *Москаленко О.И.*, к.ф.-м. н., доцент КФОС.

Содержание

Рабочая программа	4
Лекции	
<i>Левин Ю.И.</i> Нелинейные явления	9
<i>Трубецков Д.И.</i> Две лекции. Анализ размерностей или райская жизнь в физике	13
<i>Шараевский Ю.П.</i> «Левые» среды. Чем они интересны?	33
<i>Богатырев В.А.</i> Коллоидное золото в световой микроскопии	44
<i>Храмов А.Е.</i> Самоорганизация и образование структур	50
Доклады участников	
<i>Васильев А.А., Волощук С.С.</i> Сравнительный анализ двух нестационарных моделей генераторов обратной волны типа О («непрерывная» и «дискретная» модели)	71
<i>Демина Н.В.</i> Симуляция схемы широкополосной передачи информации, основанной на синхронизации систем с гиперболическим хаосом и фазовом подмешивании	78
<i>Дубинин А.С.</i> Разрыв линии перехода к хаосу в консервативно связанных отображениях Эно при изменении параметра диссипации	83
<i>Корнилов М.В., Сысоев И.В.</i> Работоспособность метода нелинейной грейнджеровской причинности при использовании неадекватных моделей	87
<i>Парамонов Ф.Б.</i> Увеличение чувствительности метода нелинейной грейнджеровской причинности с ростом уровня внешнего измерительного шума	93
<i>Сысоева М.В.</i> Оценка параметров модельных систем с запаздыванием под внешним периодическим воздействием	97
<i>Титов А.В.</i> Некоторые вопросы линейной теории двухпоточковой неустойчивости	100
<i>Фунтов А.А.</i> К линейной теории электронно-волновой лампы (ЭВЛ) ...	106
<i>Шурыгина С.А.</i> Обобщенная синхронизация во взаимно связанных системах	114

Научное издание

НЕЛИНЕЙНЫЕ ДНИ В САРАТОВЕ ДЛЯ МОЛОДЫХ – 2011

Материалы научной школы-конференции

Ответственный за выпуск профессор Ю.И. Лёвин

Компьютерный макет О.Н. Строгановой
Технический редактор Н.Н. Лёвина
Художник Д.В. Соколов

Подписано к печати 26.09.2012. Формат 60x84 1/16
Бумага Кум Lux. Гарнитура Таймс. Печать трафаретная
Усл. печ. л. 7,25(7,8). Уч.-изд. л. 7,0. Тираж 100 экз. Заказ 441

РИО журнала «Известия вузов. ПНД»
410012, Саратов, ул. Астраханская, 83

Отпечатано на ризографе RG 3750
РИО журнала «Известия вузов. ПНД»