

ЖЕНСКИЕ ДНИ В САРАТОВЕ



ДЛЯ МОЛОДЫХ - 2010

<i>Кузнецов А.С.</i> Параметрические генераторы хаоса с гиперболическими аттракторами	65
<i>Латухина Е.Ю.</i> Динамика диссипативного аналога отображения–паутины	71
<i>Маляев В.С., Семенов В.В.</i> Оценка параметров зашумленных динамических систем в случае жесткой бифуркации	76
<i>Назимов А.И.</i> Применение искусственных нейронных сетей для решения задачи классификации потенциалов действия	79
<i>Обычев М.А.</i> Возможность реализации комплексной аналитической динамики в неавтономной нелинейной кольцевой системе	83
<i>Обычев М.А.</i> Численное исследование динамических систем – приближенных моделей резонансного взаимодействия волн в слабонелинейной среде с дисперсией	87
<i>Поздняков М.В.</i> Устройство пространства параметров несимметрично связанных универсальных двумерных отображений	91
<i>Савин Д.В.</i> Динамика консервативно связанных отображений Эно при изменении уровня диссипации	95
Синхронизация	99
<i>Дворак А.А.</i> Влияние синхронизации хаоса на перемешивание в системе двух связанных осцилляторов Ресслера	100
<i>Емельянова Ю.П.</i> Особенности синхронизации в системе связанных осциллятора ван дер Поля и генератора Кислова–Дмитриева	104
<i>Перегородова Е.Н., Усачева С.А.</i> Синхронизация системы двух конкурирующих мод внешним гармоническим сигналом	108
<i>Родионов М.А.</i> Синхронизация нейронных ансамблей	112
<i>Усачева С.А.</i> Синхронизация автогенератора с запаздыванием вблизи границы зон генерации	116
<i>Хорев В.С.</i> Развитие методов анализа взаимодействия низкочастотных ритмов сердечно-сосудистой системы человека	120

ФАКУЛЬТЕТ НЕЛИНЕЙНЫХ ПРОЦЕССОВ
САРАТОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА им. Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО
САРАТОВСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ МЕЖДУНАРОДНОГО ИНСТИТУТА
ИНЖЕНЕРОВ ПО ЭЛЕКТРОТЕХНИКЕ И ЭЛЕКТРОНИКЕ (IEEE)

Нелинейные дни в Саратове для молодых – 2010

6 октября, 24, 26 ноября 2010

Материалы научной школы-конференции

Саратов, 2011

УДК 517.9; 530.1
ББК 22.311я43

Н 49 Нелинейные дни в Саратове для молодых – 2010: Сборник материалов научной школы-конференции. Саратов, 6 октября, 24, 26 ноября 2010. Саратов: ООО ИЦ «Наука», 2011. 124 с.
ISBN 978-5-9999-0652-6

В настоящий сборник включены материалы традиционной, восемнадцатой, школы-конференции по нелинейной динамике и нелинейной физике. Сборник будет интересен как для студентов и аспирантов, так и для преподавателей высших учебных заведений естественно-научных факультетов.

Под редакцией профессора Н.М. Рыскина

УДК 517.9; 530.1
ББК 22.311я43

© РИО журнала
«Изв.вузов. ПНД», 2011
© Д.В. Соколов, 2011

ISBN 978-5-9999-0652-6

Научное издание

НЕЛИНЕЙНЫЕ ДНИ В САРАТОВЕ ДЛЯ МОЛОДЫХ – 2010

Материалы научной школы-конференции

Ответственный за выпуск профессор Н.М. Рыскин

Технический редактор Н.Н. Лёвина
Художник Д.В. Соколов

Подписано к печати 14.03.2011

Формат 60x84 1/16. Бумага Снегурочка. Гарнитура Таймс. Печать трафаретная.
Усл. печ. л. 7,25(7,8). Уч.-изд. л. 7,0. Тираж 100 экз. Заказ 439

РИО журнала «Известия вузов. ПНД», 410012, Саратов, ул. Астраханская, 83
Отпечатано на ризографе RG 3750 РИО журнала «Известия вузов. ПНД»

Содержание

Вступительное слово.....	4
Рабочая программа школы-конференции	5
Окно в науку.....	9
Радиофизика, физика колебаний и волн	14
<i>Аленькина А.С.</i> Моделирование нелинейной динамики уравнения Гинзбурга–Ландау при абсолютной и конвективной неустойчивости	15
<i>Краснова Г.М.</i> О влиянии пространственного заряда на взаимодействие электронного пучка с электромагнитной волной в постоянном магнитном поле	19
<i>Ланина М., Степанов В.</i> Дисперсионные характеристики медленных волн в ферромагнитных плёнках	24
<i>Мисюрин А.Г.</i> Анализ динамики лазерного пучка, распространяющегося в условиях резонансного самовоздействия	28
<i>Романенко Д.В.</i> Хаотические колебания и автосолитоны в кольцевой автоколебательной системе с нелинейной линией задержки на магнитоэлектрических волнах	33
<i>Садовников А.В.</i> Динамика распространения щелевых солитонов в двумерной нелинейной брэгговской решетке	37
<i>Титов А.В.</i> Некоторые вопросы линейной теории двухлучевой неустойчивости	40
<i>Шешукова С.Е.</i> Численное моделирование солитонов огибающей в периодических ферромагнитных структурах на основе системы уравнений Шредингера	44
Нелинейная динамика, бифуркации и хаос.....	48
<i>Адилова А.Б.</i> Искусственная дискретизация простейших автоколебательных систем с мягким и жестким возбуждением	49
<i>Аржанухина Д.С., Поздняков М.В.</i> Разрушение грубого хаоса в модельных системах, построенных на основе отображения «кот Арнольда»	53
<i>Дубинин А.С.</i> Модели Улама и Заславского при различных уровнях диссипации	57
<i>Круглов В.П.</i> Автономная система с аттрактором Смейла–Вильямса на основе кольцевой структуры из осцилляторов ван дер Поля с резонансным механизмом передачи возбуждения	61

Например, на рис. 1. отчётливо видно, что положения максимумов лежат в положительной области на временах задержки порядка 4–6 с.

Таким образом, было подтверждено взаимодействие ритмов с частотой 0.1 Гц, наблюдаемых в последовательности R-R интервалов и кровяном давлении. Было обнаружено наличие задержек взаимодействующих ритмов, составляющее порядка четверти характерного периода, причём у людей, имеющих патологии сердечно-сосудистой системы, показатели задержки, синхронизации и направления взаимодействия между системами отличны от наблюдаемых на здоровых испытуемых.

Работа поддержана грантом РФФИ, проект 10-02-00980.

Библиографический список

1. *Stefanovska, M. Bračić.* Physics of the human cardiovascular system // *Contemp. Phys.* 1999. V. 40. P. 31-55.
2. *M.A. Cohen, J.A. Taylor.* Short-term cardiovascular oscillations in man: Measuring and modeling the physiologies // *J. Physiol. (London)*. 2002. V. 542. P. 669-683.
3. *M.D. Prokhorov, V.I. Ponomarenko, V.I. Gridnev, M.B. Bodrov, A.B. Bespyatov.* Synchronization between main rhythmic processes in the human cardiovascular system // *Phys. Rev. E.* 2003. V. 68. 041913.

Научные руководители: Прохоров М.Д., д.ф.-м. н., в.н.с. СФ ИРЭ РАН, Пономаренко В.И., д.ф.-м.н., профессор.

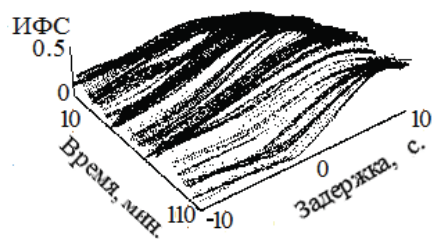


Рис. 1. Зависимость индекса фазовой синхронизации от пробного времени задержки, рассчитанного в скользящем окне по временному ряду.

Организаторы и спонсоры

- Факультет нелинейных процессов СГУ (ФНП)
- Саратовское отделение Международного Института инженеров по электротехнике и электронике (IEEE)

Программный комитет

- Трубецков Д.И.** **председатель**, чл.-корр. РАН, заведующий кафедрой электроники, колебаний и волн ФНП СГУ
- Левин Ю.И.** **зам. председателя**, профессор, декан ФНП СГУ
- Шараевский Ю.П.** д.ф.-м.н., заведующий кафедрой нелинейной физики ФНП СГУ
- Рыскин Н.М.** д.ф.-м.н., профессор кафедры нелинейной физики ФНП СГУ
- Савин А.В.** к.ф.-м.н., доцент кафедры нелинейной физики ФНП СГУ

Рабочий организационный комитет

- Трубецков Д.И.** **председатель**, чл.-корр. РАН, заведующий кафедрой электроники, колебаний и волн ФНП СГУ
- Левин Ю.И., Шараевский Ю.П.** **зам. председателя**, профессор, декан ФНП СГУ
- Шараевский Ю.П.** д.ф.-м.н., заведующий кафедрой нелинейной физики ФНП СГУ
- Рыскин Н.М.** д.ф.-м.н., профессор кафедры нелинейной физики ФНП СГУ
- Савин А.В.** к.ф.-м.н., доцент кафедры нелинейной физики ФНП СГУ
- Марнопольская В.П.** вед. программист ФНП СГУ
- Савин Д.В.** аспирант ФНП СГУ
- Кузнецов Н.Н.** вед. программист ФНП СГУ

Осенние Школы-конференции «Нелинейные дни в Саратове для молодых» ежегодно организуются факультетом нелинейных процессов Саратовского госуниверситета. Очередная, уже 18-я по счету, Школа прошла в октябре-ноябре 2010 года при финансовой поддержке факультета нелинейных процессов и Саратовского отделения Международного института инженеров по электротехнике и электронике (IEEE). Как и все последние годы, Школа-конференция проходила в два этапа.

На первом этапе, 6 октября 2010 года, в пансионате «Сокол» (Саратов) прошел семинар для школьников, в работе которого приняли участие учителя города и области и учащиеся старших классов Саратова и Красноармейска, преподаватели ФНП СГУ. Для слушателей были прочитаны лекции, посвященные обзору различных актуальных проблем нелинейной физики, а именно: «Очарование хаоса» (А.Ю. Лоскутов, профессор, физ-фак МГУ), «Нелинейный мир» (В.Д. Шалфеев, профессор, радиофак ННГУ), «Пределные возможности земных и космических ускорителей частиц» (Вл.В. Кочаровский, чл.-корр. РАН, ИПФ РАН, Нижний Новгород). По традиции был проведен круглый стол «Нелинейная наука и факультет нелинейных процессов» (ведущие Д.И. Трубецков, чл.-корр. РАН и Ю.И. Левин, профессор, ФНП СГУ). Слушателей, школьников и учителей, ознакомили с целями и задачами образовательного процесса на факультете, особенностями подготовки специалистов в области нелинейной динамики. Ряд старшеклассников Саратова (ЛПН и ФТЛ) сделали доклады по результатам научной работы, проведенной под руководством своих преподавателей физики.

На втором этапе 24 ноября и 26 ноября 2010 года в аудиториях СГУ прошла секция студентов, аспирантов и молодых ученых. Были представлены 13 устных и 25 стендовых докладов, тематика которых охватывала как общие вопросы нелинейной динамики, так и приложения к задачам радиопизики, электроники, нелинейной оптики, биофизики. В работе Школы приняли участие 39 представителей различных факультетов СГУ (ФНП, физического факультета, ФНиБМТ) и СГТУ.

В настоящий сборник включены тексты докладов студентов, аспирантов и молодых ученых участников Школы.

*Рыскин Н.М., профессор факультета нелинейных процессов СГУ
Левин Ю.И., профессор факультета нелинейных процессов СГУ*

Фазовой синхронизацией порядка $n:m$ называется процесс подстройки фаз взаимодействующих колебательных систем, при которой выполняется условие:

$$\Delta\varphi_{n,m}^{1,2}(t) = |n\varphi_1(t) - m\varphi_2(t)| < C \quad (1)$$

где C – некоторая константа, n и m – целые числа. Согласно определению (1) при наличии фазовой синхронизации зависимость разности фаз $\Delta\varphi_{n,m}^{1,2}$ от времени колеблется вблизи некоторого постоянного значения. Степень синхронизованности анализируемых сигналов оценивалась с помощью расчета интегральной численной меры степени фазовой синхронизованности – «суммарного процента фазовой синхронизованности», представляющей собой сумму длин временных интервалов, на которых наблюдается фазовая синхронизация различных порядков $n:m$, отнесенную к длине реализации и выраженную в процентах. Нужно отметить, что при анализе экспериментальных данных, в силу присутствия в сигналах значительных шумов, нестационарностей и переходных процессов, использование определения (1) напрямую для автоматического поиска участков фазовой синхронизации, оказывается нецелесообразным. Необходимо применять специализированные методы.

Коэффициент фазовой синхронизации ρ в зависимости от пробного времени запаздывания отражает преимущественное направление взаимодействия между исследуемыми системами

$$\rho = \sqrt{\langle \sin(\varphi_1(t) - \varphi_2(t - \Delta)) \rangle^2 + \langle \cos(\varphi_1(t) - \varphi_2(t - \Delta)) \rangle^2}. \quad (2)$$

Здесь $\varphi_{1,2}$ – мгновенные фазы сигналов, Δ – задержка между сигналами.

Для оценки направления воздействия к рядам исходных данных был применён метод, основанный на моделировании фазовой динамики. Из исходных рядов были выделены фазы с помощью преобразования Гильберта. По фазам сигналов строилась модель фазовой динамики в виде

$$\begin{aligned} \Delta\varphi(t) &= F_1(\varphi_1(t), \varphi_2(t) + \varepsilon_1(t)), \\ \Delta\varphi_2(t) &= F_2(\varphi_2(t), \varphi_1(t) + \varepsilon_{21}(t)), \end{aligned}$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ – шумы с нулевым средним.

Из полученных моделей оценивалась сила воздействия колебательных систем друг на друга.

Для обнаружения локальных участков взаимодействия расчёт индекса предложено смотреть в скользящем окне по временному ряду, которые могут быть представлены на графиках (рис. 1), где отрицательные времена задержки соответствуют воздействию со стороны колебаний кровяного давления на R-R интервалы, а положительные, соответственно, наоборот.

**РАЗВИТИЕ МЕТОДОВ АНАЛИЗА
ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ НИЗКОЧАСТОТНЫХ РИТМОВ
СЕРДЕЧНО-СОСУДИСТОЙ СИСТЕМЫ ЧЕЛОВЕКА**

Хорев В.С., студент 6 курса ФНБМТ СГУ

Задача диагностики наличия, направленности и интенсивности взаимодействия между источниками хаотических сигналов по временным рядам экспериментально наблюдаемых величин междисциплинарная. Она важна для физики, биологии, геофизики, медицины, техники. Уже давно пришло осознание типичности хаотического поведения нелинейных колебательных систем, хаос стали обнаруживать всюду, даже сердце в здоровом организме бьется хаотически [1–3].

В работе были использованы данные, полученные в лаборатории кафедры динамического моделирования и биомедицинской инженерии СГУ (условно здоровые пациенты), а также из НИИ кардиологии Саратова за 2004 и 2005 годы (здоровые и пациенты с инфарктом миокарда). Ритм R-R интервалов был выделен в области 0.05–0.15 Гц, являющийся ритмом регуляции сосудистого тонуса и сердечного ритма, связанный с изменением регуляции активности симпатической нервной системы и барорефлекса. Наряду с ритмом RR значимыми колебательными процессами, определяющими ее динамику, являются основной сердечный ритм с частотой около 1 Гц, генерируемый автономным водителем ритма в сердце, дыхание, имеющее обычно частоту порядка 0.3 Гц.

Всем обследуемым выполнялась одновременная регистрация электрокардиограммы и сигнала кровяного давления со среднего пальца руки в горизонтальном положении тела. Все сигналы снимались с частотой 250 Гц при 16-ти разрядном разрешении, а затем обрабатывались на компьютере. Продолжительность каждой записи составляла 10 минут. Во время регистрации сигналов дыхание у всех обследуемых было произвольным. Для выделения низкочастотной компоненты variability сердечного ритма и низкочастотной компоненты сигнала кровяного давления, имеющих частоту около 0.1 Гц, использовалась фильтрация рядов R-R интервалов и кровяного давления, соответственно, полосовым фильтром с полосой пропускания 0.05–0.15 Гц.

Синхронизация и взаимодействие между исследуемыми колебательными процессами сердечно-сосудистой системы изучались нами с помощью следующих мер: суммарного процента фазовой синхронизации, коэффициента фазовой синхронизации, оценки силы связи по методу, основанному на моделировании фазовой динамики, когерентности.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

Секция школьников

Пансионат «Сокол», Саратов

6.10.2010

Лоскутов А.Ю., профессор, МГУ, Москва. Очарование хаоса
Шалфеев В.Д., профессор, член-корр. РАН, ННГУ, Нижний Новгород. Нелинейный мир
Кочаровский В.В., профессор, член-корр. РАН, ИПФ РАН, Нижний Новгород. Предельные возможности земных и космических ускорителей частиц

Круглый стол

«Нелинейная наука и факультет нелинейных процессов»
(ведущие Трубецков Д.И., член-корр. РАН и Левин Ю.И., профессор СГУ)

Доклады школьников

Занкин Виталий, ЛПН, 11 класс. Почему глаз, смотрящий вниз, видит предметы увеличенными?
Игнатъев Алексей, ЛПН, 9 класс. Компьютерное моделирование: клеточные автоматы, геометрические фракталы.
Чекмарева Алия, ФТЛ, 10 класс. Дискретная гармоническая функция.
Задорожский Андрей, ЛПН, 11 класс. Падение шарика, брошенного под углом к горизонту, при сильном ветре.
Куреев Алексей, ЛПН, 11 класс. Применение численных методов решения дифференциальных уравнений в задаче о теории эпидемий.

24.10.2010

Устные доклады

Обычев М.А., ФНП, 3 курс. Возможность реализации комплексной аналитической динамики в неавтономной нелинейной кольцевой системе

Латухина Е.Ю., ФНП, 4 курс. Мультистабильность и эволюция аттракторов в слабодиссипативном «отображении-паутине»

Дворак А.А., физ. ф-т., 5 курс. Влияние синхронизации хаоса на перемешивание в системе двух связанных осцилляторов Ресслера.

Чернышев Н.Ю., ФНП, 5 курс. Анализ фазовых уравнений связанных автоколебательных систем с периодическим внешним воздействием.

Назимов А.И., физ. ф-т., 5 курс. Применение искусственных нейронных сетей для решения задачи классификации потенциалов действия

Усачева С.А., ФНП, аспирант. Особенности синхронизации автоколебательной системы с запаздыванием вблизи границы зон генерации

Савин Д.В., ФНП, аспирант. Динамика консервативно связанных отображений Эно при изменении уровня диссипации.

26.10.2010

Устные доклады

Каретникова Т.А., ФНП, 4 курс. Методика расчета режимов линейного усиления и самовозбуждения в неоднородных широкополосных ЛБВ

Краснова Г.М., ФНП, 5 курс. О влиянии пространственного заряда на процессы взаимодействия электронного потока в однородном магнитном поле с электромагнитной волной.

Титов А.В., ФНП, аспирант. Некоторые особенности двухпучковой неустойчивости.

Зарькова Е.В., ФНП, 6 курс. Генерация хаотических радиопульсов в кольцевой автоколебательной системе с ферритовой пленкой под воздействием внешнего СВЧ-сигнала

Садовников С.А., ФНП, аспирант, Степанов А.О., ФНП, 6 курс. Синхронизация когерентного резонанса в клистронном автогенераторе внешним гармоническим сигналом.

Садовников А.В., ФНП, аспирант. Динамика распространения щелевых солитонов в нелинейной брэгговской решетке.

При дальнейшем увеличении α области захвата частоты на базе основной и автомодуляционной частот сливаются. Область устойчивости синхронных режимов разбивается на три части, что хорошо видно на рис. 3, а. Аналогичный эффект был обнаружен в [3] при изучении ситуации в центре зоны генерации. Теперь линия седлоузловой бифуркации соприкасается сразу с двумя линиями подавления частоты вследствие чего появляется новая пара точек Богданова–Тakensа. Отметим, что две линии бифуркации Андронова–Хопфа пересекаются при $\omega \approx 0$ и меняются местами. В результате область синхронизации имеет еще более сложную структуру. Как и на рис. 2, б, имеется два сосуществующих языка синхронизации, соответствующие двум собственным модам (на рис. 3, б они показаны серым цветом и штриховкой соответственно). Однако теперь каждый из них состоит из трех частично перекрывающихся частей.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 09-02-00707) и программы «Развитие научного потенциала высшей школы» (проект 2.1.1/1738).

Библиографический список

1. Рыскин Н.М., Усачева С.А. Синхронизация периодических колебаний автогенератора с запаздыванием внешним гармоническим сигналом // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2009. Т. 17, № 1. С. 3-12.
2. Рыскин Н.М., Шигаев А.М. Сложная динамика простой модели распределенной автоколебательной системы с запаздыванием // ЖТФ. 2002. Т. 72, № 7. С. 1-7.
3. Усачева С.А., Рыскин Н.М. Исследование режимов синхронизации автоколебательной систем с запаздыванием при приближении к порогу автомодуляции Труды 52-й науч. конф-ции МФТИ «Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук»: Ч. II. Общая и прикладная физика. М.: МФТИ, 2009. С. 279-282

Научный руководитель: Рыскин Н.М., д.ф.-м. н., профессор кафедры нелинейной физики СГУ

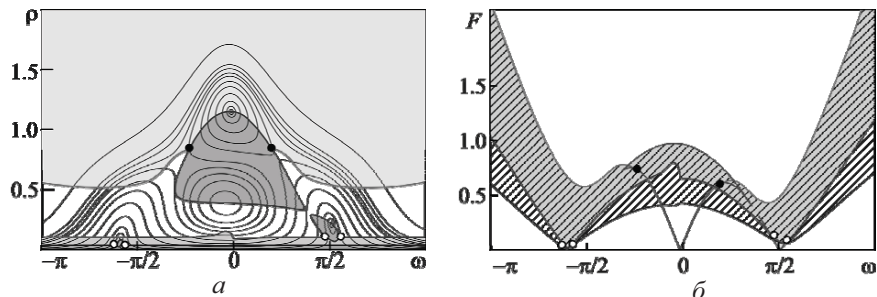


Рис. 2. Резонансные кривые (а) и язык синхронизации (б) при $\gamma = 0.3$, $\alpha = 2.05$, $\theta = 0.95\pi$

неустойчива. Отметим, что резонансные кривые имеют максимумы вблизи собственных частот (рис. 1, а) ввиду резонансов с различными собственными модами.

С увеличением α условия самовозбуждения выполняются уже для обеих мод ($n = 0, -2$) что соответствует бистабильности в генераторе без внешнего воздействия. Это приводит к бистабильности синхронных режимов (рис. 2). Появляется еще одна область захвата частоты вблизи ω_{-2} и две границы подавления частоты, близкие к горизонтальным прямым. Соответственно, язык синхронизации имеет две внешние границы. Таким образом, имеется фактически два частично перекрывающихся языка синхронизации, обозначенные на рис. 2, б серым цветом и штриховкой соответственно. У них имеется общая внутренняя граница, соответствующая границе возникновения автомодуляции, инициированной внешним сигналом. Присутствие бистабильности синхронных режимов проверено численным моделированием и полностью соответствует теоретическим выкладкам.

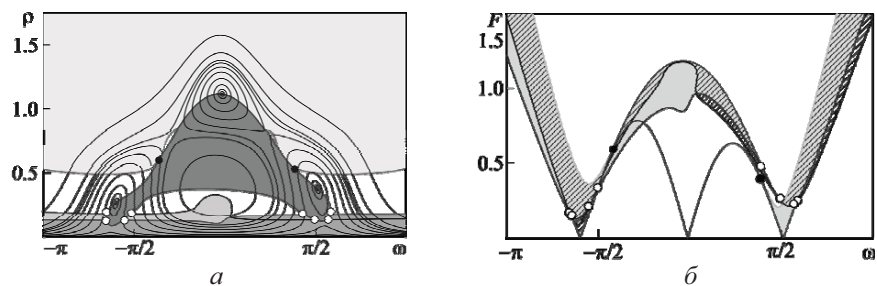


Рис. 3. Резонансные кривые (а) и язык синхронизации (б) при $\gamma = 0.3$, $\alpha = 2.6$, $\theta = 0.95\pi$

Стеновые доклады VIII корпус СГУ, ауд. 61

Адилова А.Б., ФНП, 2 курс. Дискретный вариант автоколебательной системы с жестким возбуждением.

Ланина М.С., Степанов В.В., ФНП, 2 курс. Спектр электромагнитных волн в ферромагнитной пленке.

Фунтов А.А., ФНП, 2 курс. Решение уравнений для модели «хищник-жертва» методом последовательных приближений.

Аленькина А.С., ФНП, 3 курс. Нелинейная динамика уравнения Гинзбурга–Ландау при абсолютной и конвективной неустойчивости

Дубинин А.С., ФНП, 3 курс. Модели Улама и Заславского при различных уровнях диссипации.

Обычев М.А., ФНП, 3 курс. Численное исследование динамических систем – приближенных моделей резонансного взаимодействия волн в слабо-нелинейной среде с дисперсией

Грубов В.В., ФНП, 4 курс. Изучение сонных веретен на эпилептической ЭЭГ с помощью непрерывного вейвлетного анализа

Зинкова И.В., ФНП, 4 курс. Использование граничных условий типа РМЛ для моделирования направляемых и вытекающих мод в открытых диэлектрических волноводах

Круглов В.П., ФНП, 4 курс. Автономная система с аттрактором Смейла–Вильямса на основе кольцевой структуры из осцилляторов ван дер Поля с резонансным механизмом передачи возбуждения

Перегородова Е.Н., ФНП, 4 курс, **Усачева С.А.**, ФНП, аспирант. Синхронизация двухмодового генератора внешним гармоническим сигналом.

Научный руководитель д.ф.-м.н., профессор Н.М. Рыскин.

Семенов В.В., физ. ф.-т., 4 курс, **Маляев В.С.**, физ. ф.-т., зав. уч. лаб. Влияние жесткой бифуркации на оценку управляющих параметров в нелинейной системе с шумом

Научный руководитель д.ф.-м.н., профессор Т.Е. Вадивасова.

Фролов Н.С., ФНП, 4 курс. Исследование синхронизации хаотических колебаний в цепочке связанных низковольтных виркаторов

Аржанухина Д.С., ФНП, 5 курс, **Поздняков М.В.**, ФНП, аспирант. Разрушение грубого хаоса в модельных системах, построенных на основе отображения Аносова

Родионов М.А., физ.ф.-т., 5 курс. Синхронизация нейронных ансамблей.

Мисюрин А.Г., СГТУ, аспирант. Нестационарные эффекты в нелинейно-оптической среде.

Жаманова М.К., ФНП, 6 курс. Исследование нелинейных эффектов при распространении импульсов в оптических волноводах и ферромагнитных структурах на основе системы уравнений Шредингера

Северюхина А.С., ФНБМТ, 6 курс. Оптимизация набора базисных функций при реконструкции модельного отображения

Степанов А.О., ФНП, 6 курс. Когерентный резонанс в клистронном автогенераторе при шумовом и хаотическом воздействиях

Хорев В.С., ФНБМТ, 6 курс. Развитие методов анализа взаимодействия низкочастотных ритмов сердечно-сосудистой системы человека

Гасина О.А., ФНП, аспирант. Воздействие комплекса проспидин – коллоидное золото на культуру опухолевых клеток.

Емельянова Ю.П., ФНП, аспирант. Особенности синхронизации в системе связанных осциллятора ван дер Поля и генератора Кислова–Дмитриева

Кузнецов А.С., ФНП, аспирант. Об одной схеме параметрического генератора гиперболического хаоса

Поздняков М.В., ФНП, аспирант. Устройство пространства параметров несимметрично связанных универсальных двумерных отображений.

Романенко Д.В., ФНП, аспирант. Хаотические колебания и автосолитоны в кольцевой автоколебательной системе с нелинейной линией задержки на магнитоэлектрических волнах

Шешукова С.Е., ФНП, аспирант. Численное моделирование солитонов огибающей в периодических ферромагнитных структурах на основе системы уравнений Шредингера

дения системы вблизи границы зоны генерации ($\theta \approx \pi$). В этой области картина резонансных кривых значительно усложняется, в частности, становится возможным одновременное возбуждение двух мод. Рассмотрим для определенности случай $\theta = 0.95\pi$, где частоты двух собственных мод, ближайших к центру полосы пропускания, равны $\omega_0 = 0.509\pi$ и $\omega_{-2} = -0.600\pi$. Между ними находится частота автомодуляционной моды $\omega_{-1} = -0.011\pi$.

На рис. 1, а представлены резонансные кривые с наложенными на них областями устойчивости и язык синхронизации для случая, когда возможно возбуждение моды с $n = 0$, а мода $n = -2$ находится чуть ниже порога самовозбуждения ($\alpha = 1.9$). Они находятся из уравнения [1]

$$\left[(\gamma - \alpha(1 - \rho)\cos(\theta - \omega))^2 + (\omega - \alpha(1 - \rho)\sin(\theta - \omega))^2 \right] \rho = F^2. \quad (7)$$

Здесь ρ – квадрат амплитуды колебаний в синхронном режиме.

Также на рис. 1, а различными оттенками серого отмечены области неустойчивости синхронного режима. Они найдены в результате численного характеристического уравнения, методика получения которого подробно рассмотрена в [1]. Режим синхронизации устойчив в области, показанной белым цветом. Показаны области захвата частоты, подавления частоты и область автомодуляции, инициированной внешним сигналом, которая ограничивает устойчивость синхронного режима по амплитуде.

На рис. 1, б показан язык синхронизации на плоскости параметров F – ω , серым цветом обозначена область устойчивости синхронного режима. Черными и белыми кружками обозначены точки Богдамова–Такенса. Видно, что язык синхронизации раздвоился и состоит из двух «клювов» на частотах ω_0 и ω_{-2} . Однако левый клюв синхронизации не достигает горизонтальной оси, поскольку условия самовозбуждения для этой моды не выполнены. Также существует еще один клюв на автомодуляционной частоте ω_{-1} , однако соответствующий режим синхронизации является неустойчивым, поскольку автомодуляционная мода в автономной системе

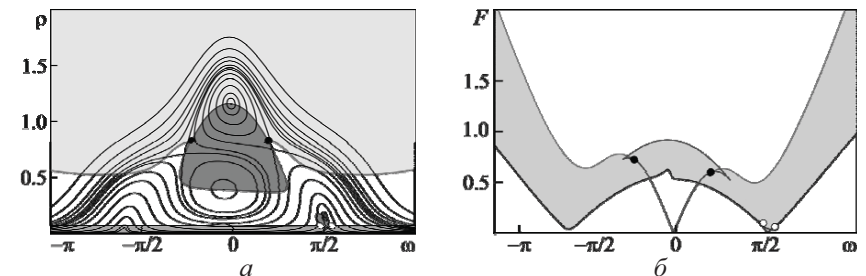


Рис. 1. Резонансные кривые (а) и язык синхронизации (б) и при $\gamma = 0.3$, $\alpha = 1.9$, $\theta = 0.95\pi$

СИНХРОНИЗАЦИЯ АВТОГЕНЕРАТОРА С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ ВБЛИЗИ ГРАНИЦЫ ЗОН ГЕНЕРАЦИИ

Усачева С.А., ФНП СГУ, аспирант

Изучение процессов синхронизации в распределенных автоколебательных системах с запаздыванием представляет большой интерес, поскольку процессы синхронизации в таких системах имеют ряд особенностей, обусловленных, во-первых, наличием бесконечного числа степеней свободы, во-вторых, способностью демонстрировать разнообразные режимы колебаний (одночастотные, многочастотные, хаотические). В работе [1] были рассмотрены режимы вынужденной синхронизации генератора с кубической нелинейностью и запаздыванием, на которую действует внешний гармонический сигнал,

$$\dot{A} + \gamma A - \alpha e^{i\theta} (1 - |A(t-1)|^2) A(t-1) = F e^{i\omega t} \quad (5)$$

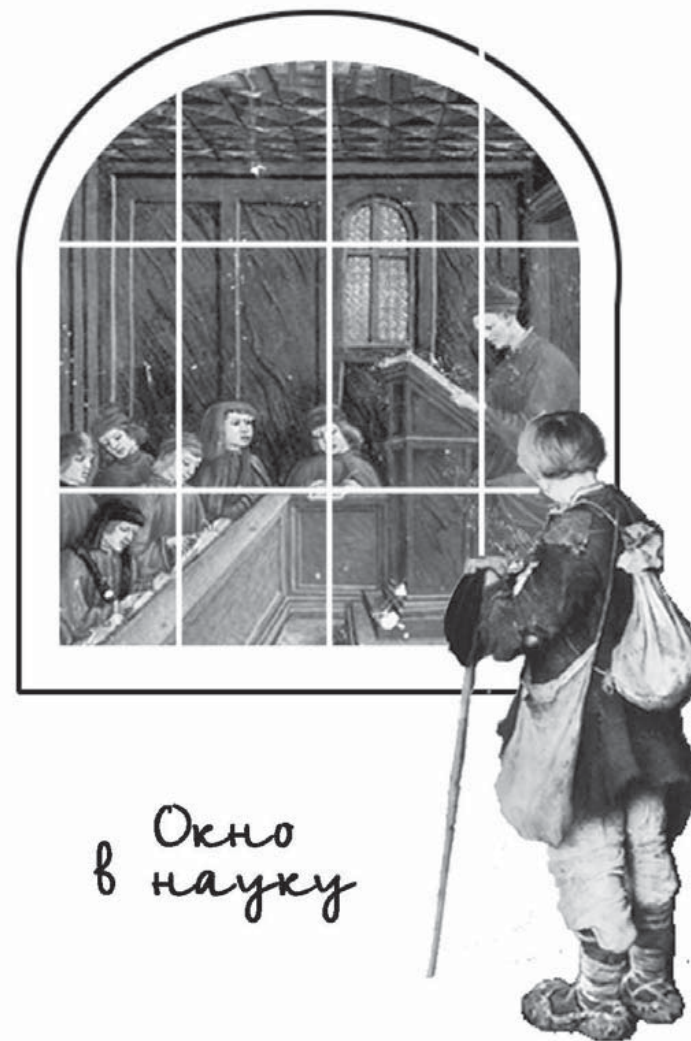
в случае, когда автономный генератор находится в режиме периодических колебаний. Здесь A – медленно меняющаяся амплитуда колебаний, α – параметр возбуждения генератора, γ – параметр диссипации, θ – набег фазы в цепи обратной связи, F и ω – амплитуда и частота внешней силы, соответственно.

Динамика этой системы в автономном случае хорошо изучена в работе [2]. В частности, показано, что порог самовозбуждения минимален при $\theta = 2\pi l$ и максимален при $\theta = 2\pi l + \pi$. Таким образом, на плоскости параметров θ, α области самовозбуждения имеют вид периодически расположенных зон генерации, каждая из которых соответствует возбуждению одной из бесконечного числа собственных мод системы (5). Собственные частоты определяются из уравнения [1,2]

$$\frac{\omega}{\gamma} = -\operatorname{tg} \omega. \quad (6)$$

Если занумеровать корни этого уравнения ω_n , $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ по мере удаления от нуля, то можно показать, что самовозбуждение возможно только для мод, которым соответствуют корни с четными номерами. Корни с нечетными номерами соответствуют автомодуляционным модам, которые сами по себе неустойчивы, однако могут возбуждаться на фоне колебаний на основных модах с достаточно большой амплитудой, приводя к возникновению автомодуляции.

В работах [1,3], в которых были проанализированы режимы синхронизации автогенератора с запаздыванием, основное внимание уделялось центру зоны генерации ($\theta = 0$), то есть случаю, оптимальному для самовозбуждения. В данной работе, напротив, рассматриваются особенности пове-





В.Д.Шалфеев Д.И.Трубецков
А.Ю.Лоскутов Вл.В.Кочаровский



Библиографический список

1. *Briers J.D., Webster S.* Laser speckle contrast analysis (LASCA): a non-scanning, full-field technique for monitoring capillary blood flow // *J. Biomed. Opt.* 1996. Vol. 1. P. 174.
2. *Frerichs K.U., Feuerstein G.Z.* Laser Doppler flowmetry: a review of its application for measuring cerebral and spinal cord blood flow // *Mol. Chem. Neuropathol.* 1990. Vol. 12. P. 55.
3. *Sosnovtseva O.V., Pavlov A.N., Mosekilde E., Holstein-Rathlou N.-H.* Bimodal oscillations in nephron autoregulation // *Phys. Rev. E.* 2002. Vol. 66. P. 061909.
4. *Sosnovtseva O.V., Pavlov A.N., Mosekilde E., Yip K.-P., Holstein-Rathlou N.-H., Marsh D.J.* Synchronization among mechanisms of renal autoregulation is reduced in hypertensive rats // *Am. J. Physiol. Renal Physiol.* 2007. Vol. 293. P. F1545.
5. *Marsh D.J., Sosnovtseva O.V., Mosekilde E., Holstein-Rathlou N.-H.* Vascular coupling induces synchronization, quasiperiodicity, and chaos in a nephron tree // *Chaos.* 2007. Vol. 17. P. 015114.
6. *Holstein-Rathlou N.-H., Yip K.-P., Sosnovtseva O.V., Mosekilde E.* Synchronization phenomena in nephron-nephron interaction // *Chaos.* 2001. Vol. 11. P. 417.
7. *Pavlov A.N., Sosnovtseva O.V., Pavlova O.N., Mosekilde E., Holstein-Rathlou N.-H.* Characterizing multimode interaction in renal autoregulation// *Physiological Measurement.* 2008. Vol. 29. P. 945.

Научный руководитель: Павлов А.Н., д.ф.-м.н., профессор кафедры радиофизики и нелинейной динамики СГУ

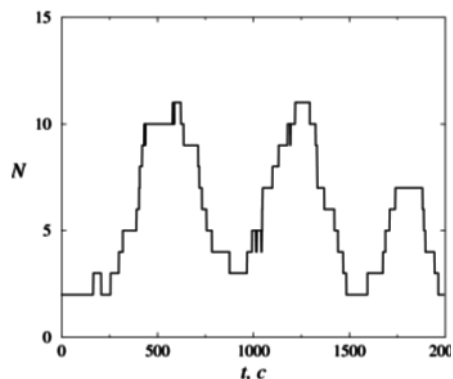


Рис. 2. Зависимость размера синхронного кластера от времени.

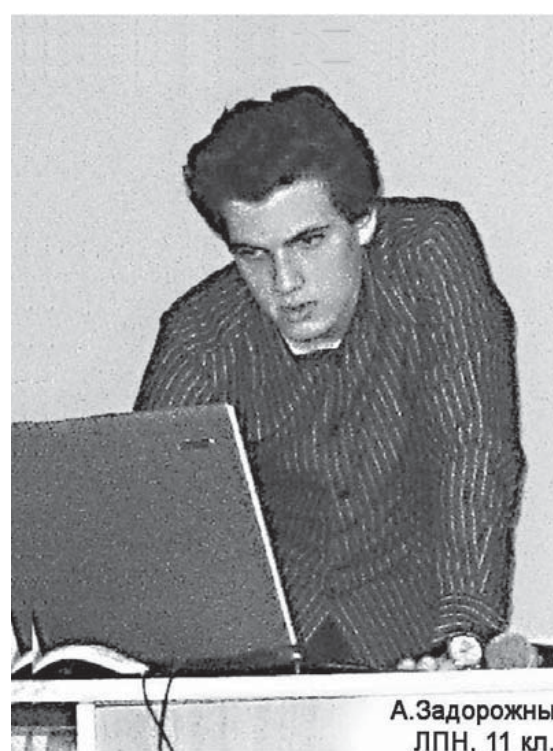
предпринятыми в данной работе, которые позволили зафиксировать изменение размера синхронных кластеров корковых нейронов с той же частотой, что и частота очень медленных ритмов авторегуляции, обнаруженных в макроскопической динамике артериального давления (рис. 2).

Наличие взаимосвязи между формированием кластеров синхронизации нейронов и динамикой всей почки в целом является

пока еще неизученной проблемой. Это связано с тем, что сам факт формирования синхронных кластеров нейронов является новым эффектом, который только начинает изучаться в последние годы. Несмотря на то, что механизмы генерации очень медленных ритмов авторегуляции пока еще дискутируются, сам факт наличия координированного нейронного отклика является важным для понимания причин хаотизации динамики нейронов при гипертонии – существуют основания предполагать, что генез почечной гипертонии связан с нарушением механизмов взаимодействия больших групп нейронов.

Проведенные исследования позволяют сделать вывод о том, что формирование кластеров синхронизации большой группы корковых нейронов и осциллирующий характер размера данных кластеров наблюдаются в подавляющем числе экспериментов (более 80%). Однако при этом нельзя получить ответ на вопрос, участвуют ли в синхронизации колебаний глубокие нейроны, для которых характерны более длинные петли обратной связи? Изменение размера петли сопровождается уменьшением частоты медленных колебаний, обусловленных механизмом КГОС. Есть основания предполагать, что глубокие нейроны демонстрируют режимы синхронной динамики с несколько отличающимися периодами, так как в сигналах, отражающих макроскопическую динамику, осциллирующие составляющие выражены слабо.

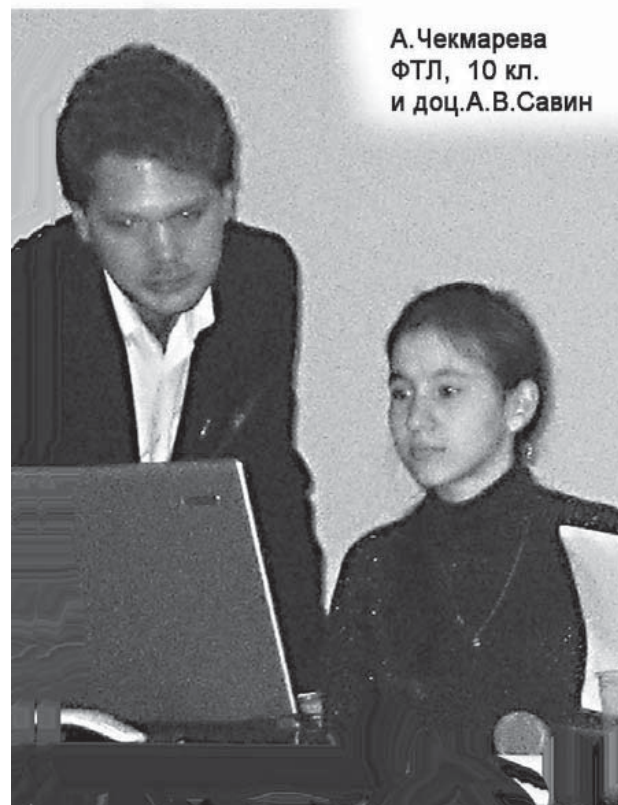
Автор выражает признательность О.В. Сосновцевой и N.-H. Holstein-Rathlou за предоставленные экспериментальные данные и многочисленные дискуссии. Проводимые исследования были поддержаны Министерством образования и науки РФ в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 годы.



А. Задорожный
ЛПН, 11 кл.



А. Куреев
ЛПН, 11 кл.



А. Чекмарева
ФТЛ, 10 кл.
и доц. А. В. Савин



А. Игнатъев
ЛПН, 9 кл.



ансамблей структурных элементов почки. В проводимых экспериментах выделялись сигналы от нескольких десятков до сотни нефронов.

Ранее проводившиеся исследования [3, 4] продемонстрировали, что эффекты синхронизации по разному проявляются в динамике нефронов нормотензивных и гипертензивных крыс. На рис. 1 проиллюстрировано, что почечная гипертония сопровождается уменьшением длительности синхронных участков для медленных ритмов колебаний (которые обусловлены наличием задержки в цепи так называемой канальцево-гломерулярной обратной связи (КГОС), регулирующей скорость гломерулярной фильтрации в зависимости от концентрации хлористого натрия на выходе петли Генле), а также для быстрых ритмических процессов, связанных с динамикой гладкой мускулатуры.

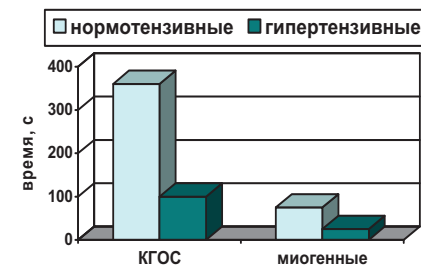


Рис. 1. Средняя длительность участков синхронизации медленных (механизм КГОС) и быстрых (миогенных) колебаний. Показаны различия в норме и при почечной гипертонии

В соответствии с выводами работы [5], синхронизация колебания наблюдается и для нефронов, удаленных друг от друга на значительные расстояния (до половины верхней поверхности почки). Это означает, что эффект синхронизации не носит локальный характер, то есть не ограничивается исключительно соседними нефронами, относящимися к одной междольковой артерии, как это предполагалось ранее [6]. Тем не менее, вопрос о взаимосвязи синхронизации нефронных ансамблей и макроскопической динамики почки остается открытым.

Отметим, что на макроскопическом уровне динамики артериального давления проявляются ритмические процессы, период которых варьируется в широких пределах – от 200 до 700 секунд. Соответствующие ритмические процессы, ранее обнаруженные на микроуровне отдельных нефронов [7], классифицируются как очень медленные ритмы авторегуляции. В макроскопической динамике данные процессы в ряде случаев удается зафиксировать визуально, в других экспериментальных данных они регистрируются путем проведения локализованного спектрального анализа на основе непрерывного вейвлет-преобразования. Одна из гипотез о причинах возникновения соответствующих ритмических процессов состоит в том, что очень медленные ритмы авторегуляции могут быть связаны с функционированием кластеров синхронной динамики больших групп нефронов. Эта гипотеза подтверждается экспериментальными исследованиями,

СИНХРОНИЗАЦИЯ НЕФРОННЫХ АНСАМБЛЕЙ

Родионов М.А., студент 5 курса физического факультета СГУ

В данной работе изучается коллективное поведение больших ансамблей нефронов, расположенных на поверхности почки, с использованием экспериментальных данных, полученных в институте Панум (университет Копенгагена, Дания). Анализируемые временные ряды включают записи нескольких серий экспериментов на крысах, в рамках которых осуществлялась регистрация динамики структурных элементов на поверхности почки. Выбор оптимальной процедуры экспериментального исследования корковых нефронов является важным этапом для последующего извлечения информации о функционировании ансамблей структурных элементов почки. Одним из вариантов может служить использование инфракрасной камеры, которая обеспечивает возможность отслеживать величину скорости потока крови в индивидуальных артериолах. Однако такой метод имеет весьма существенный недостаток: из-за малого размера артериол трудно добиться высокого качества определения скорости протекания крови по изменению температуры. Фактически, в рамках такого метода можно только определить скорость кровотока в крупных сосудах, но никак не на уровне микроциркуляции.

Более качественные результаты обеспечивает другой экспериментальный подход – применение лазерных спеклов [1, 2]. В рамках данного метода можно получать информацию о динамике нефронов, расположенных на значительной части верхней поверхности почки. Этот метод не требует проводить сканирование, что приводит к существенно лучшему быстродействию по сравнению с классическим доплеровским методом анализа. Но для того, чтобы по картине спеклов определить месторасположение отдельных артериол, дополнительно необходимо сделать фотографию верхней поверхности почки и наложить эту фотографию на изображение спеклов. Для корректного совмещения фотографии, показывающей расположение отдельных нефронов, и результатов лазерной спекл-интерферометрии использовался следующий прием. Вначале на поверхность почки помещались два волоска (перпендикулярно друг другу); точка их пересечения служила ориентиром для корректного наложения фотографии на картину динамических спеклов. После этого можно было решать задачу определения номеров пикселей, соответствующих артериолам индивидуальных нефронов для извлечения из видео-файла (демонстрирующего динамику спеклов во времени временных зависимостей, отражающих скорость микроциркуляции крови в анализируемых сосудах). В результате такой процедуры идентифицировалась динамика большой группы корковых нефронов, что позволяет проводить анализ эффектов синхронизации





Радиофизика, физика колебаний и волн

Область двухчастотного режима ограничена снизу линиями a и c (соотношения (4) и (3), соответственно), а сверху – линией подавления второй моды s_2 . Таким образом, область синхронизации отрывается от горизонтальной оси, т.е. появляется порог синхронизации. Двухчастотный режим I типа в данном случае отсутствует.

Результаты численного моделирования полностью согласуются с теоретическими и дополняют теорию синхронизации колебаний в многомодовых системах.

Работа поддержана грантом РФФИ № 11-02-01411.

Библиографический список

1. *Anishchenko V., Nikolaev S., Kurths J.* Peculiarities of synchronization of a resonant limit cycle on a two-dimensional torus // *Phys. Rev. E.* 2007. Vol. 76. 046216.
2. *Анищенко В.С., Астахов С.В., Вадивасова Т.Е., Феоктистов А.В.* Численное и экспериментальное исследование внешней синхронизации двухчастотных колебаний // *Нелинейная динамика.* 2009. Т. 5, № 2. С. 237-252.
3. *Кузнецов А.П., Сатаев И.Р., Тюрюкина Л.В.* Синхронизация квазипериодических колебаний связанных фазовых осцилляторов // *Письма в ЖТФ.* 2010. Т. 36, №10. С. 73.
4. *Кузнецов А.П., Сатаев И.Р., Тюрюкина Л.В.* Фазовая динамика возбуждаемых квазипериодических автоколебательных осцилляторов // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 2010. Т. 18, № 4. С. 33.
5. *Рабинович М.И. Трубецков Д.И.* Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984.
6. *Pikovsky A., Rosenblum M., Kurths J.* Synchronization: a universal concept in nonlinear sciences. Cambridge: Cambridge University Press. 2001.
7. *Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Рыскин Н.М.* Нелинейные колебания. М.: Физматлит, 2005.

Научный руководитель: Рыскин Н.М., д.ф.-м.н., профессор СГУ.

**МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ
УРАВНЕНИЯ ГИНЗБУРГА–ЛАНДАУ ПРИ АБСОЛЮТНОЙ
И КОНВЕКТИВНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ**

Аленькина А.С., студентка 3 курса ФНП СГУ

Волновые процессы в активных средах, в которых возникают и развиваются различные неустойчивости, играют важную роль в различных областях физики и техники. Основной моделью для описания распространения волн в нелинейной активной среде с отрицательной диссипацией служит уравнение Гинзбурга–Ландау (ГЛ) [1,2], которое запишем в виде

$$\frac{\partial A}{\partial t} = A - V \frac{\partial A}{\partial x} + \beta \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - \gamma |A|^2 A, \quad (1)$$

где A – комплексная амплитуда волны, V – групповая скорость, $\beta = 1 + ib$ – параметр, отвечающий за вязкую диссипацию и дисперсию, $\gamma = 1 - ic$ – параметр, отвечающий за амплитудную и фазовую нелинейность.

Уравнение ГЛ является эталонной моделью широкого класса распределённых автоколебательных систем. Особый интерес представляет тот факт, что решения этого уравнения могут иметь характер не только регулярных, но и хаотических автоколебаний, аналогичных детерминированным хаотическим колебаниям в конечномерных динамических системах. Исследование сложной динамики уравнения ГЛ имеет большое значение, поскольку позволяет установить определённую связь между турбулентностью в распределённых средах и динамическим хаосом в средах с малым числом степеней свободы.

Как известно, различают два типа волновых неустойчивостей в распределённой среде: абсолютную и конвективную [1,3]. В случае уравнения ГЛ помимо первичной (линейной) неустойчивости может иметь место модуляционная неустойчивость (МН), т.е. неустойчивость монохроматической волны постоянной амплитуды относительно медленных пространственно-временных модуляций [1,2]. МН играет важную роль в возникновении пространственно-временного хаоса [2]. Существенно, что, как первичная, так и вторичная (модуляционная) неустойчивость может быть как абсолютной, так и конвективной. Однако в большинстве работ исследуется нелинейная динамика уравнения ГЛ в системе с периодическими граничными условиями, когда разница между абсолютной и конвективной неустойчивостью отсутствует.

Целью данной работы является выяснение того, как характер неустойчивостей влияет на характерные сценарии поведения уравнения ГЛ и на условия возникновения хаотических колебаний.

При большей отстройке частоты внешнего воздействия ω картина становится более сложной. При малой амплитуде внешнего воздействия наблюдается двухчастотный режим I типа, колебания второй моды при этом затухают. С ростом f происходит асинхронное возбуждение второй моды, т.е. осуществляется переход к трехчастотному режиму. Это происходит потому, что уменьшается амплитуда колебаний первой моды, так что она больше не подавляет вторую в процессе конкуренции.

Затем внешнее воздействие полностью подавляет собственные колебания первой моды. Режим вновь становится двухчастотным. В спектре таких колебаний присутствуют частоты воздействия и второй моды. Данный режим будем называть двухчастотным режимом II типа. Последующее увеличение f приводит к подавлению колебаний второй моды и переходу в одночастотный синхронный режим.

Таким образом, показанный на рис. 1 язык синхронизации, т.е. область одночастотного режима, образован линией захвата частоты первой моды l и линией асинхронного подавления второй моды s_2 . С боков к языку синхронизации подходят области трехчастотного режима. Верхняя граница этих областей (линия a) определяется условием (4), которое как уже было отмечено выше, является условием бифуркации Андронова–Хопфа. Нижняя граница – линия асинхронного возбуждения s_3 – может быть получена только численно, так как возникновение трехчастотного режима не связано с бифуркацией неподвижной точки.

Также была изучена ситуация, когда воздействуют на генератор, находящийся в двухмодовом режиме, что имеет место при $\beta_{1,2} < 1$.

На рис. 2 показано разбиение плоскости параметров f, ω на области различных режимов при следующих выбранных значениях параметров: $\beta_1 = 0.5, \beta_2 = 0.5, \lambda = 1$. Сначала, при малой амплитуде на любой отстройке от частоты воздействия наблюдается трехчастотный режим. Затем, в зависимости от ω , происходит либо захват, либо подавление собственных колебаний первой моды и колебания становятся двухчастотными. Дальнейшее увеличение f приводит к подавлению колебаний второй моды.

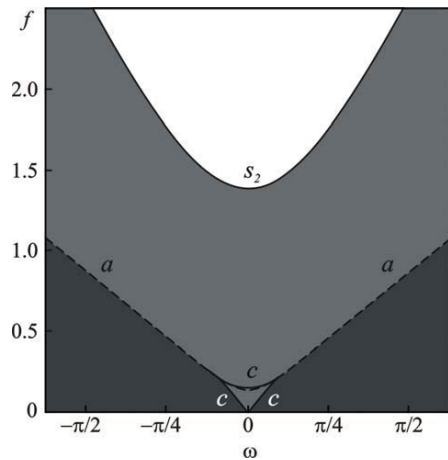


Рис. 2. Разбиение плоскости параметров f, ω на области различных режимов при $\lambda = 1, \beta_1 = 0.5, \beta_2 = 0.5$

Для уравнения (1) в принятых обозначениях критерий абсолютной неустойчивости имеет вид $V^2 < 4(b^2 + 1)$; соответственно, если это условие не выполняется, неустойчивость является конвективной. Критерий модуляционной неустойчивости имеет вид $bc > 1$.

Численное моделирование будем проводить для системы, описываемой дискретным уравнением ГЛ

$$\dot{A}_j = A_j + \frac{V}{2} \left(\frac{A_{j-1} - A_{j+1}}{\Delta x} \right) + (1 + ib) \left(\frac{A_{j+1} - 2A_j + A_{j-1}}{\Delta x^2} \right) - (1 - ic) |A_j|^2 A_j \quad (2)$$

Уравнение (2) решалось при помощи метода Рунге–Кутты 4-го порядка. Будем рассматривать модель полубесконечной среды, для чего при $j > N$ введем в уравнение (2) затухание с коэффициентом, плавно увеличивающимся вдоль цепочки. При этом исключаются отражения от правой границы.

На рис. 1 приведена зависимость порогового значения групповой скорости, при котором происходит смена характера неустойчивости, от параметра дисперсии. Сплошной линией показана кривая, полученная по теоретической формуле, квадратами – результаты численного моделирования. Выше этой линии неустойчивость конвективная, ниже – абсолютная. Видно, что численные результаты хорошо согласуются с теоретическими.

В зависимости от значений параметров в уравнении ГЛ, можно выделить четыре характерные ситуации. Их иллюстрируют представленные на рис. 2–4 пространственно-временные диаграммы, на которых различными оттенками серого показаны различные значения амплитуды волны. Белому

цвету соответствует максимальная амплитуда, черному – минимальная.

Рассмотрим вначале случай, когда первичная неустойчивость является абсолютной. При этом в системе наблюдается возбуждение автоколебаний. Если МН является конвективной (рис. 2, а), то на начальном этапе установления колебаний возникают неустойчивые возмущения, однако они сносятся вдоль системы и покидают ее через правую границу. В итоге устанавливается режим периодических автоколебаний, когда амплитуда нарастает вдоль цепочки и стремится к постоянному значению.

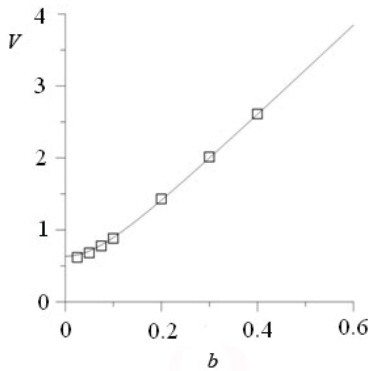


Рис. 1. Зависимость порогового значения групповой скорости от параметра дисперсии

где коэффициенты a , b и c , зависящие от параметров системы, имеют громоздкий вид и здесь не приводятся. Поскольку на границе устойчивости характеристический показатель p является чисто мнимым, $p = i\Omega$, из (2) следуют два условия неустойчивости:

$$c = 0, \quad (3)$$

что соответствует условию седлоузловой бифуркации или захвата частоты первой моды внешним сигналом в присутствии второй, а также

$$ab = c, \quad (4)$$

которое представляет собой условие бифуркации Андронова–Хопфа, т.е. условие подавления собственных колебаний первой моды в присутствии второй. Очевидно, что одновременно должны также выполняться условия $a > 0$, $b > 0$.

С помощью полученных соотношений было проведено разбиение плоскости параметров f, ω на области различных режимов. Также было проведено численное моделирование системы (1), результаты которого полностью согласуются с теоретическими. Вначале рассмотрим ситуацию, когда воздействие осуществляется на генератор в режиме одномодовой генерации ($\beta_1 < 1$, $\beta_2 > 1$). Этот случай иллюстрирует рис. 1.

При небольшой отстройке частоты внешнего воздействия от собственной частоты первой моды наблюдается классический сценарий захвата частоты, который неоднократно описывался в литературе [5-7]. При малой амплитуде воздействия реализуется двухчастотный режим I типа, когда наблюдаются двухчастотные квазипериодические колебания, в спектре которых присутствуют частота воздействия и собственная частота первой моды. С увеличением амплитуды внешнего воздействия возрастает амплитуда биений, увеличивается их период, и зависимость амплитуды сигнала от времени приобретает вид релаксационных колебаний. С дальнейшим увеличением f , происходит захват частоты, после чего возникает режим одночастотных колебаний с постоянной амплитудой.

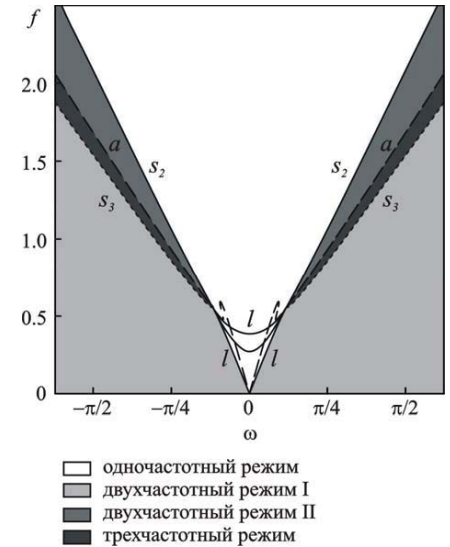


Рис. 1. Разбиение плоскости параметров f, ω на области различных режимов при $\lambda = 1$, $\beta_1 = 0.5$, $\beta_2 = 1.5$

СИНХРОНИЗАЦИЯ СИСТЕМЫ ДВУХ КОНКУРИРУЮЩИХ МОД ВНЕШНИМ ГАРМОНИЧЕСКИМ СИГНАЛОМ

*Перегородова Е.Н., студентка 4 курса ФНП СГУ
Усачева С.А., аспирантка ФНП СГУ*

В последнее время большое внимание уделяется проблеме синхронизации многочастотных квазипериодических колебаний [1–4]. Однако главным образом рассматривался случай, когда собственные частоты колебательной системы близки друг к другу либо приближенно соотносятся как 1:3. При этом взаимодействие мод носит резонансный характер, т.е. в автономной системе происходит образование резонансного предельного цикла на торе, а синхронизация происходит посредством захвата собственных частот внешним сигналом. В данной работе рассматривается модель неавтономного генератора с двумя степенями свободы в случае, когда между частотами нет никаких резонансных соотношений, т.е. одна частота значительно отличается от другой. В этом случае внешнее воздействие достаточно ввести только в одно уравнение. Данная модель будет описываться уравнениями для медленно меняющихся комплексных амплитуд собственных мод.

$$\begin{aligned} \dot{A}_1 &= \lambda \left(1 - |A_1|^2 - \beta_1 |A_2|^2 \right) A_1 + f e^{i\omega t}, \\ \dot{A}_2 &= \left(1 - |A_2|^2 - \beta_2 |A_1|^2 \right) A_2, \end{aligned} \quad (1)$$

где f – амплитуда внешнего воздействия, а ω – отстройка частоты внешнего воздействия от собственной частоты первой моды.

В зависимости от коэффициентов нелинейной связи мод $\beta_{1,2}$, в автономной системе возможны три характерные ситуации: одномодовые, двухмодовые колебания и мультистабильность [5].

Был проведен теоретический анализ устойчивости синхронных режимов, т.е. решений вида $A_1 = A_0 \exp(i\omega t)$, $A_2 = 0$. Было обнаружено, что наряду с механизмами неустойчивости, известными для одномодовой системы (см., например, [5,6]) имеется еще один, связанный с возбуждением колебаний второй моды, который назовем асинхронным возбуждением. Он возникает при $\beta_2 |A_0|^2 < 1$.

Также были исследованы условия устойчивости двухмодового режима, которому соответствует решение вида: $A_1 = A_{10} \exp(i\omega t)$, $A_2 = A_{20}$. После ряда преобразований можно получить кубическое характеристическое уравнение

$$p^3 + ap^2 + bp + c = 0, \quad (2)$$

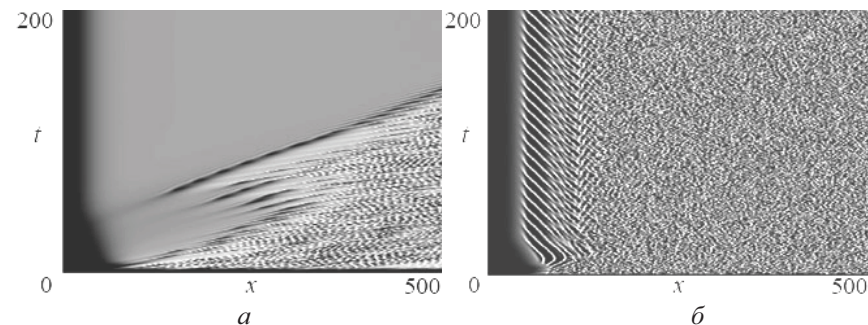


Рис. 2. Пространственно-временные диаграммы для случая абсолютной неустойчивости основной волны при $V = 13.0$, $b = 5.0$, $\Delta x = 1.0$: $a - c = 1.5$, конвективная МН; $b - c = 8.0$, абсолютная МН

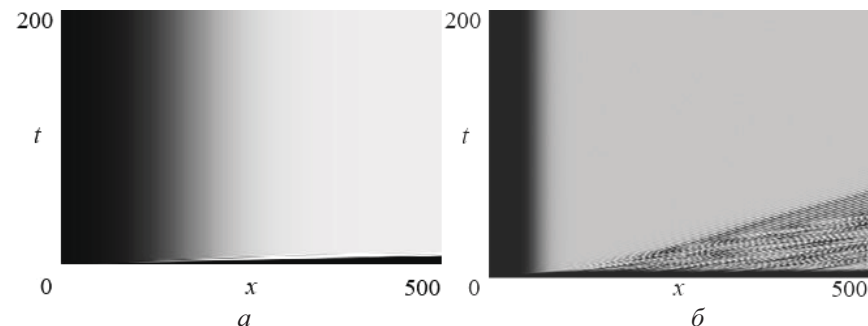


Рис. 3. Пространственно-временная диаграмма для случая конвективной неустойчивости основной волны при $V = 5.0$, $b = 1.0$, $\Delta x = 1.0$, $A_0 = 0.01$, $\omega = \pi$: $a - c = 0$, МН отсутствует; $b - c = 2.0$, конвективная МН

Если увеличить параметр фазовой нелинейности c , МН становится абсолютной. Амплитуда колебаний вдоль цепочки начинает зависеть от времени, т.е. устанавливается режим многочастотных колебаний. Более того, с увеличением параметра нелинейности происходит переход к хаосу (рис. 2, б).

Отметим, что наблюдается пространственное усложнение характера колебаний вдоль цепочки. На рис. 2, б, хорошо видно, как происходит постепенный переход от регулярных колебаний к хаотическим. Такое поведение характерно, в частности, для гидродинамической турбулентности. Аналогичные явления отмечались в работе [4], однако связь со сменой характера МН с конвективного на абсолютный прослежена не была.

Если же первичная неустойчивость является конвективной (рис. 3), для наблюдения нетривиальных динамических режимов необходимо наличие входного сигнала. Рассматривался простейший случай, когда входной

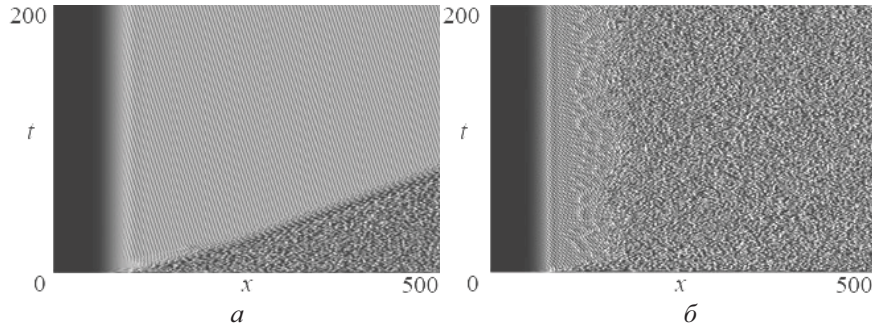


Рис. 4. Пространственно-временная диаграмма для случая конвективной неустойчивости основной волны при $V = 15.0$, $b = 5.0$, $\Delta x = 1.0$, $A_0 = 0.01$, $\omega = \pi$: $a - c = 5.0$, абсолютная МН; $b - c = 11.0$, абсолютная МН.

сигнал является гармоническим: $A(x=0) = A_0 \exp(i\omega t)$. При этом если МН отсутствует (рис. 3, *a*) или является конвективной (рис. 3, *б*), реализуется режим устойчивого усиления, т.е. никаких дополнительных компонент в спектре сигнала не наблюдается. С ростом параметра фазовой нелинейности МН становится абсолютной и возникает модуляция огибающей волны, вначале регулярная (рис. 4, *a*), а затем – хаотическая (рис. 4, *б*). Подчеркнем, что эти явления носят чисто динамический характер и не связаны с усилением шумов при конвективной неустойчивости, что рассматривалось в [5].

Библиографический список

1. Рыскин Н.М., Трубецков Д.И. Нелинейные волны. М.: Наука. Физматлит, 2000.
2. Aranson I.S., Kramer L. The world of the complex Ginzburg–Landau equation // Rev. Mod. Phys. 2002. Vol. 74. No. 1. P. 99-143.
3. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984.
4. Арanson И.С., Гапонов–Грехов А.В., Рабинович М.И. Развитие хаоса в ансамблях динамических структур // ЖЭТФ. 1985. Т. 89. С. 92-105.
5. Deissler R.J. External noise and origin and dynamics of structure in convectively unstable systems // J. Stat. Phys. 1989. Vol. 54. P. 1459-1488.

Научный руководитель: Рыскин Н.М., профессор, д.ф.-м.н.

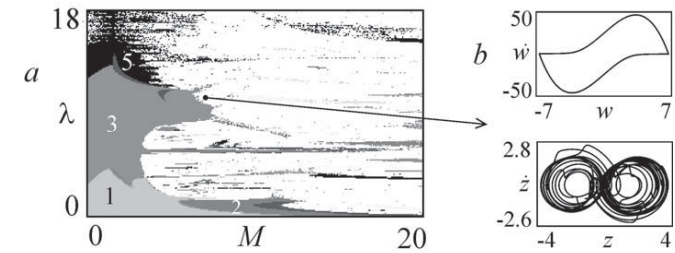


Рис. 4. Карта динамических режимов связанных осциллятора ван дер Поля и генератора Кислова-Дмитриева (1) на плоскости управляющих параметров подсистем (*a*); характерные фазовые портреты (*b*) в области инициированного хаоса. Значения параметров $\Delta = 0$, $\mu = 0.1$, $T = 5$, $Q = 10$

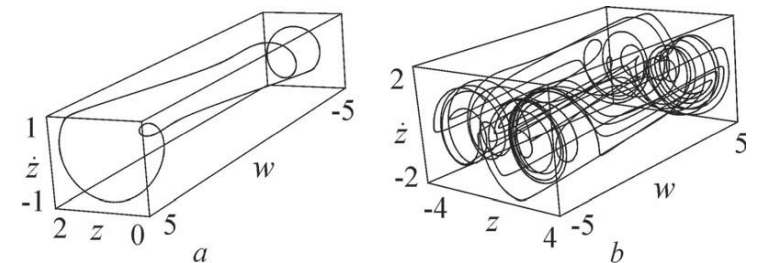


Рис. 5. Трехмерные фазовые портреты системы (1) в пространстве (z, \dot{z}, w) , иллюстрирующие возникновение инициированного хаоса. Значения параметров $\Delta = 0$, $\mu = 0.1$, $T = 5$, $Q = 10$, $\lambda = 10.9$, $M = 3.8$ (*a*); $M = 13.5$ (*b*)

возникает за счет действия ведущего осциллятора в форме «переключений» между режимами, возникающими при переходе от одной медленной стадии релаксационного осциллятора ван дер Поля к другой. Небольшое увеличение коэффициента усиления генератора Кислова–Дмитриева приводит к хаосу, также включающему стадии «переключений». Таким образом, взаимодействие разнотипных систем может не только стабилизировать хаос, но и наоборот, инициировать его за счет возникновения сложной динамики в ведомом осцилляторе, если управляющие параметры систем существенно отличаются. Трехмерные фазовые портреты системы (1) в пространстве (z, \dot{z}, w) , иллюстрирующие возникновение такого инициированного хаоса, приведены на рис. 5.

Работа поддержана грантом РФФИ, проект 09-02-00707, и программой «Развитие научного потенциала высшей школы» № 2.1.1/1738.

Научный руководитель: Кузнецов А.П., д.ф.-м.н., профессор СГУ.

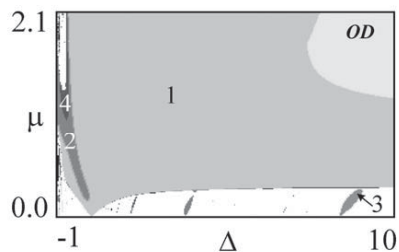


Рис. 2. Карта динамических режимов связанных осциллятора ван дер Поля и генератора Кислова-Дмитриева (1) на плоскости частотная расстройка – величина связи. Значения параметров $\lambda = 1$, $M = 5$, $T = 5$, $Q = 10$. OD – область гибели колебаний

режима автономной системы Кислова–Дмитриева при «выключении» связи. Хаотическая динамика автономной системы приводит также к тому, что все языки синхронизации (окна периодических режимов) у своих оснований в области малой связи разрушены.

Таким образом, можно сделать вывод о том, что взаимодействие автоколебательных осцилляторов стабилизирует хаотическую динамику генератора Кислова-Дмитриева. Этот эффект проявляется явным образом не только как возможность периодических режимов, но и как модификация хаотических, когда взаимодействие уменьшает хаотическую компоненту аттрактора по сравнению с автономной системой (сравните фазовые портреты на рис. 3, *b, c* с рис. 1, *e*).

Для рассматриваемой системы интересные особенности поведения можно обнаружить, обратившись к плоскости управляющих параметров осцилляторов (M, λ), приведенной на рис. 4, *a*. С ростом коэффициента усиления генератора Кислова–Дмитриева возникает специфический хаотический режим, когда вид хаотического аттрактора отличается от автономного (сравните фазовые портреты на рис. 4, *b* и рис. 1, *e*). При этом порог возникновения хаотического режима существенно меньше, чем порог хаоса в автономной системе. В этом случае сложная структура аттрактора

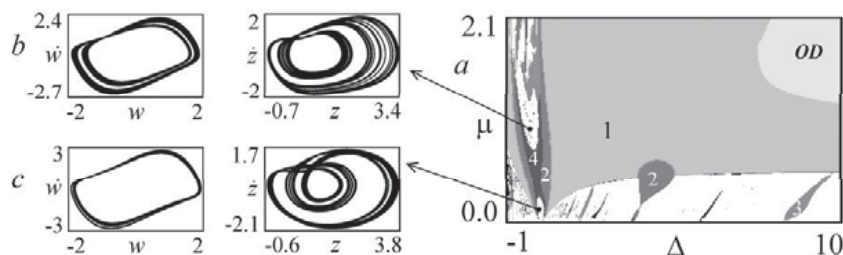


Рис. 3. Карта динамических режимов связанных осциллятора ван дер Поля и генератора Кислова-Дмитриева (1) на плоскости частотная расстройка – величина связи (*a*); характерные фазовые портреты (*b-c*) в области хаотических режимов. Значения параметров $\lambda = 1$, $M = 11$, $T = 5$, $Q = 10$. OD – область гибели колебаний

О ВЛИЯНИИ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ЗАРЯДА НА ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЭЛЕКТРОННОГО ПУЧКА С ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНОЙ В ПОСТОЯННОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Краснова Г.М., студентка 5 курса ФНП СГУ

Целью работы является исследование влияния пространственного заряда на процесс взаимодействия электронного пучка с бегущей электромагнитной волной. При решении задачи используется метод дисперсионного уравнения.

Бесконечно тонкий электронный пучок движется в однородном магнитном поле с индукцией $B_0 = B_x = \text{const}$ вдоль положительного направления оси x со скоростью v_0 (рис. 1). В том же направлении распространяется прямая бегущая электромагнитная волна. Основные уравнения, описывающие взаимодействие электронного пучка и волны, приведены в [1]. Выражения для продольной и поперечной составляющих напряженности возбужденного электрического поля [2] имеют вид:

$$E_x = -\frac{\beta_0^2 K_0 I_0}{2\text{sh}(\beta_0 d)} \text{sh}(\beta_0 y_0) e^{-j\beta_0 x} \int_0^x [j\beta_e \text{sh}(\beta_0 y_0) \tilde{x}(\xi) + \beta_e \text{ch}(\beta_0 y_0) \tilde{y}(\xi)] e^{j\beta_0 \xi} d\xi, \quad (1a)$$

$$E_y = -\frac{j\beta_0^2 K_0 I_0}{2\text{sh}(\beta_0 d)} \text{ch}(\beta_0 y_0) e^{-j\beta_0 x} \int_0^x [j\beta_e \text{sh}(\beta_0 y_0) \tilde{x}(\xi) + \beta_e \text{ch}(\beta_0 y_0) \tilde{y}(\xi)] e^{j\beta_0 \xi} d\xi. \quad (1b)$$

$$E_y = j \cdot \text{cth}(\beta_0 y_0) \cdot E_x, \quad (2)$$

где β_0 – фазовая постоянная волны в системе без пучка, β_e – фазовая постоянная волны в системе с пучком, K_0 – сопротивление связи, I_0 – постоянная составляющая тока пучка, $\tilde{x}(x)$ и $\tilde{y}(x)$ – ВЧ возмущения.

Вывод выражений для компонент поля пространственного заряда подробно приведен в [2] для случая бесконечно тонкого электронного пучка магнетронного типа. Направление магнитного поля сказывается лишь при записи уравнений движения и не оказывает влияния на вывод выражения для поля пространственного заряда. Тогда, как для случая, когда электронный пучок движется в скрещенных полях, так и для случая, когда он движется в продольном магнитном поле, выражения для полей пространственного заряда будут иметь один и тот же вид.

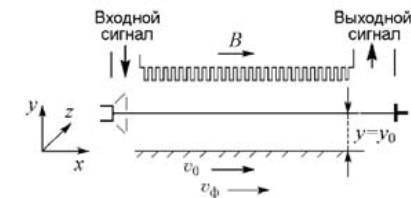


Рис. 1. Двумерная модель взаимодействия электронного потока и волны

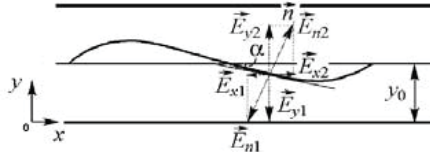


Рис. 2. Компоненты напряжённости поля пространственного заряда

Бесконечно тонкий электронный пучок, промодулированный ВЧ сигналом, движется в области, где ВЧ поля отсутствуют (рис. 2). На входе в эту область пучок имеет как продольное \tilde{x} , так и поперечное \tilde{y} ВЧ смещения. При дальнейшем своем движении пучок остается криволинейным и форма его изменяется лишь под действием ВЧ полей пространственного заряда. Когда пучок движется в системе ровно посередине, выражения для составляющих поля пространственного заряда можно записать как

$$E_{xПЗ} = -B\omega_p \tilde{x} \cdot \text{th}(\beta_0 y_0), \quad E_{yПЗ} = B\omega_p \tilde{y} \cdot \text{cth}(\beta_0 y_0), \quad (3)$$

где ω_p – плазменная частота.

Подставляя интегральные выражения ВЧ возмущений $\tilde{x}(x)$ и $\tilde{y}(x)$ [1] в уравнения для компонент электрического поля (1а) и (1б) с учетом связи продольной и поперечной составляющих (2) и добавляя к возбужденному полю «холодное» поле входного сигнала, получим интегральное уравнение для продольной компоненты искомого поля:

$$\begin{aligned} \bar{E}_x = & E^0 \text{sh}(\beta_0 y_0) \cdot e^{-j\beta_0 x} - \frac{\beta_0^2 K_0 I_0}{2 \text{sh}(\beta_0 d)} \text{sh}(\beta_0 y_0) \cdot e^{-j\beta_0 x} \times \\ & \times \left\{ \int_0^x j \beta_c \text{sh}(\beta_0 y_0) \cdot e^{j\beta_0 \xi} \int_0^\xi \frac{1}{2V_0} \bar{E}_x(\bar{x}) \frac{\sin[\beta_p(\xi - \bar{x})]}{\beta_p} e^{-j\beta_c(\xi - \bar{x})} d\bar{x} d\xi + \right. \\ & \left. + \int_0^x \beta_c \text{ch}(\beta_0 y_0) \cdot e^{j\beta_0 \xi} \int_0^\xi j \frac{1}{2V_0} \bar{E}_x(\bar{x}) \text{cth}(\beta_0 y_0) \frac{\text{sh}[\sqrt{\beta_p^2 \text{cth}^2(\beta_0 y_0) - \beta_c^2}(\xi - \bar{x})]}{\sqrt{\beta_p^2 \text{cth}^2(\beta_0 y_0) - \beta_c^2}} e^{-j\beta_c(\xi - \bar{x})} d\bar{x} d\xi \right\} \end{aligned} \quad (4)$$

где E^0 – постоянная амплитуда волны, $V_0 = v_0^2/2\eta$ – ускоряющее напряжение, $\eta = e/m$, e и m – заряд и нерелятивистская масса электрона, β_c – фазовая постоянная циклотронной волны, $\beta_p^2 = \eta B \frac{\omega_p}{v_0^2} \text{th}(\beta_0 y_0)$.

Решение уравнения (4) будем искать в виде

$$\bar{E}_x(x) = \sum_{i=1}^n E_i(0) e^{-j\beta_i x}, \quad (5)$$

где $E_i(0)$ – амплитуда i -й парциальной волны; β_i – искомая постоянная

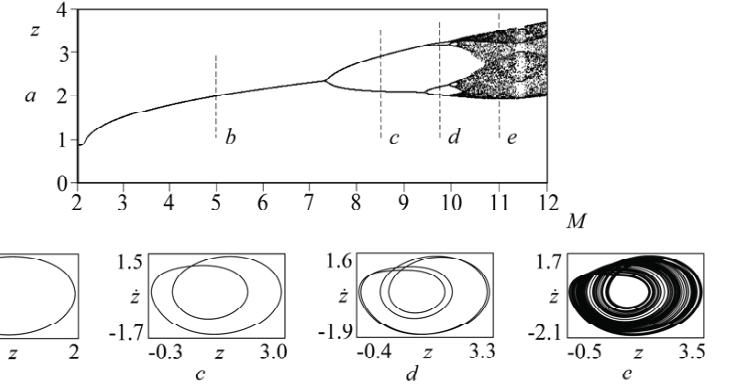


Рис. 1. Бифуркационное дерево автономного генератора Кислова–Дмитриева при $T = 5$, $Q = 10$ (а); фазовые портреты, иллюстрирующие сценарий Фейгенбаума для значений коэффициента усиления $M = 5$ (b), $M = 8.5$ (c), $M = 9.75$ (d) и $M = 11$ (e)

Анализ устойчивости неподвижной точки в начале координат приводит к тому, что фактор

$$\Lambda \approx \frac{M}{2T} \quad (2)$$

определяет превышение над порогом бифуркации Андронова–Хопфа генератора Кислова–Дмитриева, при этом частота возникающих колебаний $\omega \approx 1$.

2. Динамика связанных систем ван дер Поля и Кислова–Дмитриева. В работе было изучено устройство плоскости параметров частотная расстройка – величина связи (Δ, μ) системы (1). При этом параметры генератора Кислова–Дмитриева: время задержки $T = 5$, добротность $Q = 10$, коэффициент усиления M менялся так, чтобы система переходила из автоколебательного режима с простейшим предельным циклом (рис. 1, b) в хаотический (рис. 1, e). Управляющий параметр осциллятора ван дер Поля $\lambda = 1$.

В случае, когда генератор Кислова–Дмитриева демонстрирует простейший однооборотный предельный цикл (рис. 1, b), на плоскости параметров (Δ, μ) видна характерная картина синхронизации неидентичных автоколебательных систем (рис. 2): имеются область гибели колебаний и область широкополосной синхронизации, нижняя граница которой отвечает порогу режима гашения колебаний генератора Кислова–Дмитриева.

В случае, когда генератор Кислова–Дмитриева демонстрирует хаотический режим (рис. 1, e), на плоскости параметров (Δ, μ) наблюдаются удвоения периода и переход к хаосу по Фейгенбауму в области отрицательных частотных расстройок не только при увеличении, но и при уменьшении уровня связи (рис. 3, a). Это связано с проявлением свойств хаотического

ОСОБЕННОСТИ СИНХРОНИЗАЦИИ В СИСТЕМЕ СВЯЗАННЫХ ОСЦИЛЛЯТОРА ВАН ДЕР ПОЛЯ И ГЕНЕРАТОРА КИСЛОВА–ДМИТРИЕВА

Емельянова Ю.П., аспирант факультета нелинейных процессов СГУ,
ассистент кафедры «Приборостроение» ФЭТиП СГТУ

Описание взаимодействия связанных разнотипных автоколебательных систем важно не только с позиции теории колебаний, но и для возможных приложений. Например, биофизические процессы должны отвечать взаимодействию различных автоколебательных элементов. Введение связи между разнотипными автогенераторами может представлять интерес и в радиофизике с точки зрения формирования сигнала с более широким спектром свойств и возможностей управления. В этом плане интересной представляется ситуация, когда одна из подсистем может демонстрировать не только простые автоколебания, но и хаос. В настоящей работе в указанном контексте рассматривается задача о взаимодействии системы ван дер Поля и генератора Кислова–Дмитриева, являющихся хорошо известными примерами автоколебательных систем.

1. Автогенераторы ван дер Поля и Кислова–Дмитриева. Осциллятор ван дер Поля является классической моделью теории колебаний, демонстрирующей автоколебания и допускающей радиофизическую реализацию. Физическая система, предложенная В.Я. Кисловым и А.С. Дмитриевым, представляет собой замкнутую в кольцо цепочку из нелинейного усилителя, RLC-фильтра и инерционного элемента. Она является системой с запаздывающей обратной связью и может демонстрировать динамический режим хаотических автоколебаний, переход к которому осуществляется через последовательность удвоений периода по сценарию Фейгенбаума (рис. 1).

Уравнения резистивно связанных осциллятора (автогенератора) ван дер Поля и генератора Кислова–Дмитриева могут быть записаны в форме:

$$\begin{aligned} T \frac{dx}{dt} + x &= Mz \exp(-z^2), \\ \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{1}{Q} \frac{dz}{dt} + z + \mu \left(\frac{dz}{dt} - \frac{dw}{dt} \right) &= x, \\ \frac{d^2w}{dt^2} - (\lambda - w^2) \frac{dw}{dt} + (1 + \Delta)w + \mu \left(\frac{dw}{dt} - \frac{dz}{dt} \right) &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где x – сигнал на выходе инерционного элемента, z – сигнал на входе усилителя, T – время релаксации инерционного элемента, Q – добротность RLC-фильтра, M – коэффициент усиления, λ – параметр, отвечающий за отрицательное трение и за превышение над порогом бифуркации Андронова–Хопфа, Δ – отстройка собственной частоты осциллятора ван дер Поля от единичной, μ – параметр связи.

распространения i -й парциальной волны; n – число парциальных волн, полностью описывающих искомое поле.

Подставляя (5) в уравнение (4), интегрируя и приравнявая соответствующие коэффициенты в правой и левой частях, приходим к следующему дисперсионному уравнению ($n=5$) и системе для нахождения амплитуд парциальных волн:

$$\begin{aligned} &(\beta_i - \beta_0) \left((\beta_i - \beta_e)^2 - \beta_p^2 \right) \left((\beta_i - \beta_e)^2 - (\beta_c^2 - \beta_p^2 \text{cth}^2(\beta_0 y_0)) \right) = \\ &= \beta_e \beta_0^2 C_0^3 \text{sh}(\beta_0 y_0) \left\{ \beta_c^2 - \beta_p^2 \text{cth}^2(\beta_0 y_0) - (\beta_i - \beta_e)^2 - \text{cth}^2(\beta_0 y_0) \left((\beta_i - \beta_e)^2 - \beta_p^2 \right) \right\} \quad (6) \\ &\sum_{i=1}^5 E_i(0) = E^0, \quad \sum_{i=1}^5 \frac{E_i(0)}{(\beta_i - \beta_e)^2 - \beta_p^2} = 0, \\ &\sum_{i=1}^5 \frac{E_i(0)}{(\beta_i - \beta_e)^2 - (\beta_c^2 - \beta_p^2 \text{cth}^2(\beta_0 y_0))} = 0, \\ &\sum_{i=1}^5 \frac{E_i(0)(\beta_i - \beta_e)}{(\beta_i - \beta_e)^2 - \beta_p^2} = 0, \quad \sum_{i=1}^5 \frac{E_i(0)(\beta_i - \beta_e)}{(\beta_i - \beta_e)^2 - (\beta_c^2 - \beta_p^2 \text{cth}^2(\beta_0 y_0))} = 0. \quad (7) \end{aligned}$$

Если связь электронного пучка с полем волны в линии передачи пренебрежимо мала ($C_0 \rightarrow 0$), то уравнение (6) описывает пять несвязанных волн: $\beta_1 = \beta_0$ – собственная волна в линии передачи без пучка, $\beta_{2,3} = \beta_e \pm \beta_p$ – медленная («+») и быстрая («-») волны ПЗ, $\beta_{4,5} = \beta_e \pm \sqrt{\beta_c^2 - \beta_p^2 \text{cth}^2(\beta_0 y_0)}$ – медленная («+») и быстрая («-») циклотронные волны с поправкой, вносимой пространственным зарядом.

С учётом общепринятых обозначений уравнение (6) примет вид:

$$\begin{aligned} &(j\delta - b + jd)(\delta^2 + 4QC_0)(\delta^2 + \chi - 4QC_0 \text{cth}^2(\beta_0 y_0)) = \\ &= (1 + bC_0 - jC_0 d)^2 \text{sh}(\beta_0 y_0) \cdot \left\{ \delta^2 (1 + \text{cth}^2(\beta_0 y_0)) + \chi \right\}, \quad (8) \end{aligned}$$

где $\delta = x + jy$, $x = \frac{\gamma}{\beta_e C_0}$, $y = \frac{\beta_e - \beta}{\beta_e C_0}$, $\beta = \beta_e (1 + jC_0 \delta)$, $\beta_0 = \beta_e (1 + bC_0 - jC_0 d)$, $b = (\beta_0 - \beta_e) / (\beta_e C_0)$, $d = \gamma_0 / (\beta_e C_0)$, γ – усиление на единицу длины в линии передачи с пучком, γ_0 – затухание на единицу длины в линии передачи без пучка, $C_0^3 = I_0 K_0 / 4V_0$ – параметр усиления, $4QC_0 = (\beta_p / (\beta_e C_0))^2$ – параметр пространственного заряда и $\chi = (\beta_c / (\beta_e C_0))^2$ – параметр, связанный с наличием магнитного поля.

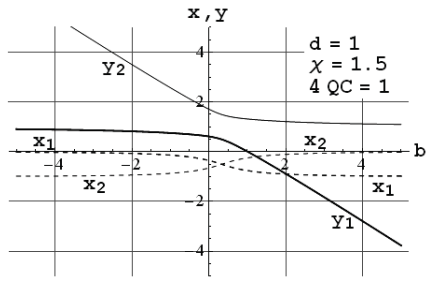


Рис. 3. Зависимости корней дисперсионного уравнения (9)

дисперсионного уравнения, исключив нерезонансные члены, и рассматривать двухволновое взаимодействие. Далее будем предполагать, что $\text{sh}(\beta_0 y_0) = 1$ и $\text{cth}^2(\beta_0 y_0) = 2$.

1. Условие $\beta_2 = \beta_e - \beta_p$ эквивалентно тому, что $\Phi_0 = \theta_p$ [1], где $\theta_p = \beta_p l$, l – длина пространства взаимодействия. Это соответствует точному синхронизму волны в линии передачи без пучка с БВПЗ. С учетом сделанных выше предположений дисперсионное уравнение и система для амплитуд парциальных волн примут вид

$$(\delta_i + jb + d)(\delta_i - j\sqrt{4QC_0}) = \frac{-\{\chi - 3 \cdot 4QC_0 + j4\sqrt{4QC_0}(\delta_i - j\sqrt{4QC_0})\}}{2\sqrt{4QC_0}(\chi - 3 \cdot 4QC_0)}. \quad (9)$$

$$\sum_{i=1}^2 E_i(0) = E^0, \quad \sum_{i=1}^2 \frac{E_i(0)}{\delta_i - j\sqrt{4QC_0}} = 0. \quad (10)$$

Решая совместно уравнения (9) и (10), получим выражение для полного поля в зависимости от продольной координаты ($i, k = 1, 2$):

$$E(x) = E^0 \sum_{i=1}^2 \frac{\delta_i - j\sqrt{4QC_0}}{\delta_i - \delta_k} \exp(-j\beta_e(1 + jC_0\delta_i)x). \quad (11)$$

2. Синхронизм с МВПЗ: условия $\beta_3 = \beta_e + \beta_p$ или $\Phi_0 = -\theta_p$. Тогда имеем дисперсионное уравнение

$$(\delta_i + jb + d)(\delta_i + j\sqrt{4QC_0}) = \frac{\{\chi - 3 \cdot 4QC_0 - j4\sqrt{4QC_0}(\delta_i + j\sqrt{4QC_0})\}}{2\sqrt{4QC_0}(\chi - 3 \cdot 4QC_0)}. \quad (12)$$

Частные случаи. В силу того, что общее дисперсионное уравнение имеет 5 степень, найти решение аналитически не представляется возможным. Анализ, основанный на методе последовательных приближений [1], предсказал появление резонансных эффектов при определенных значениях невозмущенного относительного угла пролёта Φ_0 . Это позволяет понизить степень общего

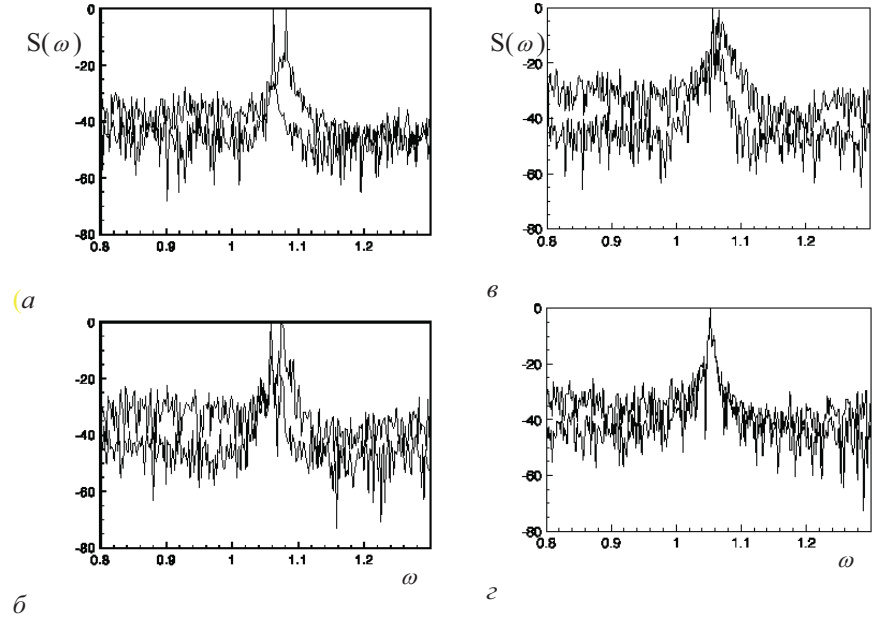


Рис. 3. Спектры мощности для системы (3) при различных значениях параметра связи: 0.0 (а), 0.008 (б), 0.015 (в), 0.02 (г)

са на уменьшение перемешивания. Данный результат можно рассматривать как обобщение влияния синхронизации на перемешивание в системе на случай детерминированного хаоса.

Библиографический список

1. V.S. Anishchenko, S.V. Astakhov, T.E. Vadivasova // ISSN 1560-3547, Regular and Chaotic Dynamics, 2010, Vol. 15, Nos 2-3, pp. 261-273.
2. Анищенко В.С., Астахов В.В., Вадивасова Т.Е., Стрелкова Г.И. Синхронизация регулярных, хаотических и стохастических колебаний // М. Ижевск: Научно-издательский центр «Регулярная и хаотическая динамика», Ижевский институт компьютерных исследований, 2008.
3. Колмогоров А.Н. Новый метрический инвариант транзитивных динамических систем и автоморфизмов пространства Лебега // ДАН СССР, 1958, Т. 119, № 5, С. 861-864.
4. Marwan N., Romano M.C., Thiel M., Kurths J. Recurrence Plots for the analysis of complex systems // Physics Reports. 2007. Vol. 438. Pp. 237-329.

Научный руководитель: С.В. Астахов, к.ф.-м.н., ассистент кафедры радиофизики и нелинейной динамики СГУ.

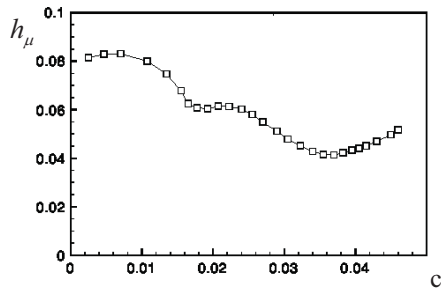


Рис 2. Зависимость ks-энтропии от параметра связи для системы (3)

бесконечность. Таким образом, ks-энтропия является мерой непредсказуемости процесса и мерой перемешивания в системе.

Расчет энтропии напрямую по формуле (2) не представляется возможным, поэтому используются различные методы её оценки. В данной работе используется метод Recurrence Plots [4].

Итак, уравнения исследуемой системы связанных осцилляторов Ресслера имеют вид:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= -y_1 - z_1 + c(y_2 - y_1), \\
 \dot{y}_1 &= x_1 + \alpha_1 y_1, \\
 \dot{z}_1 &= \beta_1 + z_1(x_1 - m_1), \\
 \dot{x}_2 &= -y_2 - z_2 + c(y_1 - y_2), \\
 \dot{y}_2 &= x_2 + \alpha_2 y_2, \\
 \dot{z}_2 &= \beta_2 + z_2(x_2 - m_2).
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

Численное интегрирование системы (3) проводилось при следующих значениях параметров: $m_1 = m_2 = 5.7, \alpha_1 = 0.167, \alpha_2 = 0.225, \beta_1 = \beta_2 = 0.2$. На рис. 3 представлены спектры мощности для различных значений параметра связи. Видно, что в отсутствие связи базовые частоты различны, при $c = 0.015$ они начинают сближаться, а при $c = 0.02$ они уже совпадают, то есть произошла фазовая синхронизация.

Обратимся теперь к полученной зависимости ks-энтропии от параметра связи. Видно, что на интервале (0.015;0.02) энтропия претерпевает спад, то есть наше предположение подтвердилось: спад энтропии соответствует уменьшению перемешивания, которое происходит при входе в режим синхронизации*.

Таким образом, в ходе численного эксперимента с использованием ks-энтропии подтверждено влияние фазовой синхронизации спирального хаоса

* Дальнейший спад энтропии происходит из-за сужения спектрального пика и большей регуляризации колебаний, а ее возрастание при $c > 0.04$ – вследствие превращения спирального аттрактора в винтовой.

3. Если $\beta_4 = \beta_c - \sqrt{\beta_c^2 - \beta_p^2 \text{cth}^2(\beta_0 y_0)}$ и $\Phi_0 = \sqrt{\varphi_c^2 - \theta_p^2 \text{cth}^2(\beta_0 y_0)}$, где $\varphi_c = \beta_c l$ – циклотронный угол пролета, то имеет место синхронизм с БЦВ, причём учитывается поправка, вносимая пространственным зарядом. Дисперсионное уравнение

$$(\delta_i + jb + d)(\delta_i - j\sqrt{\chi - 2 \cdot 4QC_0}) = -1/\sqrt{\chi - 2 \cdot 4QC_0}. \tag{13}$$

4. Синхронизм с МЦВ: $\beta_5 = \beta_c + \sqrt{\beta_c^2 - \beta_p^2 \text{cth}^2(\beta_0 y_0)}$, что эквивалентно $\Phi_0 = -\sqrt{\varphi_c^2 - \theta_p^2 \text{cth}^2(\beta_0 y_0)}$. Дисперсионное уравнение примет вид:

$$(\delta_i + jb + d)(\delta_i + j\sqrt{\chi - 2 \cdot 4QC_0}) = 1/\sqrt{\chi - 2 \cdot 4QC_0}. \tag{14}$$

Наличие пяти несвязанных волн является следствием того, что при рассмотрении взаимодействия учтены и влияние пространственного заряда, и влияние магнитного поля. При учёте лишь одного из этих факторов дисперсионное уравнение получится третьей степени. Но в рассмотренном выше случае именно за счет того, что взяты во внимание оба фактора, возможно существование помимо собственной волны как пары несвязанных волн пространственного заряда, так и пары циклотронных волн и, соответственно, возможно взаимодействие электронного пучка с ними.

Библиографический список

1. Краснова Г.М. К двумерной линейной теории взаимодействия электронного потока с бегущей электромагнитной волной: учет влияния пространственного заряда в модели тонкого пучка // Изв. вузов. ПНД. 2010. Т. 18, № 5. С. 151.
2. Шевчик В.Н., Трубецков Д.И. Аналитические методы расчета в электронике СВЧ. М.: Советское радио, 1970.

Научный руководитель: Трубецков Д.И., чл-кор.РАН, профессор, д.ф.-м. н.

ДИСПЕРСИОННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ МЕДЛЕННЫХ ВОЛН В ФЕРРОМАГНИТНЫХ ПЛЁНКАХ

Ланина М., студентка 2 курса ФНП СГУ
Степанов В., студент 2 курса ФНП СГУ

В настоящее время для расчёта основных электродинамических характеристик (дисперсии, групповой скорости) электромагнитных волн в ферромагнитных плёнках широко используется магнитостатическое приближение. Волны, рассматриваемые с использованием этого приближения, получили в литературе название **магнито-статических волн (МСВ)** [1,2]. На основе магнитостатического приближения достаточно строго рассчитываются дисперсионные характеристики медленных электромагнитных волн как в однослойных, так и в многослойных ферромагнитных структурах при различных направлениях внешнего магнитного поля [3]. Однако это приближение хорошо работает при малых значениях постоянной распространения волны только для тонких ферромагнитных плёнок [3].

В данной работе приводятся результаты расчётов дисперсионных характеристик для медленных электромагнитных волн при различных толщинах плёнки. Полученные результаты сравниваются с дисперсионными характеристиками, рассчитанными в магнитостатическом приближении.

Модель анализируемой структуры представляет собой ферромагнитную плёнку толщиной d , помещённую в постоянное магнитное поле \vec{H}_0 (рис. 1).

Предполагается, что плёнка бесконечна в направлениях X и Y и в направлении оси Z распространяется электромагнитная волна с постоянной распространения \vec{k} . Ниже будем рассматривать 2 случая:

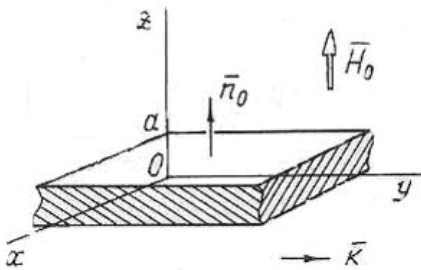


Рис. 1. Ферромагнитная плёнка в случае нормального намагничивания

1. Магнитное поле \vec{H}_0 ориентировано по нормали к поверхности плёнки ($\vec{H}_0 \parallel \vec{n}_0$, где \vec{n}_0 – единичный вектор нормали);
2. Магнитное поле \vec{H}_0 ориентировано по касательной к поверхности плёнки и параллельно вектору \vec{k} ($\vec{H}_0 \perp \vec{n}_0$).

Для анализа характеристик электромагнитных волн, распространяющихся в такой структуре, используем уравнения Максвелла

производную от фазы по времени. Если обратиться к спектру мощности, то нетрудно заметить, что он имеет ярко выраженный максимум на частоте $\omega = \omega_0$, поэтому можно говорить о некоторой базовой частоте колебаний ω_0 , которая соответствует средней частоте вращения фазовых траекторий вокруг состояния равновесия.

Пусть имеются 2 связанных генератора, находящиеся в режиме спирального хаоса и имеющие некоторое различие в базовых частотах: $\omega_{02} = \omega_{01} + \Delta\omega$. Взаимная синхронизация в таком случае будет проявляться в подстройке базовой частоты колебаний одного генератора к базовой частоте колебаний другого.

Для хаотического процесса характерно явление перемешивания – это процесс заполнения фазового пространства изображающими точками, стартовавшими из малой окрестности друг друга. Из данного определения следует, что невозможность точного задания начальных условий приводит к непредсказуемости состояния системы в дальнейшем, несмотря на то, что эволюция системы описывается детерминированным оператором. Именно в системах с перемешиванием наблюдается явление детерминированного хаоса. Количественной мерой перемешивания хаотических систем является энтропия Колмогорова–Синяя [3].

Введем энтропию Колмогорова–Синяя (ks-энтропию). Разбив фазовое пространство системы на m ячеек ΔG_i , проведем M измерений, отмечая n последовательных ячеек, в которых побывала траектория через равные промежутки времени Δt . Для каждой из M реализаций получим последовательность ячеек $G_i(n, \Delta t)$. Среднее количество информации на одну реализацию определяется следующей величиной:

$$H_n = -\sum_{i=1}^M P(G_i(n, \Delta t)) \ln P(G_i(n, \Delta t)), \sum_{i=1}^M P(G_i(n, \Delta t)) = 1.$$

Разделив данную величину на Δt и n и устремив n к бесконечности, получим энтропию на элемент процесса в единицу времени:

$$H = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{H_n}{n \Delta t}.$$

Данная величина зависит от способа разбиения фазового пространства на ячейки. ks-энтропия определяется как её верхняя граница для всевозможных разбиений:

$$h_\mu = \sup_G H. \quad (2)$$

Если траектория регулярна, то всегда найдется такое $n = n_0$, что для любых измерений траектория $G_i(n_0, \Delta t)$ будет идентична и ks-энтропия в этом случае будет равна нулю. В случае детерминированного хаоса энтропия положительна и конечна, а для стохастического процесса обращается в

ВЛИЯНИЕ СИНХРОНИЗАЦИИ ХАОСА НА ПЕРЕМЕШИВАНИЕ В СИСТЕМЕ ДВУХ СВЯЗАННЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ РЕССЛЕРА

А.А. Дворак, студент 5 курса кафедры радиопизики
и нелинейной динамики СВУ

Синхронизация – один из базовых эффектов теории колебаний, заключающийся в подстройке собственных ритмов автоколебательной системы к ритму внешнего воздействия (вынужденная синхронизация), либо к ритму другой, связанной с ней, автоколебательной системы (взаимная синхронизация). В работе [1] показано влияние эффективной синхронизации двух связанных зашумленных генераторов ван дер Поля на уменьшение перемешивания, вносимого шумом. Мы предполагаем, что влияние синхронизации на уменьшение перемешивания в системе носит общий характер, и покажем его для случая детерминированного хаоса.

Существуют различные виды синхронизации хаоса. Мы будем рассматривать фазовую синхронизацию, которая может возникать в случае спирального аттрактора, реализуемого в системах с петлей сепаратрисы седлофокуса [2]. Рассмотрим режим спирального аттрактора в системе Ресслера:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y - z, \\ \dot{y} &= x + \alpha y, \\ \dot{z} &= \beta + z(x - m). \end{aligned} \quad (1)$$

На рис. 1 представлены проекция фазового портрета системы (1) на плоскость (x, y) и спектр мощности при значениях управляющих параметров $\alpha = \beta = 0.2$ и $m = 6.5$. Видно, что в проекции фазового портрета траектория совершает вращательные движения вокруг начала координат. В данном случае можно говорить о фазе колебаний, как об угле между положительным направлением оси абсцисс и линией, соединяющей изображающую точку с началом координат. Можно ввести мгновенную частоту, как

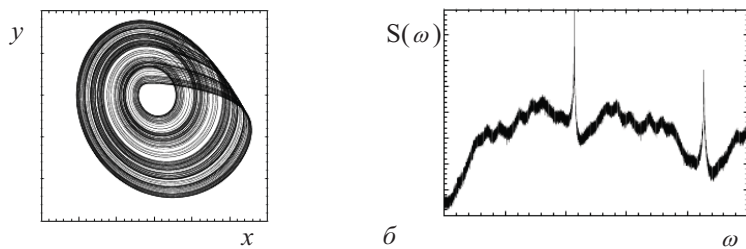


Рис 1. Проекция фазового портрета на плоскость (x, y) (а) и спектр мощности (б) для осциллятора Ресслера, находящегося в режиме спирального хаоса ($\alpha = \beta = 0.2$, $m = 6.5$)

для ферромагнитной среды в отсутствие сторонних зарядов и токов [2]. Предполагается, что все переменные величины $\sim e^{i\omega t}$ (ω – частота волны). Систему уравнений можно записать в виде (в системе СГС):

$$\text{rot } \vec{e} = -i \frac{\mu \omega \vec{h}}{c}, \quad \text{rot } \vec{h} = i \frac{\omega \vec{e}}{c}, \quad (1)$$

где \vec{e}, \vec{h} – ВЧ составляющие электрического и магнитного полей соответственно; ϵ – диэлектрическая проницаемость среды; $\vec{\mu}$ – тензор магнитной проницаемости, вид которого в общем виде приведён в [1,2].

Решение системы (1) будем искать в виде $(\frac{\partial}{\partial x} = 0)$:

$$\begin{aligned} \vec{e} &= e_0(z) e^{i(\omega t - ky)}, \\ \vec{h} &= h_0(z) e^{i(\omega t - ky)}, \end{aligned} \quad (2)$$

где $e_0(z)$ и $h_0(z)$ описывают распределение ВЧ полей вдоль оси Z.

1. Случай нормального намагничения. В случае решения системы (1) с учетом (2) получим следующее дисперсионное соотношение для волн, распространяющихся в плоском ферромагнитном слое:

$$[k_z^2 - \mu(k_0^2 \epsilon - k^2)][k_z^2 - (k_0^2 \mu \epsilon - k^2)] - k_0^2 \epsilon \mu_0^2 (k_0^2 \epsilon - k^2) = 0 \quad (3)$$

Отметим, что уравнение (3) будет справедливо при любых граничных условиях на поверхности слоя, если определить значение k_z . Если положить $k_z = 0$ ($\frac{\partial}{\partial z} = 0$ – безграничная среда), то уравнение (3) можно записать в виде:

$$(k_0^2 \epsilon - k^2)[\mu k^2 - k_0^2 \epsilon (\mu^2 - \mu_0^2)] = 0, \quad (4)$$

которое разделяется на два уравнения. Первое уравнение описывает быструю электромагнитную волну с фазовой скоростью $c_1 = c/\sqrt{\epsilon}$. Второе уравнение описывает как быструю (при $\omega > \omega_H \pm \omega_M$), так и медленную (при $\omega < [\omega_H(\omega_H + \omega_M)]^{1/2}$) волны в ферромагнитной среде.

Если ферромагнитный слой ограничен идеально проводящими металлическими плоскостями, то $k_z = \frac{n\pi}{d}$ ($n=1,2,3,\dots$), т.е. с ростом d величина k_z уменьшается. Этот случай детально рассмотрен в [2] при различных значениях d . В качестве примера на рис. 2 приведены дисперсионные кривые для быстрой и медленной волн, рассчитанные из уравнения (3) при $k_z = \text{const}$ (сплошные кривые). Для сравнения там же приведена дисперсионная кривая для медленной волны, рассчитанная в магнитостатическом

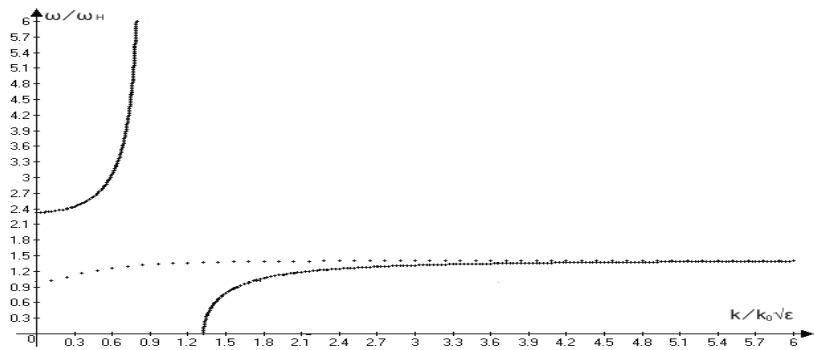


Рис. 2. Дисперсионные кривые для случая нормального намагничения при $n=1$, $\epsilon=10$, $d=10$ мкм

приближении. Уравнение кривой было получено из (3) в предположении $k_0^2 \ll k^2$.

2. Случай касательного намагничения. Используя соотношения (1) и (2) и аналогичные предположения, как и в предыдущем случае, дисперсионное уравнение для этого случая можно получить в виде:

$$k^4 + k_y^4 \mu + (1 + \mu)k^2 k_y^2 - k_0^2 k_y^2 (\mu^2 + \mu - \mu_\alpha^2) + (\mu^2 - \mu_\alpha^2)k_0^4 \epsilon^2 = 0 \quad (5)$$

На рис. 3 приведены дисперсионные зависимости для быстрой и медленной волн (сплошные кривые), рассчитанные из уравнения (5) при тех же параметрах, что и на рис. 2. Для сравнения на этом рисунке приведена кривая, рассчитанная в магнитостатическом приближении (пунктир). Из рис. 3 видно, что в магнитостатическом приближении дисперсионная кри-

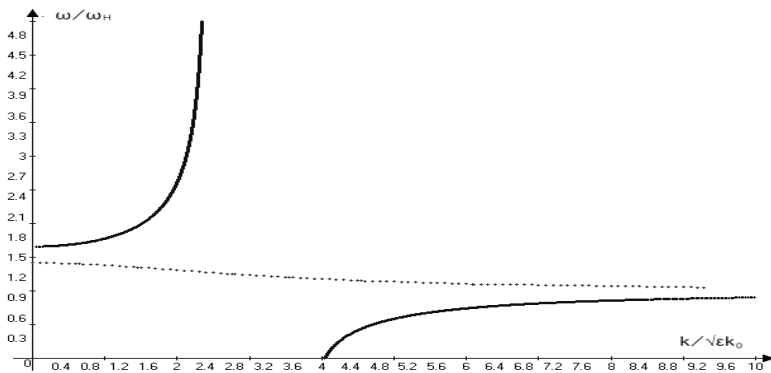
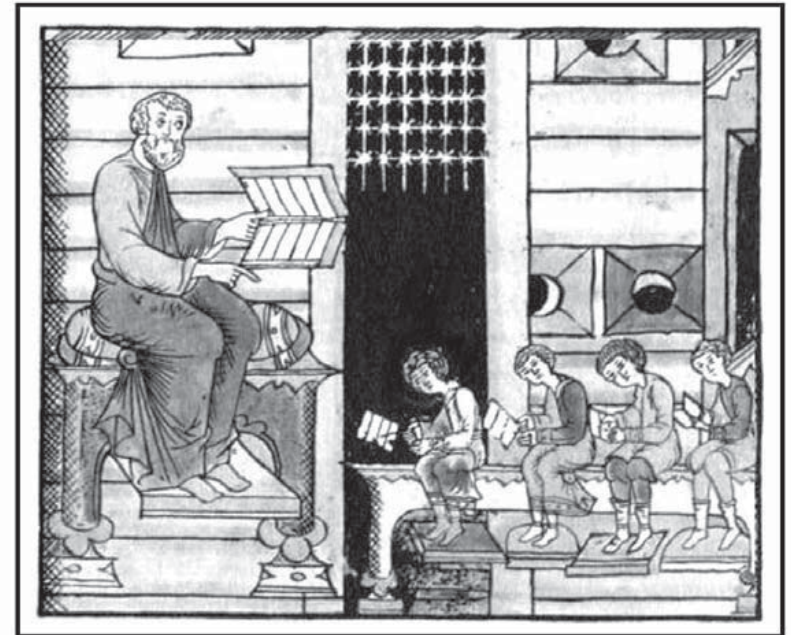


Рис. 3. Дисперсионные кривые для случая касательного намагничения



Синхронизация

иной. Он возникает вследствие слияния одного из окон периодичности в хаотической области с основной областью периодических движений. При этом тип окна периодичности, участвующего в данном процессе, зависит от величины параметра связи ϵ . Общая картина бифуркационных линий в рассматриваемой области чрезвычайно сложна (что позволяет назвать данную ситуацию «бифуркационным взрывом») и требует проведения дальнейших исследований.

На границах этой области также возникают сходящиеся последовательности точек, теперь с парой мультипликаторов (+1, -1) (так называемая «fold-flip» бифуркация по терминологии [4]). Наличие таких последовательностей свидетельствует о существовании критических точек типа С на концах фейгенбаумовской линии по сторонам разрыва (С1 и С2 на рис. 2). Кроме того, критические точки типа С сохраняются там, где они существовали в связанных логистических отображениях (С1' и С3 на рис. 2).

Таким образом, рассматриваемая система при уменьшении диссипации оказывается способна демонстрировать различные типы критического поведения. Кроме того, обращает на себя внимание тот факт, что в системе (1) существуют отрезки фейгенбаумовской линии (F2 и F3 на рис. 2), заканчивающиеся с двух сторон критическими точками разных типов.

Работа поддержана грантом Президента РФ МК-905.2010.2 и АВЦП Минобрнауки РФ «Развитие научного потенциала высшей школы» № 2.1.1/1738.

Библиографический список

1. Kuznetsov A.P., Sataev I.R. and Sedova J.V. Dynamics of coupled non-identical systems with period-doubling cascade. //Regular and chaotic dynamics, vol. 13, № 1, 2008, pp. 9–18.
2. Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Sataev I.R.. A variety of period-doubling universality classes in multiparameter analysis of transition to chaos. //Physica D, vol. 109, 1997, pp. 91–112.
3. Reichl L.E. The Transition to Chaos in Conservative Classical Systems: Quantum Manifestations. – Springer-Verlag, 1992, 551 p.
4. Kuznetsov Yu.A. Elements of Applied Bifurcation Theory. – Springer-Verlag, 1998, 591 p.

Научный руководитель: Кузнецов А.П., профессор, д.ф.-м.н., зав. базовой кафедрой динамических систем СГУ им. Н.Г. Чернышевского, в.н.с. СФ ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН

вая для рассмотренного случая имеет аномальный характер [1,2] в областях малых значений k и приближается к строгому решению при больших значениях k .

Таким образом, показано, что магнитостатическое приближение даже для тонких магнитных пленок ($d \sim 10$ мкм) справедливо только в области больших значений k ($k/k_0\sqrt{\epsilon} > 10$), т.е. при малых длинах волн.

Библиографический список

1. Damon R.W., Eschback J.R. Magnetostatic modes of ferromagnetic slab//J.Phys. and Chem. Solids. 1961. Vol. 19, № 3–4. P. 308–320.
2. Ваиковский А.В., Стальмахов В.С., Шараевский Ю.П. Магнитостатические волны в электронике сверхвысоких частот. Саратов: Изд-во СГУ. 1993.
3. Гришин С.В., Шараевский Ю.П. Медленные электромагнитные волны в касательно намагниченных ферромагнитных плёнках // Журнал технической физики. 2001. Т. 71. Вып. 4. С. 95–98.

Научный руководитель: Шараевский Ю.П., д.ф.-м.н., зав. кафедрой нелинейной физики ФНП.

**АНАЛИЗ ДИНАМИКИ ЛАЗЕРНОГО ПУЧКА,
РАСПРОСТРАНЯЮЩЕГОСЯ В УСЛОВИЯХ
РЕЗОНАНСНОГО САМОВОЗДЕЙСТВИЯ**

Мисюрин А.Г., аспирант кафедры ПВС СГТУ

Нелинейная динамика резонансных лазерных систем изучается довольно давно (см., например, [1]). Однако динамика пространственного поведения лазерного пучка ранее изучена не была. Данная работа является продолжением нелинейно динамического анализа локальных проявлений резонансного самовоздействия в случае протяженных сред. Система имеет четыре координаты: две координаты в поперечной плоскости (ρ, φ), продольная координата (z) и время (t).

Численная модель в рамках скалярной параксиальной оптики основывается на прямом решении уравнений Блоха (см., например, [2]), выводящихся из уравнений для матрицы плотности и описывающих отклик среды, совместно с уравнением Максвелла (параболическим волновым уравнением), которое описывает пространственно-временную эволюцию распространяющегося поля,

$$2i \left(\frac{\partial E}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t} \right) + \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) E = gP, \quad (1)$$

$$\frac{\partial D}{\partial t} = -\gamma \left[D - 1 + i \left(E^* P - E P^* \right) \right], \quad (2)$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -(\Gamma + i\Delta)P - \frac{i}{2}\Gamma DE, \quad (3)$$

где g – коэффициент поглощения; γ, Γ – скорости релаксации заселенности и поляризации, соответственно; $D(z, \rho, \varphi, t)$ – разность заселённости, нормированная на её величину в отсутствие насыщения; $E(z, \rho, \varphi, t)$, $P(z, \rho, \varphi, t)$ – медленно меняющиеся амплитуды электрического поля и поляризации, соответственно; Δ – отстройка несущей частоты от частоты атомного перехода. Поскольку рассматривается случай, когда несущая частота ω_0 равна частоте атомного перехода, то $\Delta=0$ в (3). Единица амплитуды поля соответствует уровню насыщения $D=0.5$. Продольная координата z измеряется в единицах дифракционной длины L_d , представляющей собой характерное расстояние, на котором свободный пучок с данным радиусом и частотой удваивает своё сечение из-за дифракции. Поперечная координата r нормирована на начальный радиус пучка a , который во всех рассматриваемых случаях был взят равным 1.

Для решения уравнений (1)–(3) была использована неявная разностная схема второго порядка, основанная на разложении поля по поперечной

ность для правого по рисунку края рассматриваемого разрыва (окрестность точки Н2 на рис. 2) приведена в таблице 1.

Таблица 1

Координаты терминальных точек линий удвоения периода, сходящихся к критической точке Н2

Период	λ_1	λ_2
16	0.28080895	3.26891802
32	0.28038063	3.26909124
64	0.28029262	3.26910445
128	0.28028497	3.26910634
256	0.28028394	3.26910656

Можно видеть, что значения параметров демонстрируют сходимость к точке $\lambda_1=0.280284\dots, \lambda_2=3.269106\dots$ и позволяют оценить старшую константу скейлинга как $\delta=8.79$, что близко к теоретически известному для данного типа критичности значению $\delta_H=8.7210662\dots$ [3]. Для подтверждения нашего предположения был использован метод расчёта мультипликаторов в критической точке. Предполагая, что искомым тип критичности действительно реализуется при данных значениях параметров, можно, используя теоретически известные константы скейлинга, рассчитать вероятное местоположение критической точки и подсчитать в ней значения мультипликаторов циклов различных периодов. В нашем случае мы проводили расчёт мультипликаторов в точке $\lambda_1=0.280283808, \lambda_2=3.269106587$ для циклов периодов 32 и 64 и получили значения $\mu_1=-2.06$ и $\mu_2=-0.48$, что достаточно близко совпадает с теоретически известными значениями для критической точки Н-типа: $\mu_1=-2.0574783\dots$ и $\mu_2=-0.4860318\dots$ [2]. Аналогичные рассуждения справедливы и для критической точки Н3.

Механизм формирования правого по рисунку разрыва

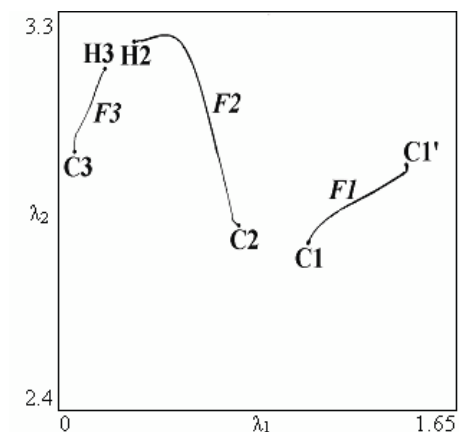


Рис. 2. Схематическое изображение фейгенбаумовской линии при $b=0.7$. $F1, F2, F3$ – обозначения отрезков фейгенбаумовской линии, $C1, C1', C2, C3, H2, H3$ – обозначения критических точек типов С и Н соответственно.

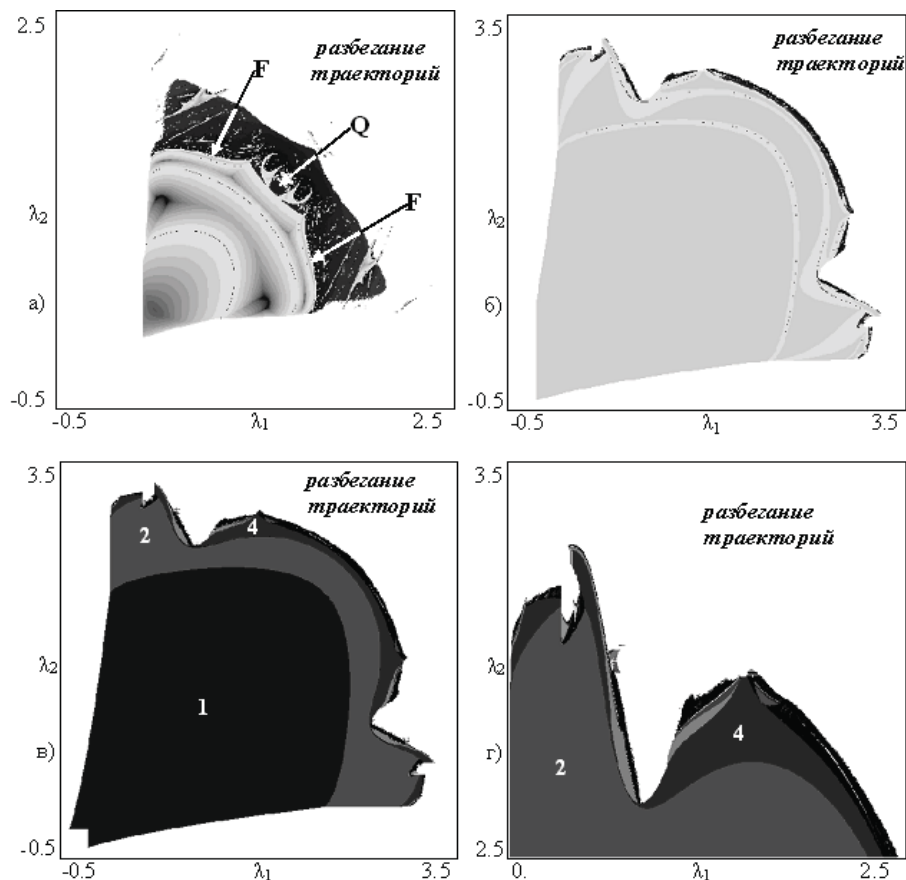


Рис. 1. Плоскость параметров отображения (1): карты старшего ляпуновского показателя (а, б), карта динамических режимов (в) и её увеличенный фрагмент (г). Значения параметров: а) $b=0$; б) – г) $b=0.7$. На карте ляпуновского показателя оттенки светло-серого цвета отвечают его отрицательным значениям, темно-серого – положительным, однородно-серый цвет соответствует значениям, близким к 0.

личен. Левый по рисунку разрыв возникает в результате появления областей квазипериодических движений на базе периодов каскада удвоений. При этом линии бифуркаций Неймарка-Сакера, являющиеся границами областей квазипериодических движений, пересекаются с линиями бифуркаций удвоения периода, образуя точки, в которых оба мультипликатора цикла равны -1 («резонанс 1:2»). Указанные точки формируют сходящуюся последовательность, что заставляет нас предположить существование критической точки *гамильтоновского* типа. К примеру, последователь-

координате по модам Гаусса–Лагерра [3]. Были рассмотрены пучки, симметричные относительно оси распространения с начальным гауссовым профилем. Частота пучка на входе в среду гармонически модулирована по времени, $\omega = \omega_0 + \omega_1 \sin \Omega t$, где ω_0 – несущая лазерная частота, ω_1 – амплитуда модуляции частоты, Ω – частота модуляции

В случае точного резонанса ($\Delta=0$) частота модулированного поля осциллирует симметрично по отношению к несущей. Время и частота нормированы на времена релаксации заселенностей γ и поляризации Γ . Для упрощения были взяты $\gamma=\Gamma=1$.

Были рассмотрены различные модуляционные режимы, отличающиеся значениями Ω и ω_1 , а также различные режимы насыщения, зависящие от интенсивности лазерного излучения.

В соответствии с правилами исследования нелинейно-динамических систем, для анализа нестационарного поведения лазерного сигнала были проанализированы фазовые диаграммы на плоскости «поляризация среды P – разность заселенностей D », иллюстрирующие динамику отклика среды на воздействующее излучение, а также спектры мощности, рассчитанные по реализации интенсивности на оси пучка на выходе из среды.

Благодаря эффекту самовоздействия фазовая модуляция преобразуется в амплитудную. В линейном режиме ($E_0=0.1$) модуляция выходной интенсивности близка к гармонической, её частота равна удвоенной частоте модуляции. Это следует из того факта, что симметричные сдвиги лазерной частоты в обе стороны от резонанса вызывают одинаковые изменения линейного поглощения. Для анализа динамики были построены временные развертки интенсивности, поляризации и разности заселенностей, спектры Фурье, фазовые портреты и их проекции и исследованы показатели Ляпунова.

Таблица 1

Показатели Ляпунова, где ω_1 – частота модуляции, E_0 – интенсивность

$\omega_1 \backslash E_0$	3	5	7	10	12	15
1	0.530469	0.251793	0.171177	0.090415	0.062979	0.038772
5	0.546321	0.244936	0.150479	0.091593	0.066211	0.041972
10	0.506892	0.238470	0.139646	0.094174	0.071978	0.051082
15	0.373298	0.253538	0.166972	0.098960	0.078831	0.052674
20	0.430158	0.272392	0.192071	0.107968	0.078107	0.054230
25	0.651440	0.335685	0.202768	0.103008	0.071844	0.046150
30	0.581545	0.313063	0.183060	0.091672	0.059483	0.034717
35	0.636257	0.268355	0.147857	0.080421	0.057828	0.039048
40	0.490148	0.212101	0.136108	0.085561	0.067299	0.048284
45	0.424298	0.204216	0.162682	0.098198	0.075659	0.049123
50	0.581561	0.316797	0.196274	0.116267	0.080862	0.047243

**ДИНАМИКА КОНСЕРВАТИВНО СВЯЗАННЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ ЭНО
ПРИ ИЗМЕНЕНИИ УРОВНЯ ДИССИПАЦИИ**

Савин Д.В., аспирант факультета нелинейных процессов СГУ

Изучение связанных нелинейных систем, как диссипативных, так и консервативных, является одним из важнейших направлений нелинейной динамики. Кроме того, известно, что системы с малым уровнем диссипации могут демонстрировать достаточно интересную динамику. Целью настоящей работы является исследование феноменов, возникающих при продвижении системы консервативно связанных двумерных отображений от диссипативного случая к консервативному пределу. В качестве моделей для исследования выбраны связанные отображения Эно. При этом, поскольку нас интересует приближение системы к консервативной, связь следует выбирать таким образом, чтобы она не вносила в систему дополнительной диссипации. Этому условию удовлетворяет, например, система

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \lambda_1 - x_n^2 - by_n + \varepsilon(x_n - u_n), y_{n+1} = x_n, \\ u_{n+1} &= \lambda_2 - u_n^2 - bv_n + \varepsilon(u_n - x_n), v_{n+1} = u_n. \end{aligned} \quad (1)$$

Якобиан системы равен b^2 , таким образом, система (1) консервативна, если консервативны обе составляющих её подсистемы.

Карты, иллюстрирующие устройство плоскости параметров (λ_1, λ_2) , отвечающих за удвоения периода в подсистемах, приведены на рис. 1. Для случая $b=0$, когда система (1) представляет собой систему связанных логистических отображений, подробное исследование указанной плоскости параметров было проведено в [1]. В зависимости от соотношения управляющих параметров подсистем наблюдаются два основных сценария перехода к хаосу: через каскад удвоений периода вдали от главной диагонали плоскости параметров (λ_1, λ_2) (буква F на рис. 1 а) и переход через разрушение квазипериодических движений (область вблизи диагонали, буква Q на рис. 1 а). На границе области существования квазипериодических движений существуют концевые точки фейгенбаумовской линии, соответствующие так называемому С-типу критичности [1]. Можно видеть, что уменьшение диссипации ведёт к существенному изменению описанных бифуркационных сценариев (ср. рис. 1, а и рис. 1, б). Область квазипериодических движений становится достаточно тонкой, в то же время расширяясь в области существенно неравных λ_1 и λ_2 . Линия же перехода к хаосу через каскад бифуркаций удвоения периода претерпевает разрывы. Таким образом, переход к хаосу становится двухпараметрическим, а фейгенбаумовская линия разделяется на три фрагмента. Схема их взаимного расположения приведена на рис. 2. При этом механизм возникновения разрывов раз-

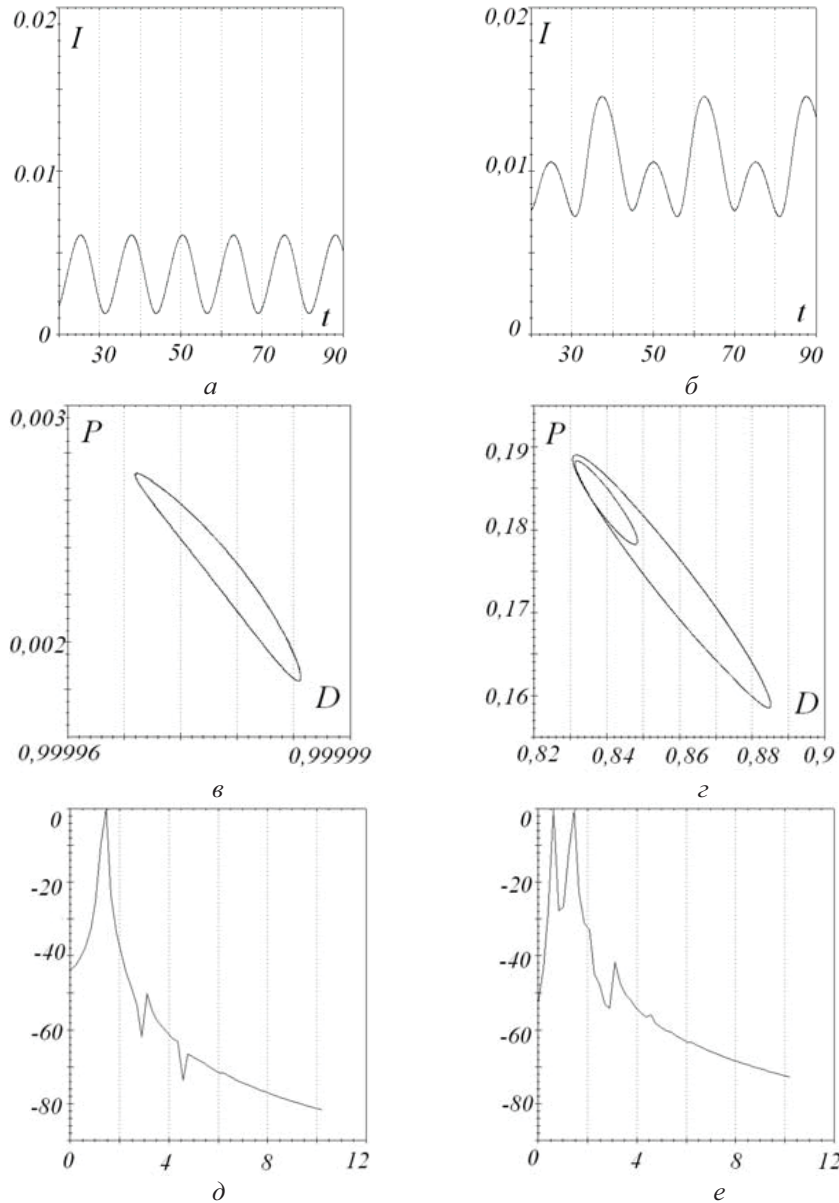


Рис. 1. $E_0=0.1$ (слева), $E_0=5$ (справа): а, б – график интенсивности; в, з – проекция фазового портрета P/D ; д, е – спектр Фурье

ричном случае. Видно, что на линии бифуркации Неймарка-Сакера в автономных подсистемах ($J_1 = 1, J_2 = 1$) не опираются языки синхронизации.

Было обнаружено, что в области квазипериодических режимов вне языков синхронизации мультистабильность не наблюдается. На рис. 2, б приведена соответствующая ей карта показателей Ляпунова. Поскольку система четырёхмерная, она характеризуется четырьмя показателями Ляпунова, два из которых всегда отрицательны. На карте отмечены области, в которых два старших показателя отрицательны (т.е. наблюдается периодическая динамика), равен нулю один показатель (при этом аттрактор представляет собой предельный цикл), либо нулевыми сразу два показателя (т.е. в фазовом пространстве наблюдается двухчастотный тор). Области существования двухчастотного тора лежат вблизи диагонали плоскости и разделены узкой областью, в которой равен нулю только один показатель. При введении отстройки по параметру связи области существования двухчастотного тора сокращаются в размерах, расстояние между ними увеличивается (рис. 2, в). При дальнейшем увеличении δ существование двухчастотного тора наблюдаться перестаёт.

Работа поддержана АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы» (проект № 2.1.1./1738) Минобрнауки РФ и грантом Президента РФ для молодых ученых-кандидатов наук (МК-905.2010.2).

Библиографический список

1. Астахов В.В., Безручко Б.П., Ерастова Е.Н., Селезнёв Е.П.. ЖТФ, 1990, т. 60, вып. 10, С. 19 – 26.
2. Астахов В.В., Безручко Б.П., Гуляев Ю.В., Селезнёв Е.П.. Письма в ЖТФ, 1989, т. 15, вып. 3, С. 60 – 64.
3. Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е., Астахов В.В.. Нелинейная динамика хаотических и стохастических систем. Саратов. Из-во СГУ, 1999 г..
4. Безручко Б.П., Селезнёв Е.П.. Письма в ЖТФ, 1997, т. 23, №4, С. 40 – 46.
5. Поздняков М.В., Савин А.В.. Изв. ВУЗов «ПНД», т. 18, № 5, 2010, С. 45 – 54.
6. Кузнецов А.П., Поздняков М.В., Савин А.В.. III конференция молодых учёных «Нанoeлектроника, нанофотоника и нелинейная физика». Материалы конференции, Саратов. – Саратов: из-во ГосУНЦ «Колледж», 2008, С. 59.
7. Кузнецов А.П., Поздняков М.В., Савин А.В.. IV конференция молодых учёных «Нанoeлектроника, нанофотоника и нелинейная физика». Материалы конференции, г. Саратов. Саратов: из-во ГосУНЦ «Колледж», 2009, С. 82.
8. М.В. Поздняков. Нелинейные дни в Саратове для молодых – 2009: сборник материалов научной школы-конференции. Саратов, 16 – 18 ноября 2009. Саратов: ООО ИЦ «Наука», 2010. 160 с., С. 111 – 114.

Научный руководитель: Кузнецов А.П., д.ф.-м. н., в.н.с. СФ ИРЭ РАН.

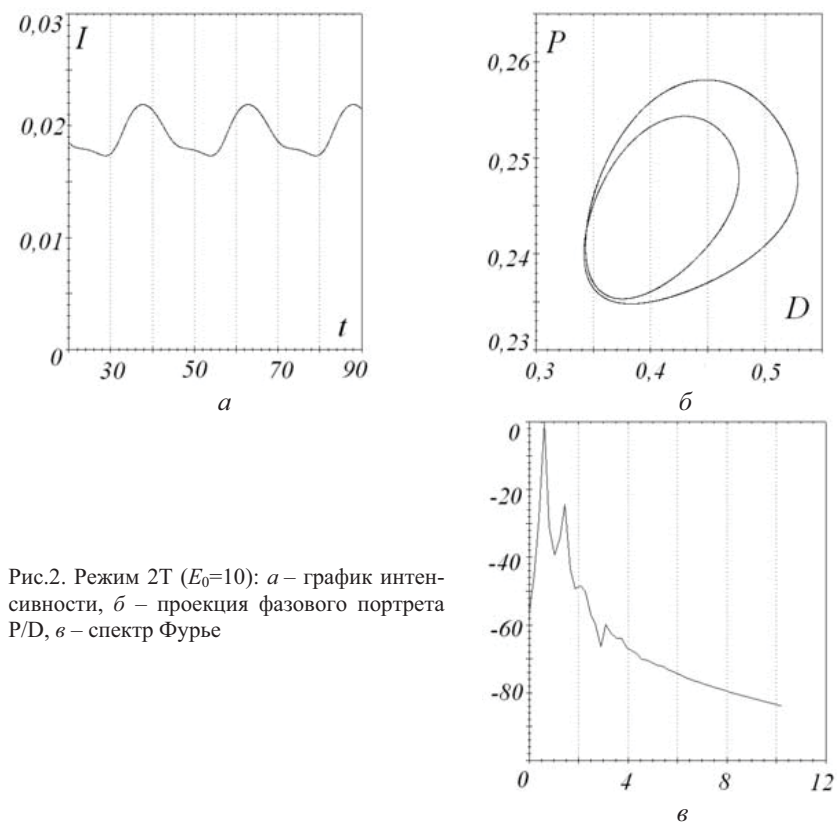


Рис.2. Режим 2Т ($E_0=10$): а – график интенсивности, б – проекция фазового портрета P/D, в – спектр Фурье

На фазовом портрете поляризации среды P и разности заселенностей D (рис. 1, в) и спектре мощности интенсивности выходного сигнала можно наблюдать режим периодических колебаний с частотой модуляции $1T$. На рис. 1, г и рис. 2, б мы можем наблюдать удвоение периода $2T$.

Для обнаружения нестационарных когерентных эффектов были рассчитаны показатели Ляпунова (Таблица 1) для разных типов усиливающих сред. Изменяемыми параметрами системы являлись частота модуляции сигнала и интенсивность. Значения, близкие к 1, означают, что система находится в нестационарном режиме и близка к переходу в хаотический режим.

Были исследованы: режимы слабого насыщения, вызываемого полем невысокой интенсивности ($E_0=0.1$) (рис. 1, а, в, д), когда эффекты резонансного самовоздействия пучка не возникают; среднего насыщения ($E_0=5$) (рис. 1, б, г, е), когда начинается проявление эффектов резонансного

самовоздействия; сильного насыщения ($E_0=10$) (рис. 2), когда эффекты резонансного самовоздействия весьма значительны.

В линейном режиме (рис. 1, а, $E_0=0.1$) модуляция выходной интенсивности близка к гармонической, её частота равна удвоенной частоте модуляции. Это следует из того факта, что симметричные сдвиги лазерной частоты в обе стороны от резонанса вызывают одинаковые изменения линейного поглощения. Размер пятна в этом случае не зависит от частотной модуляции, так как отсутствует наведенная линза. На фазовом портрете поляризации среды P и разности заселенностей D , а также на спектре мощности интенсивности выходного сигнала (рис. 1, б) можно наблюдать режим периодических колебаний с частотой модуляции $1/T$ и удвоение периода $2T$.

В режиме насыщения (рис. 1, б, з, е, $E_0=5$) полупериоды модуляции становятся неравными, так как наведенная линза является положительной при частоте выше атомного перехода и отрицательной при частоте ниже перехода.

Таким образом, были исследованы динамические характеристики резонансного самовоздействия. Было обнаружено, что при распространении частотно-модулированного лазерного пучка в резонансной среде с насыщением поглощения дисперсии возможен переход в хаотический режим, поскольку была обнаружена бифуркация режима $2T$. При этом возникает субгармоника, хорошо заметная и на фазовом портрете, и на спектре мощности (рис. 1, з), что свидетельствует о постепенном возрастающем влиянии эффектов резонансного самовоздействия лазерного пучка, приводящему к все большей хаотизации его поведения.

Библиографический список

1. Ханнин Я.И. Основы динамики лазеров / Я.И. Ханнин. М.: Наука, 1999. 368 с. (275 лет Российской академии наук). ISBN 5-02-014375-8:22.00.
2. Шен И.Р. Принципы нелинейной оптики / Шен И.Р.; пер. с англ. М.: Наука. 1989. 560с. (Y.R. Shen The principles of nonlinear optics / A Wiley-Interscience Publication, John Wiley&Sons, Inc. N.Y., 1984.
3. Пластун И.Л. Исследование влияния нестационарных когерентных эффектов и резонансного самовоздействия на характеристики лазерного пучка, модулированного по частоте / И.Л. Пластун, В.Л. Дербов // Компьютерная оптика. 2009. Т. 33, № 3. С. 233–239. ISSN 0134-2452.

Научный руководитель: Пластун И.Л., к.ф.-м. н., доцент кафедры ПВС СГТУ

друг от друга только одним из них, поэтому в области их перекрытия наблюдается сосуществование трёх аттракторов (рис. 1, б). При дальнейшем увеличении δ перекрытие листов перестаёт наблюдаться. На рис. 1, в приведена карта динамических режимов системы (1) при отстройке $\delta=0.1$. Видно, что язык синхронизации периода три представляет собой две отдельные области, причём теперь наблюдается только один лист мультистабильности, расположенный в одной из этих областей. В большей его части сосуществуют аттрактор периода три и квазипериодический аттрактор. При увеличении отстройки до $\delta=0.15$ мультистабильность практически исчезает.

Также было рассмотрено устройство плоскости (J_1, J_2) при значениях $S_1=S_2=0.2$. На рис. 2, а приведена карта динамических режимов в симмет-

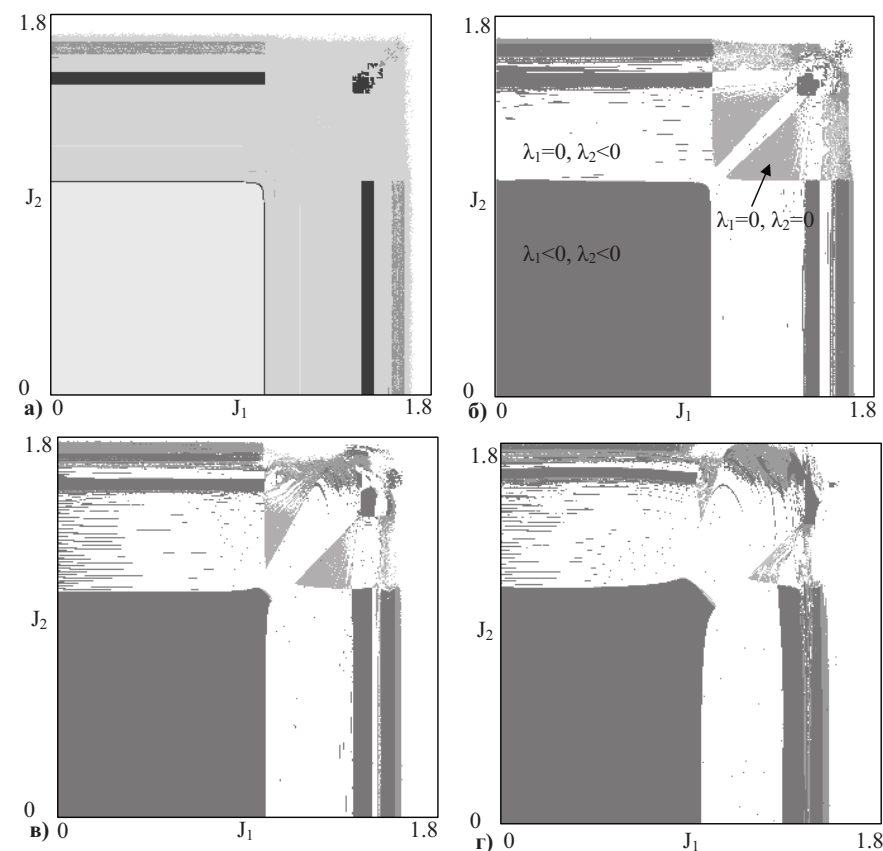


Рис. 2. Карта динамических режимов (а) и карты показателей Ляпунова (б, в, г) системы (1) при $S_1=0.2$, $S_2=0.2$, $\varepsilon = 0.01$ и а,б) $\delta=0$, в), $\delta=0.02$; г) $\delta=0.04$

На рис. 1, а приведена карта мультистабильности системы (1) в случае симметричной связи, построенная при значениях параметров S_1, S_2 , отвечающих языку синхронизации периода три. Цифрами на карте отмечено количество аттракторов, сосуществующих в областях, обозначенных различными оттенками серого. Видно, что область мультистабильности располагается вдоль диагонали плоскости и симметрична относительно неё. В ней наблюдается сосуществование трёх аттракторов периода три. При введении отстройки связи эта область перестаёт быть симметричной относительно диагонали, теперь видно, что она состоит из двух листов, в каждом из которых сосуществуют два аттрактора. При этом листы отличаются

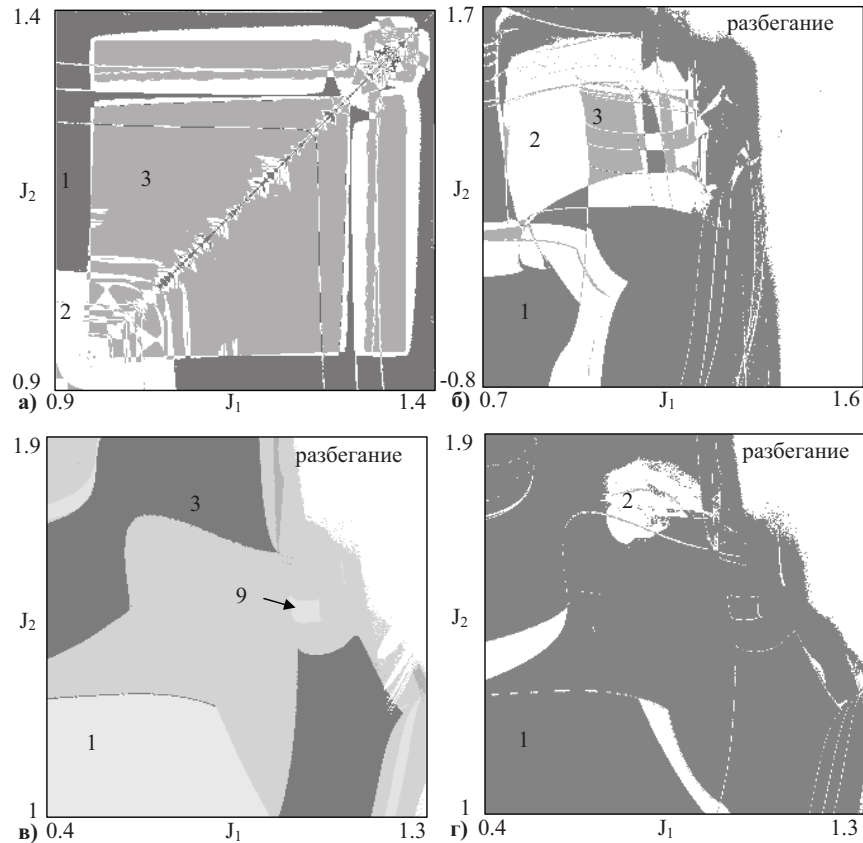


Рис. 1. Карты мультистабильности (а,б, г) и карта динамических режимов (в) системы (1) при $S_1=-1, S_2=-1, \varepsilon = 0.01$ и а) $\delta=0$, б), $\delta=0.05$; в,г) $\delta=0.1$. Цифрами на картах мультистабильности обозначено количество сосуществующих аттракторов в соответствующих областях, на карте динамических режимов – период аттракторов

ХАОТИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ И АВТОСОЛИТОНЫ В КОЛЬЦЕВОЙ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЕ С НЕЛИНЕЙНОЙ ЛИНИЕЙ ЗАДЕРЖКИ НА МАГНИТОСТАТИЧЕСКИХ ВОЛНАХ

Романенко Д.В., аспирант ФНП СГУ

В последние годы определённый интерес вызывают исследования, направленные на выяснение особенностей генерации хаотических колебаний и солитонов в кольцевых системах, где в качестве нелинейных элементов используются линии передачи на основе ферромагнитных плёнок. Подобные системы имеют низкую пороговую мощность. Ещё одним достоинством вышеуказанных систем является тот факт, что активный элемент кольца – усилитель может работать в линейном режиме [1,2].

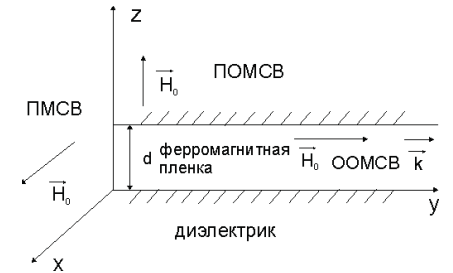


Рис. 1 Схематическое изображение линии задержки

Целью данной работы является построение модели для исследования механизмов возникновения модуляционной неустойчивости и солитоноподобных импульсов в активной кольцевой системе на основе ферромагнитной плёнки для различных типов волн.

Анализ кольцевой системы проводился при возбуждении в плёнке двух типов магнитоэлектрических волн (МСВ): поверхностных МСВ (ПМСВ) и обратных объёмных МСВ (ООМСВ). Схематическое изображение линии задержки на МСВ, при возбуждении в последней различных типов МСВ представлено на рис. 1

В общем случае поведение ВЧ намагниченности можно описать уравнением Гинзбурга–Ландау третьего порядка (УГЛЗ) [3]:

$$i \left(\frac{\partial A}{\partial t} + V_g \frac{\partial A}{\partial y} \right) + (\beta_r + \beta_i) \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + (\gamma_r + \gamma_i) |A|^2 A = -i\delta A, \quad (1)$$

где A – нормированная амплитуда ВЧ намагниченности, V_g – групповая скорость, δ – параметр линейных потерь, $\beta_r, \beta_i, \gamma_r, \gamma_i$ – коэффициенты отвечающие за дисперсию, ВЧ диссипацию, нелинейный сдвиг фазы и нелинейные потери соответственно.

При получении модели линии задержки на МСВ в виде (1) параметры системы рассматривались вблизи рабочей точки (ω_0, k_0) .

Известно, что решение уравнения (1) является модуляционно неустойчивым при выполнении критерия Лайтхилла [3]:

$$\beta_r \gamma_r + \beta_i \gamma_i > 0 \quad (2)$$

Анализ коэффициентов уравнения (1) показал, что критерий (2) будет выполняться для ООМСВ и не будет выполняться для ПМСВ. Следует отметить, что при построение модели системы было сделано допущение малой величины затухания МСВ $\alpha \ll 1$. Последнее обстоятельство немного упрощает критерий наличия модуляционной неустойчивости: $\beta_r \gamma_r > 0$

Амплитуда стационарных волн и структур, образованных в системе будет определяться не только параметрами линии задержки, но и структурой и параметрами цепи обратной связи:

$$A(0, t) = A_0 + \rho e^{i\psi} A(L, t) \quad (3)$$

где A_0 – амплитуда входного сигнала, ρ – комплексный коэффициент обратной связи, ψ – суммарный сдвиг фазы в кольцевой системе, L – длина линии задержки.

Наличие в системе обратной связи может при отсутствии модуляционной неустойчивости в ферромагнитной плёнке привести исследуемую систему к хаотической динамике. Однако сценарий перехода системы от одночастотного режима к хаотическому будет определяться не только величиной обратной связи, но и наличием или отсутствием неустойчивости в самой среде.

В случае возбуждения в плёнке ПМСВ (отсутствие неустойчивости в среде) при малой амплитуде входного сигнала происходит установление колебаний постоянной амплитуды, при увеличении амплитуды входного сигнала сначала возникает автомодуляция и затем следует каскад бифуркаций удвоения периода автомодуляции. Следовательно основным сценарием перехода к хаотической автомодуляции при возбуждении ПМСВ является сценарий Фейгенбаума.

В случае возбуждения в плёнке ПМСВ (неустойчивость в среде) возможно два характерных сценария:

1) В случае слабой обратной связи при малой амплитуде входного сигнала происходит установление колебаний постоянной амплитуды, при увеличении амплитуды входного сигнала сначала возникает автомодуляция, а при дальнейшем увеличении модуляция сигнала становится вначале квазипериодической, а затем хаотической. Таким образом при слабой обратной связи переход к хаотической динамики происходит через разрушение квазипериодического движения.

2) В случае сильной обратной связи при малой амплитуде входного сигнала происходит установление колебаний постоянной амплитуды, при увеличении амплитуды входного сигнала возникает автомодуляция. По мере дальнейшего увеличения амплитуды входного сигнала в выход-

УСТРОЙСТВО ПРОСТРАНСТВА ПАРАМЕТРОВ НЕСИММЕТРИЧНО СВЯЗАННЫХ УНИВЕРСАЛЬНЫХ ДВУМЕРНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Поздняков М.В., аспирант ФНП СГУ

В последнее время в нелинейной динамике популярно исследование связанных систем. В таких системах может наблюдаться фазовая мультистабильность, связанная с возможностью синхронизации подсистем в различных фазах и заключающаяся в сосуществовании синхронных и несинхронных аттракторов при одних и тех же значениях параметров. Однако большая часть работ посвящена исследованию динамики в симметрично связанных системах, например [1–4]. В работах [5,7] было исследовано влияние отстройки связи от симметричной на мультистабильность в системе связанных логистических отображений и в связанных системах Рёсслера. В [8] рассмотрена система несимметрично связанных универсальных двумерных отображений:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f(x_n, y_n) + (\varepsilon - \delta)(f(u_n, v_n) - f(x_n, y_n)), \\ y_{n+1} &= g(x_n, y_n) + (\varepsilon - \delta)(g(u_n, v_n) - g(x_n, y_n)), \\ u_{n+1} &= f(u_n, v_n) + (\varepsilon + \delta)(f(x_n, y_n) - f(u_n, v_n)), \\ v_{n+1} &= g(u_n, v_n) + (\varepsilon + \delta)(g(x_n, y_n) - g(u_n, v_n)), \end{aligned} \quad (1)$$

где $f(x, y) = Sx - y - (x^2 + y^2)$, $g(x, y) = Jx - (x^2 + y^2)/5$, а параметры ε и δ имеют смысл амплитуды симметричной связи и отстройки по параметру связи. Такое отображение интересно тем, что для автономных систем параметры S и J представляют собой непосредственно след и определитель матрицы Якоби, что делает возможным непосредственное наблюдение области устойчивости неподвижной точки на плоскости параметров. Кроме того, в такой системе возможно наблюдение не только каскада бифуркаций удвоений периода, но и бифуркации Неймарка–Сакера.

Было показано, что плоскость параметров (S_1, S_2) при $J_1 = J_2 = -1$ устроена аналогично плоскости управляющих параметров системы связанных логистических отображений и связанных системах Рёсслера, которые также демонстрируют переход к хаосу через последовательность удвоений периода. Обнаружено, что её эволюция при введении отстройки по параметру связи и постоянном значении амплитуды происходит так же, как и в ранее рассмотренных системах, а именно с ростом δ наблюдается сокращение числа возможных сосуществующих аттракторов, площади областей мультистабильности и её дальнейшее исчезновение. Целью данной работы было более подробное изучение устройства плоскости (J_1, J_2) в области квазипериодических режимов.

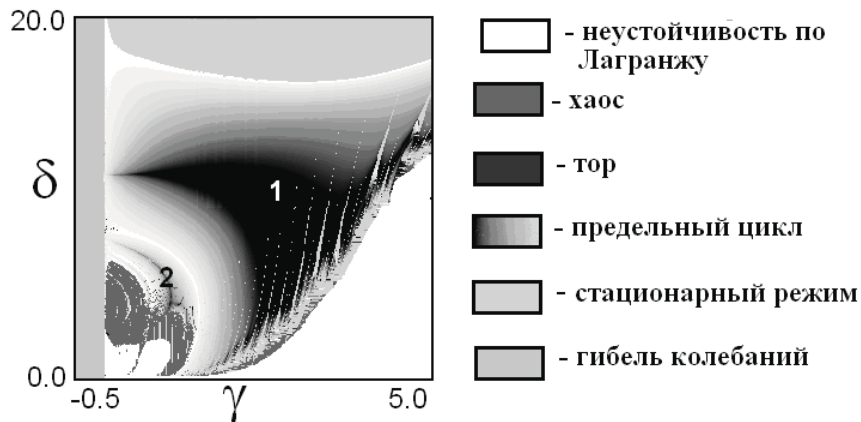


Рис. 2. Карта ляпуновских показателей для системы (*) при $\beta = 9.0$, $C = C_1 = 28960$. Оттенки серого от более темного до более светлого тонов отвечают уменьшению модуля отрицательного старшего ляпуновского показателя. Цифрами указаны периоды циклов

«усиление–отстройка от резонанса», дающая представление об устройстве плоскости параметров.

Работа поддержана грантом РФФИ (проект 11-02-00057) и грантом Президента РФ (проект МК-905.2010.2)..

Библиографический список

1. Рабинович М. И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. М: Наука. 1984.
2. Рыскин Н.М., Трубецков Д.И. Нелинейные волны. М.: Наука-Физматлит, 2000.
3. Hagerstrom A.M., Tong W., Wu M. etc. Excitation of chaotic spin waves in magnetic film feedback rings through three-wave nonlinear interactions // Phys. Rev. Lett. 102, 2009, P. 207202.
4. Кондрашов А.В., Устинов А.Б., Калинин Б.А. Управляемая генерация хаотического СВЧ-сигнала в условиях четырехволнового параметрического взаимодействия поверхностных спиновых волн. // Письма в ЖТФ, Т.36, вып.5, 2010, С.62-70.
5. Демидов Е.В., Ковшиков Н.Г. Механизм возникновения и стохастизации автомодуляции интенсивных спиновых волн // ЖТФ, Т.69, вып. 8, 1999, С.100-103.
6. Кузнецов С.П. Динамический хаос. М.: Наука. 2001.

Научные руководители: Исаева О.Б., к.ф.-м., Гришин С.В., к.ф.-м. н.

ном сигнале появляются участки с нерегулярной динамикой – турбулентные фазы. Длительность турбулентных фаз с увеличением амплитуды входного сигнала увеличивается, и начиная с некоторого значения ламинарные фазы исчезают и наблюдается хаотическая автомодуляция. Для описанного выше случая переход к хаотической автомодуляции идёт через перемежаемость.

В случае подачи на вход системы импульсного сигнала параметры должны подбираться таким образом, чтобы усиление в цепи обратной связи компенсировало потери при распространении МСВ в плёнке. Структура и задержка в цепи обратной связи в данном случае не имеют значение, так как длительность формирующихся в системе импульсов меньше времени распространения импульса в линии задержки. Таким образом, возможность формирования тех или иных импульсов или структур зависит только от параметров ферромагнитной плёнки.

В случае возбуждения ООМСВ возможно формирование так называемых светлых солитонов. Образующиеся импульсы точнее называть автосолитонами, так как в системе присутствуют потери, и условие формирования в первую очередь определяется балансом притока и оттока энергии, а не дисперсионными свойствами системы.

Для наблюдения образования автосолитонов на вход системы подавались одиночные импульсы различной формы и ширины. На рис. 2 приведена типичная зависимость распределения модуля амплитуды сигнала от пространственной координаты, а также соответствующее ему распределение фазы.

Критерием образования солитона или автосолитона может служить тот факт, что на ширине импульса фаза остаётся приблизительно одинаковой. На рис. 3 представлены значения пороговых амплитуд образования автосолитонов полученные численно и аналитически [4] в зависимости от ширины входного импульса.

В случае возбуждения ПМСВ (критерий Лайтхилла не выполняется) возможно формирование чёрных (сдвиг фазы на π) или тёмных солитонов (сдвиг фазы меньше π). В качестве входного сигнала использовался

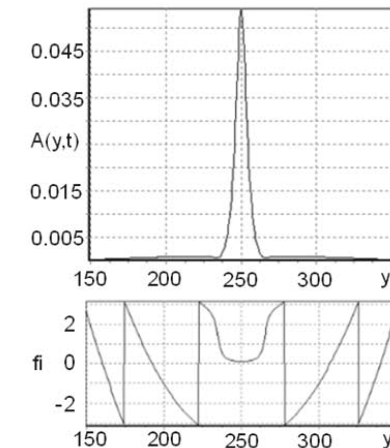


Рис. 2. Пространственное распределение модуля амплитуды сигнала (сверху) и фазы (снизу) при ширине входного импульса $\Delta X = 20$ и амплитуде $A_0 = 0.06$

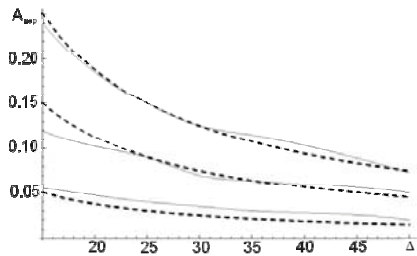


Рис. 3. Пороговые амплитуды образования автосолионов полученные численно (сплошные кривые) и аналитически (пунктирные кривые) [4] в зависимости от ширины входного импульса

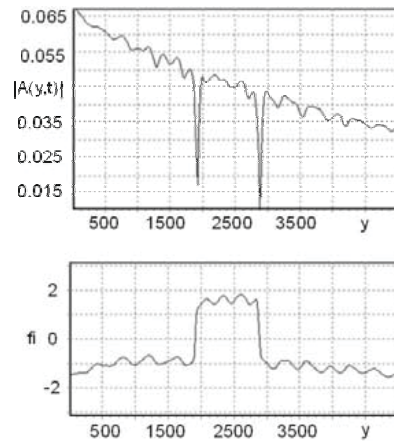


Рис. 4. Пространственное распределение модуля амплитуды сигнала (сверху) и фазы (снизу) при входной амплитуде $A_0 = 0.065$

сигнал с постоянной амплитудой с резким скачком фазы сигнала. На рис. 4 приведена типичная зависимость распределения модуля амплитуды сигнала от пространственной координаты, а также соответствующее ему распределение фазы в случае формирования тёмного солитона.

В заключение следует отметить, что приведенные численные результаты характерны не только для систем на основе ферромагнитных плёнок, в частности подобные результаты образования автосолионов были получены в оптике.

Работа поддержана грантом РФФИ, проект № 11-02-00057

Библиографический список

1. Калинико́с Б.А., Ковшиков Н.Г., Косты́лёв М.П., Беннер Х. Автогенерация последовательностей солитонов огибающей спиновых волн с различными периодами // Письма в ЖЭТФ. 2002, Т. 76, № 5, С. 310–315.
2. Бегинин Е.Н., Гришин С.В., Шараевский Ю.П. Генерация стационарной последовательности хаотических солитоноподобных СВЧ импульсов в кольцевых автоколебательных системах с ферромагнитными плёнками // Письма в ЖЭТФ. 2008, Т. 88, № 10, С. 743–747.
3. Ахмедиев Н.Н., Анкевич А. Диссипативные солитоны// перевод под ред. Н.Н. Розановой. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. С. 504.
4. Звездин А.К., Попков А.Ф. К нелинейной теории магнитоэлектрических волн // ЖЭТФ. 1983. Т. 84, № 2. С. 606–615.

Научный руководитель: Шараевский Ю.П., профессор, д.ф.-м. н.

стационарному режиму и накачки и возбуждаемых компонент.) Одно из собственных чисел этой точки действительное, отвечает сходимости по одному из собственных направлений. Два других – комплексно-сопряжённые. Можно аналитически найти границу устойчивости по этим направлениям, соответствующую бифуркации Андронова-Хопфа, в результате которой рождается предельный цикл. На базе него, как показал более подробный численный анализ, могут происходить удвоения периода и переход к хаосу в соответствии со сценарием Фейгенбаума.

На рис. 1 приведены характерные фазовые портреты системы (5), демонстрирующие переход к хаосу в результате каскада удвоений. На рис. 2 представлена карта ляпуновских показателей [6] на плоскости

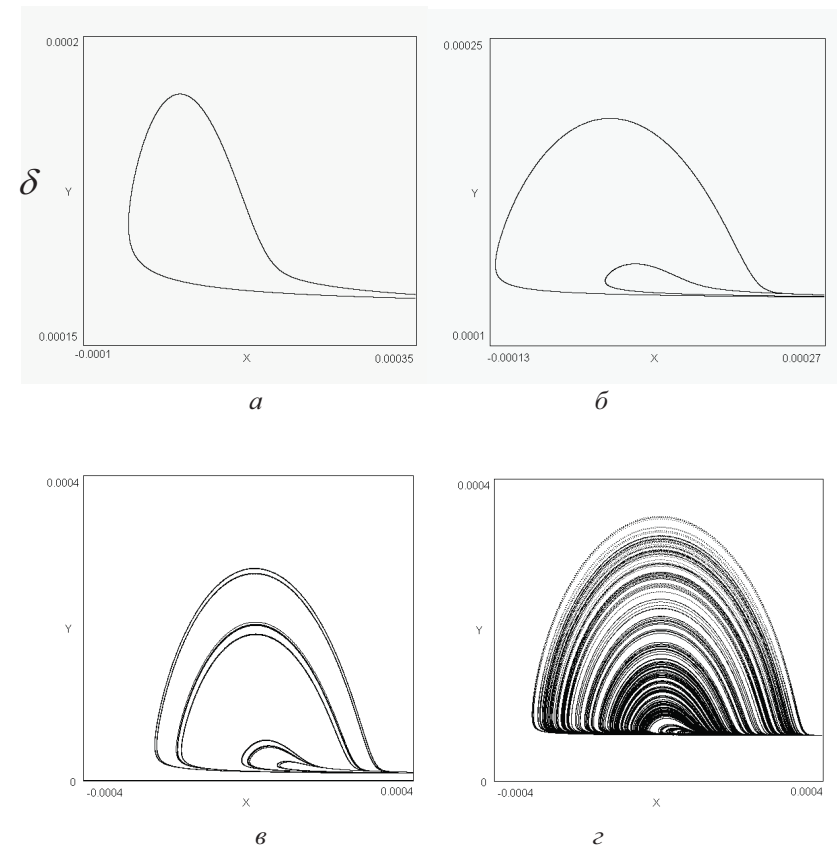


Рис. 1. Фазовые портреты системы (5) при $\delta = 9.0$ (а), 7.0 (б), 6.0 (в), 4.0 (г). Остальные параметры фиксированы: $\gamma = 0.5$, $\beta = 9.0$, $C = C_1 = 28960$.

ДИНАМИКА РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЩЕЛЕВЫХ СОЛИТОНОВ В ДВУМЕРНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ БРЭГГОВСКОЙ РЕШЕТКЕ

Садовников А.В., аспирант ФНП СГУ

$$\dot{a}_1 = \sigma_1 a_2^* a_3 e^{j\delta t} - \beta a_1, \quad \dot{a}_2 = \sigma_2 a_1^* a_3 e^{j\delta t} - \beta a_2, \quad \dot{a}_3 = -\sigma_3 a_1 a_2 e^{-j\delta t} + \gamma a_3, \quad (4)$$

где β – параметр затухания, γ – параметр усиления, $\delta = \omega_3 - (\omega_1 + \omega_2)$ – частотная отстройка от синхронизма. Такая динамическая система не допускает аналитического решения и требует численного исследования.

Рассмотрим частный случай, подразумевающий двух-волновую динамику ($\omega_1 = \omega_2 = \omega, \omega_3 = 2\omega, a_1 = a_2$). Замена переменных данная модификация модели (4) может быть сведена к системе всего лишь 3-х дифференциальных уравнений с действительными переменными [5]:

$$\begin{aligned} \dot{X} &= -CZ + \gamma X - \delta Y + 2|C_1|Y^2, & \dot{Y} &= \gamma Y + \delta X - 2|C_1|XY, \\ \dot{Z} &= 2Z(|C_1|X - \beta), \end{aligned} \quad (5)$$

где переменная $Z = |a_1|^2 = |a_2|^2$ отвечает за интенсивность возбуждаемых волн, $X = \text{Re}[a_3 \exp(i\delta t)]$ и $Y = \text{Im}[a_3 \exp(i\delta t)]$ соответствуют накачке.

Цель данной работы – провести исследование модели (5) с привлечением методов теории динамических систем [6] на предмет нахождения различных динамических режимов, анализа приводящих к ним бифуркаций и описания устройства пространства параметров. Для начала, сделаем простой аналитический бифуркационный анализ. Система (5) является диссипативной при условии, что усиление не полностью компенсируется диссипацией $\gamma < \beta$. Именно в диссипативном случае у системы могут существовать притягивающие инвариантные множества в фазовом пространстве, то есть возможны устойчивые динамические режимы поведения. Если усиление превышает диссипацию, то решения системы будут неограниченно возрастать.

Имеются две неподвижные точки в фазовом пространстве:

1) Тривиальное положение равновесия в начале координат $X = Y = Z = 0$, собственные числа матрицы Якоби которых равны $\lambda_1 = -2\beta, \lambda_{2,3} = \gamma \pm i\delta$. Имеем одно вещественное число и два комплексно сопряженных. По сигнатуре их действительной части делаем вывод об устойчивости. Если имеет место диссипация ($\beta > 0$), точка является седло-фокусом с одним сильно устойчивым направлением и двумя неустойчивыми при $\gamma > 0$ или устойчивая неподвижная точка при $\gamma < 0$. В последнем случае в системе будет реализовываться режим «гибели» колебаний. Значения динамических переменных (амплитуды всех волн) стремятся к нулю, что очевидно при отсутствии усиления.

2) Вторая неподвижная точка располагается при $X = \beta/|C_1|$, $Y = \frac{\beta\delta}{(2\beta - \gamma)|C_1|}$, $Z = \frac{\beta\gamma((2\beta - \gamma)^2 + \delta^2)}{C(2\beta - \gamma)^2|C_1|}$. (Эта ситуация отвечает

Нелинейные периодические диэлектрические системы находят широкое применение сегодня в таких оптических устройствах, как перестраиваемые и фиксированные узкополосные фильтры, компенсаторы дисперсии, частотно-селективные ответвители и устройства вывода света из волокна, системы чисто оптической связи и обработки сигналов [1-3].

Процессы распространения электромагнитного излучения в периодических электродинамических структурах рассматриваемого типа хорошо изучены для сигналов, частота которых лежит вдали от границы полосы непропускания [4]. Целью настоящей работы являлось изучение влияния нелинейности на процесс волновой динамики в двумерной нелинейной брэгговской решетке в случае, когда частота входного сигнала расположена вблизи границы полосы непропускания системы. Особый интерес представляет анализ данной задачи путем численного решения системы уравнений Максвелла, поскольку лишь в этом случае удастся проследить в полной мере динамику распространения электромагнитного поля в изучаемой структуре.

Хорошо известно, что в периодических диэлектрических структурах есть полосы пропускания и непропускания. В то же время, известно, что нелинейность в таких системах может приводить к сдвигу критических частот, в результате чего возможно нелинейное туннелирование, т.е. распространение сигнала в виде солитоноподобного импульса [5]. Однако, как было показано в [6] путем аналитического и численного анализа нелинейного уравнения Шрёдингера, при этом развивается модуляционная неустойчивость, которая приводит к тому, что туннелирующая волна разбивается на последовательность щелевых солитонов [7]. Данные эффекты обуславливают большой интерес для изучения аналогичных явлений в брэгговских структурах, широко используемых в оптике.

В данной работе исследуется изображенная на рис. 1 плоская двумерная система, представляющая собой брэгговскую решетку, ограниченную в поперечном направлении.

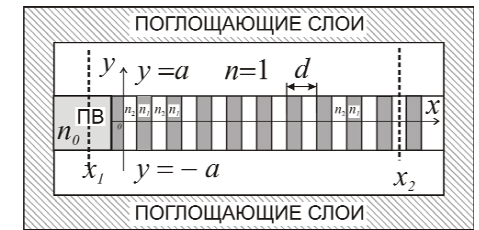


Рис. 1. Схема периодической нелинейной системы, образованной из чередующихся слоев диэлектрика. ПВ – подводящий волновод

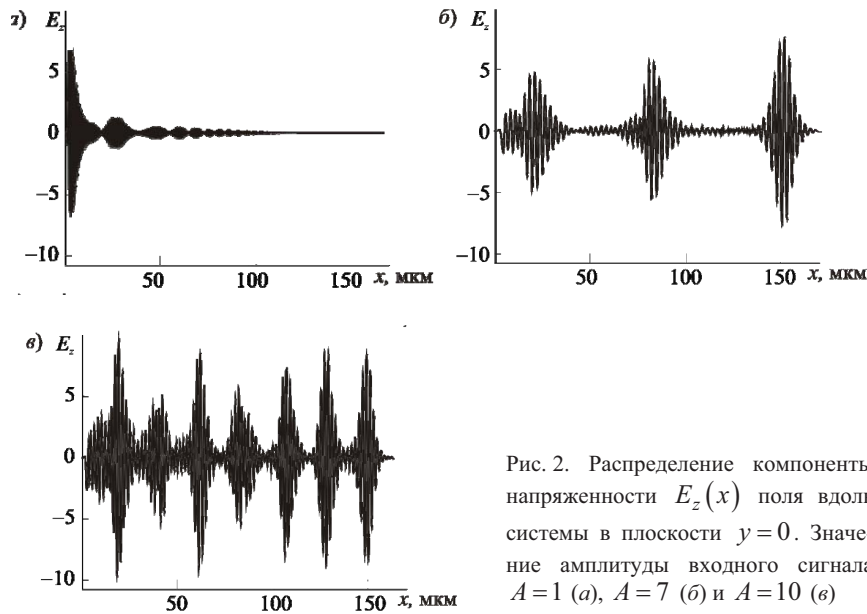


Рис. 2. Распределение компоненты напряженности $E_z(x)$ поля вдоль системы в плоскости $y=0$. Значение амплитуды входного сигнала $A=1$ (а), $A=7$ (б) и $A=10$ (в)

Численное моделирование данной системы осуществляется методом конечных разностей во временной области (FDTD) [8] с помощью программного пакета MEEP [9,9], разработанного в Массачусетском технологическом институте (MIT). Поскольку рассматриваемая система является открытой, граничные условия в численном эксперименте устанавливаются в виде идеально согласованных (поглощающих) слоев, на рис. 1 они окружают расчетную область и обозначены штриховкой. Входной сигнал задается в области подводящего волновода (обозначение «ПВ» на рис. 1), в плоскости x_1 .

Для изучения эффектов влияния нелинейности структуры на волновую динамику вблизи зон непрозрачности в плоскости x_1 (см. рис. 1) задавался входной сигнал постоянной частоты и амплитуды. Частота входного сигнала выбиралась в полосе непропускания линейной периодической системы вблизи высокочастотной границы полосы. Была проведена серия расчетов процесса распространения такого сигнала в зависимости от его амплитуды. Результаты этого моделирования показаны на рис. 2. Здесь изображено распределение компоненты напряженности электромагнитного поля E_z вдоль системы на ее оси (в плоскости $y=0$) при различных значениях амплитуды входного сигнала. В случае, когда амплитуда мала ($A=1$, рис. 2, а), наблюдается затухание сигнала вдоль системы, как это

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ – ПРИБЛИЖЕННЫХ МОДЕЛЕЙ РЕЗОНАНСНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ВОЛН В СЛАБОНЕЛИНЕЙНОЙ СРЕДЕ С ДИСПЕРСИЕЙ

Обычев М.А., студент 3 курса ФНП СГУ

В теории волн известна модель параметрического взаимодействия трех волн [1,2]:

$$\frac{da_1}{dt} + v_1 \frac{da_1}{dx} = \sigma_1 a_2^* a_3, \quad \frac{da_2}{dt} - v_2 \frac{da_2}{dx} = \sigma_2 a_1^* a_3, \quad \frac{da_3}{dt} + v_3 \frac{da_3}{dx} = -\sigma_3 a_1 a_2, \quad (1)$$

частоты и волновые числа которых подчиняются условиям резонанса

$$\omega_1 + \omega_2 = \omega_3, \quad k_1 + k_2 = k_3 \quad (2)$$

Волновые уравнения (1) записаны для медленных комплексных амплитуд a_1 , a_2 и a_3 волновых компонент с соответствующими частотами и волновыми числами. Подобные волны могут возбуждаться в слабо нелинейных средах с дисперсией и пригодны для описания широкого круга явлений в оптических средах, в плазме и др. [1,2]. Особое внимание привлекает возможность применения этой модели в исследованиях колебательных и волновых процессов в магнитных материалах (в частности в ферромагнитных пленках), которые в последнее время стали одним из важнейших направлений физики твердого тела [3–5].

Модель трех-волнового взаимодействия (1) в случае пространственно однородных волн сводится к уравнениям

$$\dot{a}_1 = \sigma_1 a_2^* a_3, \quad \dot{a}_2 = \sigma_2 a_1^* a_3, \quad \dot{a}_3 = -\sigma_3 a_1 a_2 \quad (3)$$

и представляет собой 6-мерную потоковую динамическую систему. Эти уравнения допускают аналитическое решение [2]. Динамика этой системы представляет собой эстафетную перекачку энергии между компонентами a_3 и a_1 , a_2 с их поочередным усилением. Волну с комплексной амплитудой a_3 можно рассматривать как накачку, возбуждающую волны a_1 и a_2 , которые затем передают энергию обратно.

Более приближенной к реальности моделью является модификация системы (3) при учете диссипации энергии и слабой отстройки от синхронизма (2). Будем считать, что затухание происходит для возбуждаемых волн a_1 , и a_2 . Для возможности компенсации этого затухания введем усиление волны накачки a_3 . В итоге модифицированная модель будет выглядеть как

На рис. 2 представлены результаты численного моделирования – два изображения плоскости параметра C для исследуемой системы при разных значениях характеристик нелинейной среды, выполненных в техниках карт динамических режимов [6] и карт времени убегания траекторий на бесконечность [1]. Окрашенные однородным серым цветом области отвечают периодической динамике отображения (периоды циклов указаны цифрами). Градиентно, оттенками серого цвета обозначена область, соответствующая убеганию траекторий на бесконечность. На картах наблюдается «почти идеальное» множество Мандельброта, которое искажается при изменении параметров нелинейной среды. На фрагментах в правой части рисунка представлены изображения фазовой плоскости переменной Z_n для значений параметров, указанных стрелками. Однородным серым цветом окрашены бассейны притяжения неподвижной точки, а оттенками серого области убегания на бесконечность. Видно, что бассейны притяжения фрактальны и напоминают по своей форме множества Жюлиа.

Дальнейшая наша задача состоит в том, чтобы изучить влияние параметров на степень «схожести» карты режимов с классическим множеством Мандельброта и, таким образом, научиться «управлять» «степенью аналитичности» системы. На первый взгляд, кажется, что отображение будет приближенно-аналитическим при $\alpha_2 \gg \alpha_1$ и $\beta_1 \gg \beta_2$.

Работа поддержана грантом РФФИ (проект 11-02-00057) и грантом Президента РФ (проект МК-905.2010.2).

Библиографический список

1. *Пайтген Х.-О., Рихтер П.Х.* Красота фракталов. Образы комплексных динамических систем. М.: Мир. 1993.
2. *Шредер М.* Фракталы, хаос, степенные законы. Миниатюры из бесконечного рая. Ижевск: «РХД», 2001.
3. *Ikeda K., Daido H., Akimoto O.* Optical turbulence: chaotic behavior of transmitted light from a ring cavity. // *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 45, 1980, p. 709.
4. *Рабинович М. И., Трубецков Д.И.* Введение в теорию колебаний и волн. М: Наука. 1984.
5. *Рыскин Н.М., Трубецков Д.И.* Нелинейные волны. М.: Наука–Физматлит, 2000.
6. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос. М.: Наука. 2001.

Научный руководитель: Исаева О.Б., к.ф.-м. н., доцент ФНП СГУ.

должно происходить в линейном случае. Однако при увеличении амплитуды наблюдается принципиально иное поведение, а именно, туннелирование сигнала, вызванное сдвигом критической частоты ($A=7$, рис. 2, б), при дальнейшем увеличении амплитуды входного сигнала расстояние между туннелирующими импульсами уменьшается ($A=10$, рис. 2, в), а групповая скорость волновых пакетов, распространяющихся в системе, увеличивается.

Таким образом, в данной работе численном эксперименте было изучено влияние керровской нелинейности на распространение электромагнитных волн в решетке. Было обнаружено, что нелинейная зависимость показателя преломления от интенсивности волны приводит к сдвигу критической частоты периодической структуры в более низкочастотную область. В результате становится возможным распространение сигнала в полосе непрозрачности (нелинейное туннелирование), которое происходит в виде последовательности щелевых солитонов.

Работа поддержана грантом РФФИ, проект 10-02-01403-а и программой «Развитие научного потенциала высшей школы» (проект 2.1.1/1738).

Библиографический список

1. *Othonos A., Kalli K.* Fiber Bragg Gratings. London: Artech House. 1999.
2. *Kashyap R.* Fiber Bragg Gratings. Second edition. Academic Press. 2009.
3. *Erdogan T.* Fiber Grating Spectra // *Journal of Lightwave Technology*. 1997. V. 15. N. 8. P. 1277-1294.
4. *Eggleton B.J., De Sterke C.M.* Nonlinear pulse propagation in Bragg gratings // *J. Opt. Soc. Am. B*. 1997. V. 14. N. 11. P. 2980-2993.
5. *Newell A.C.* Nonlinear tunnelling // *J. Math. Phys.* 1978. V. 19. N. 5. P. 1126.
6. *Balyakin A.A., Ryskin N.M.* Modulation Instability in a Nonlinear Dispersive Medium Near Cut-Off Frequency // *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*. 2004. V. 7. N. 1. P. 34-42.
7. *Chen W., Mills D.L.* Gap solitons and the nonlinear optical response of superlattices // *Phys. Rev. Lett.* 1987. V. 58. P. 160-163.
8. *Taflove A., Hagness S.C.* Computational Electrodynamics: The Finite-Difference Time-Domain Method. Norwood, MA: Artech House. 2005.
9. *Oskooi A.F., Roundy D., Ibanescu M., Bermel P., Joannopoulos J.D., Johnson S.G.* MEEP: A flexible free-software package for electromagnetic simulations by the FDTD method // *Computer Physics Communications*. 2010. N. 181. P. 687-702.
10. *Farjadpour A., Roundy D., Rodriguez A., Ibanescu M., Bermel P., Joannopoulos J., Johnson S., Burr G.* Improving accuracy by sub-pixel smoothing in the finite-difference time domain // *Opt. Lett.* 2006. V. 31. P. 2972-2974.

Научный руководитель: Рожнёв А.Г., доцент каф. нелинейной физики СГУ.

**НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ
ДВУХЛУЧЕВОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ**

Титов А.В., аспирант ФНП СГУ

Двухлучковая неустойчивость – классический пример неустойчивости в консервативных системах. К тому же эта неустойчивость является хрестоматийным примером конвективной и абсолютной неустойчивостей (см., например, [1, 2]).

В свое время делались попытки создания двухлучевых усилителей с целью продвижения в миллиметровый диапазон длин волн [3, 4]. Однако, на каком-то этапе эти исследования прекратились, в первую очередь из-за низкой плотности электронных потоков и трудностей в изготовлении мелкоструктурных элементов входных и выходных устройств.

Сегодня интерес к подобным устройствам возрождается. В частности, можно упомянуть интригующие, но малопонятные тезисы доклада К. Birhofberger, В.Е. Carlsten, R. Faehl [5].

Современные работы в области вакуумной микроэлектроники с использованием катодов с полевой эмиссией также позволяют надеяться на возрождение приборов типа двухлучевой лампы.

Цель настоящей работы состояла в последовательном рассмотрении различных вариантов взаимодействия попутных и встречных электронных потоков на основе теории связанных волн пространственного заряда. Рассмотрение включало двух-, трех- и четырехволновые взаимодействия.

Система уравнений, описывающая два одномерных электронных потока с гидродинамической точки зрения приведена в работе [6]. Далее из нее можно получить интегральную форму уравнений для тока.

Из интегральной формы уравнений работы [6] видно, что токи представляют собой сумму быстрой и медленной волн. Далее можно легко получить систему уравнений в форме связанных колебаний.

$$\begin{cases} \frac{di_{1\delta}}{dx} = -j(k_{e1} - k_{p1})i_{1\delta} + j\frac{k_{p1}}{2}i_{2\delta} + j\frac{k_{p1}}{2}i_{2M} \\ \frac{di_{1M}}{dx} = -j(k_{e1} + k_{p1})i_{1M} - j\frac{k_{p1}}{2}i_{2\delta} - j\frac{k_{p1}}{2}i_{2M} \\ \frac{di_{2\delta}}{dx} = -j(k_{e2} - k_{p2})i_{2\delta} + j\frac{k_{p2}}{2}i_{1\delta} + j\frac{k_{p2}}{2}i_{1M} \\ \frac{di_{2M}}{dx} = -j(k_{e2} + k_{p2})i_{2M} - j\frac{k_{p2}}{2}i_{1\delta} - j\frac{k_{p2}}{2}i_{1M} \end{cases} \quad (1)$$

здесь $i_{1\delta}, i_{1M}, i_{2\delta}, i_{2M}$ – амплитуды тока быстрой волны и медленной волны первого и второго потока соответственно, $k_{e1,2} = \omega / v_{1,2}$, $k_{p1,2} = \omega_{p1,2} / v_{1,2}$,

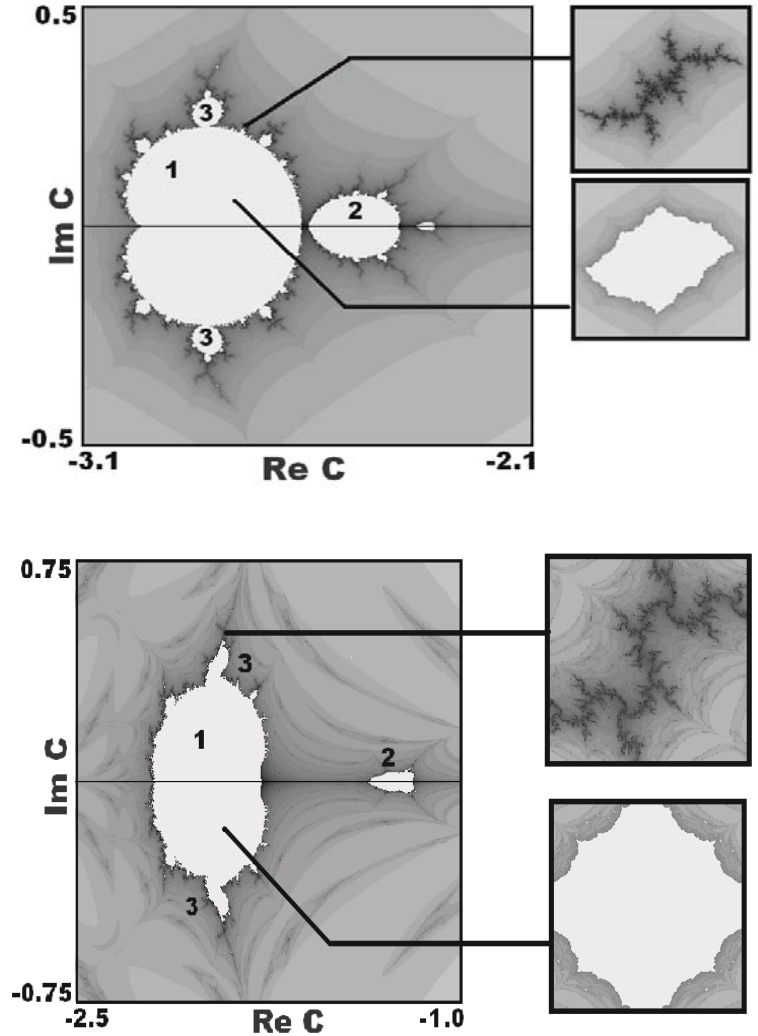


Рис. 2. Плоскость комплексного параметра C , являющегося комплексной медленной амплитудой добавочного сигнала на зеркале 3 оптического резонатора. Значения параметров: комплексная амплитуда опорного сигнала $D = 3$; длины отрезков нелинейных сред $R_1 = R_2 = 1.0$; коэффициенты, характеризующие нелинейные среды $\alpha_1 = 0.01, \beta_1 = 1.0, \alpha_2 = 1.0, \beta_2 = 0.01$ (рис. сверху) и $\alpha_1 = 0.05, \beta_1 = 1.0, \alpha_2 = 1.0, \beta_2 = 0.1$ (рис. внизу)

зеркалу 1. У него частота ω , как и при предыдущем прохождении кольца, а интенсивность и фаза будут характеризоваться некой новой комплексной величиной Z_{n+1} . Найдя зависимость $Z_{n+1}=F(Z_n)$ мы фактически построим комплексное отображение.

Для того чтобы найти необходимое отображение воспользуемся приближенным описанием системы. Так преобразование сигнала внутри слабо нелинейной среды (при учете квадратичной нелинейности) с дисперсией можно описать системой дифференциальных уравнений [4,5]

$$\begin{cases} i \frac{\partial a}{\partial x} = \alpha a^* b \\ i \frac{\partial b}{\partial x} = \beta a^2 \end{cases}, \quad (1)$$

где $a(x)$ – комплексная амплитуда составляющей на частоте ω , $b(x)$ – комплексная амплитуда составляющей на частоте 2ω , x – координата вдоль отрезка нелинейной среды. (Распространяющиеся волны считаются стационарными, поэтому мы имеем обычную динамическую систему, а не волновые уравнения.)

Динамику распространяющегося сигнала в кольце можно рассчитать, используя уравнения (1) и разбив численное моделирование на несколько этапов. На первом этапе интегрируем численно уравнения (1) на отрезке R_1 с заданными значениями параметров α_1 , β_1 и начальными условиями $a(0)=Z_n$, $b(0)=0$. На выходе будем иметь $a(R_1)$ и $b(R_1) \sim Z_n^2$. После прохождения фильтра амплитуда компоненты с частотой ω обнуляется, а затем на втором зеркале она становится равной D . На следующем этапе моделируем прохождение сигнала через вторую нелинейную среду. Для этого интегрируем уравнения (1) на отрезке R_2 с параметрами α_2 , β_2 и начальными условиями $a(0)=D$, $b(0)=b(R_1) \sim Z_n^2$. Теперь на выходе будем иметь $a(R_2) \sim D^* Z_n^2$ и $b(R_2)$. После прохождения второго фильтра обнуляется амплитуда компоненты с частотой 2ω . На третьем зеркале вводится добавочный сигнал C с той же частотой, что и сигнал внутри кольца. Их амплитуды суммируются, и к первому зеркалу приходит монохромный сигнал с амплитудой

$$Z_{n+1} \sim C + D^* Z_n^2. \quad (2)$$

Таким образом, динамика системы в некотором приближении описывается комплексным квадратичным отображением и, очевидно, может демонстрировать феномены комплексной аналитической динамики, такие как множества Мандельброта и Жюлиа $\{1,2\}$.

$v_{1,2}$ – постоянные составляющие скоростей электронных потоков, $\omega_{p1,2}$ – плазменные частоты.

Аналогичным образом можно провести выкладки для случая встречных потоков. Ниже приведены графики решений для случаев попутных и встречных потоков.

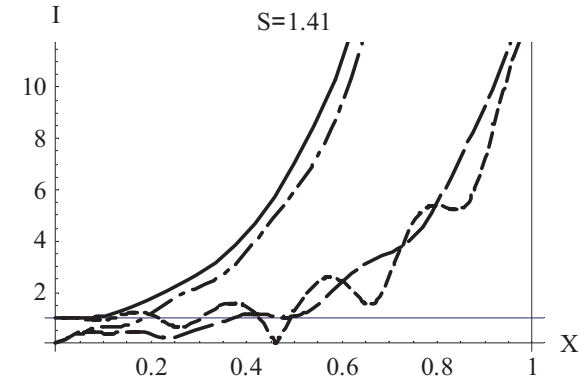


Рис. 1. Распределение токов волн для случая попутных потоков. Сплошная и мелкопунктирная линия описывают амплитуды токов БВПЗ и МВПЗ первого потока соответственно. Крупнопунктирная линия и линия «пунктир-точка» описывают БВПЗ и МВПЗ второго потока соответственно. Здесь I – безразмерная амплитуда тока, X – безразмерная координата, S – отношение скоростей первого и второго потока

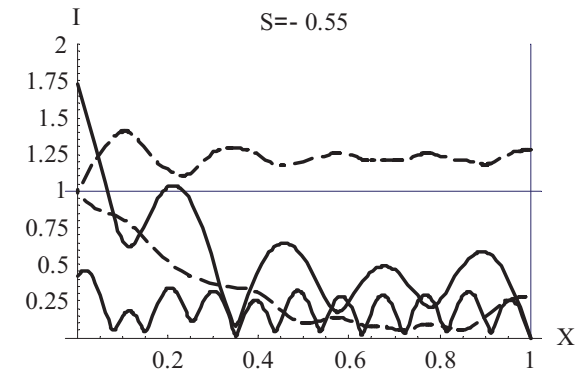


Рис. 2. Распределение токов волн для случая встречных потоков. Верхняя и нижняя пунктирные линии описывают МВПЗ и БВПЗ первого потока соответственно. Верхняя и нижняя сплошные линии описывают БВПЗ и МВПЗ второго потока соответственно. Здесь I – безразмерная амплитуда тока, X – безразмерная координата, S – отношение скоростей первого и второго потока

От общего случая четырехволнового взаимодействия можно легко перейти к случаям двух- и трехволнового взаимодействия. Ниже приведены диаграммы для этих случаев.

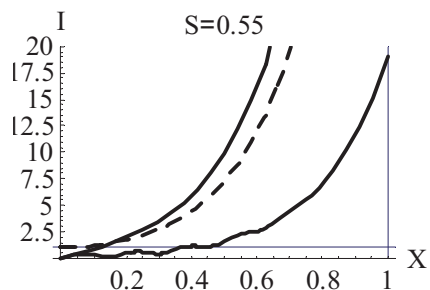


Рис. 3. Распределение тока для случая взаимодействия МВПЗ с БВПЗ и МВПЗ и в двух однонаправленных потоках. Верхняя сплошная линия соответствует БВПЗ второго потока, пунктирная линия соответствует МВПЗ первого потока, нижняя сплошная линия соответствует медленной волне второго потока

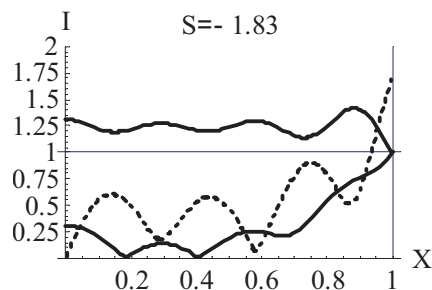


Рис. 4. Распределение тока для случая взаимодействия БВПЗ с БВПЗ и МВПЗ в двух встречных потоках. Пунктирной линией обозначен ток БВПЗ первого пучка, нижняя сплошная линия соответствует БВПЗ второго пучка, верхняя сплошная линия соответствует МВПЗ второго пучка

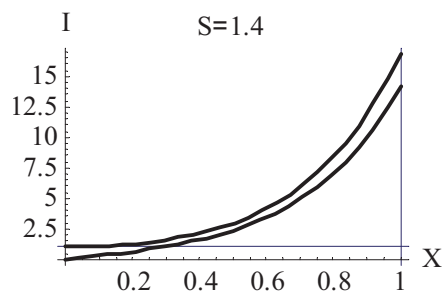


Рис. 5. Распределение тока для случая взаимодействия быстрой и медленной волны в двух однонаправленных потоках. Верхняя кривая соответствует БВПЗ первого потока, нижняя – МВПЗ второго потока

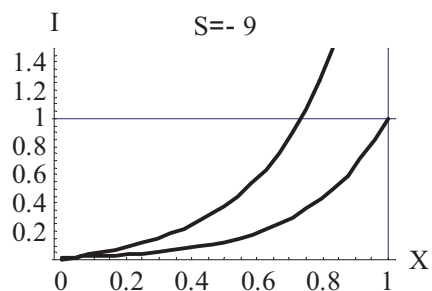


Рис. 6. Распределение тока в системе для случая двух быстрых волн в двух встречных потоках при начальной модуляции более быстрого (второго) электронного пучка по току. Верхняя линия соответствует первому потоку, нижняя – второму

Все диаграммы, приведенные выше, были получены впервые.

ВОЗМОЖНОСТЬ РЕАЛИЗАЦИИ КОМПЛЕКСНОЙ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ В НЕАВТОНОМНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ КОЛЬЦЕВОЙ СИСТЕМЕ

Обычев М.А., студент 3 курса ФНП СГУ

В настоящей работе исследуется возможность реализации феноменов комплексной аналитической динамики [1,2] в модификации кольцевого резонатора Икеды [3], изображенной на рис. 1. Система функционирует следующим образом. На выходе из зеркала 1 после n -го прохождения кольца пусть имеем сигнал Z_n . Это комплексная величина – медленная комплексная амплитуда, характеризующая интенсивность сигнала и его фазу. Допустим, что сигнал монохромный и его частота равна ω . После зеркала 1 сигнал попадает в отрезок слабо-нелинейной среды с дисперсией

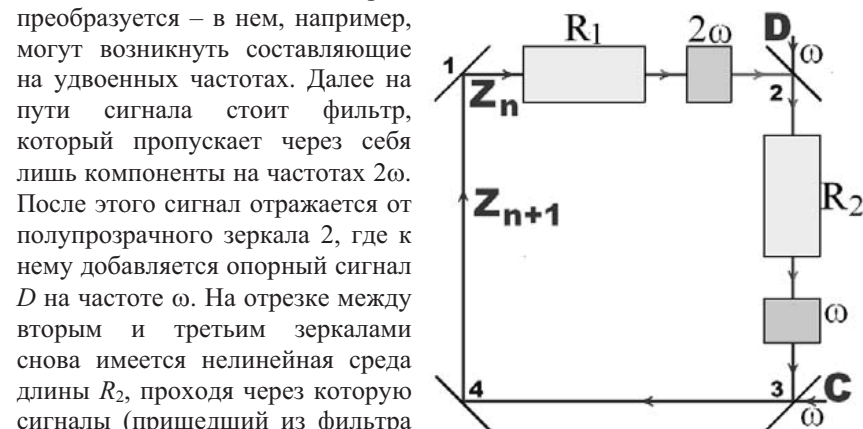


Рис. 1. Схема оптического кольцевого резонатора из 4-х зеркал (зеркала 2 и 3 – полупрозрачные), с двумя отрезками слабо-нелинейной среды с дисперсией (отрезки, длины R_1 и R_2), двумя фильтрами (пропускающими сигнал на частоте 2ω и ω). D – запускаемый снаружи в резонатор опорный сигнал с частотой ω . C – запускаемый снаружи добавочный сигнал с частотой ω . Z_n – комплексная переменная, отвечающая за медленную комплексную амплитуду проходящего n -ый круг по кольцу сигнала при отражении его от зеркала 1 (где он имеет частоту ω)

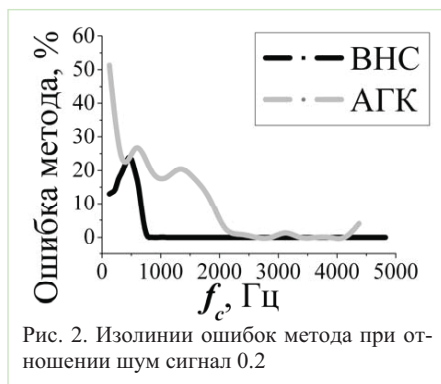


Рис. 2. Изолинии ошибок метода при отношении шум сигнал 0.2

В эксперименте ошибка определялась по выражению (1). Использовался цветной шум с шириной спектральной полосы 250 Гц. Граничная частота Найквиста 5000 Гц. Как показал эксперимент изолиния ошибки при фиксированном соотношении шум сигнал 0.2 лежит значительно ниже (см. рис. 2), что говорит о низкой ошибке классификации для ВНС.

Библиографический список

1. *Lewickij M. S.* A review of methods for spike sorting: the detection and classification of neural action potentials//Network Comput. Neural Syst. 1998. V. 9. P. R53.
2. *Тупицын А.Н., Назимов А.И., Павлов А.Н.* Идентификация потенциалов действия малых ансамблей нейронов с применением вейвлет-анализа и метода нейронных сетей // Известия вузов. 2009.
3. *Думский Д.В., Павлов А.Н., Тупицын А.Н., Макаров В.А.* Классификация нейронных потенциалов действия на основе вейвлет-преобразования// Изв.вузов.Прикладная нелинейная динамика.2005.Т. 13, № 5-6. С. 77-98.
4. *Макаров В.А., Павлов А.Н., Тупицын А.Н.* Сортировка нейронных спайков на основе параметрического вейвлет-анализа с адаптивной фильтрацией // Цифровая обработка сигналов. 2008. № 3. С. 26-31.
5. *Letelier J., Weber P.* Spike sorting based on discrete wavelet transform coefficients // Journal of Neuroscience Methods. 2000. Vol. 101. P. 93-106.
6. *Хайкин С.* Нейронные сети: полный курс, 2-е издание. : Пер.с англ. – М.: Издательский дом "Вильямс", 2006.
7. *Гонсалес Р., Вудс Р.* Цифровая обработка изображений// Пер.с англ. – М.: Издательство «Техносфера», 2005.
8. *Астафьева Н.М.* Вейвлет-анализ: основы теории и примеры применения// Успехи физических наук 1996 Т.166 № 11.

Научный руководитель: Павлов А.Н., д.ф.-м.н., профессор кафедры радиофизики и нелинейной динамики СГУ.

Библиографический список

1. *Бриггс Р.* Двухпучковая неустойчивость. Достижения физики плазмы. Т. 3 и 4 // М.: Изд-во «Мир», 1974.
2. *Рабинович М.С., Трубецков Д.И.* Введение в теорию колебаний и волн, 2-е изд., перераб. и доп. // М.: Наука, 1992. 454 с.
3. *Лопухин В.М.* Возбуждение электромагнитных колебаний и волн электронными потоками // М., 1953. 324 с.
4. *Шевчик В.Н., Шведов Г.Н., Соболева А.В.* Волновые и колебательные явления в электронных потоках на сверхвысоких частотах. Саратов: Изд-во СГУ, 1962.
5. *Birhofberger K., Carlsten B.E., Faehl R.* Generation of millimeter and submillimeter radiation in a compact oscillator utilizing the two-stream instability // IVEC 2008, april 22-24, 2008. P. 164.
6. *Шевчик В.Н., Трубецков Д.И.* Аналитические методы расчета в электронике СВЧ // М.: Сов. Радио, 1970. 584 с.

Научный руководитель: Д.И. Трубецков, член-корр. РАН, профессор, д.ф.-м.н., заведующий кафедрой электроники, колебаний и волн.

**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СОЛИТОНОВ ОГИБАЮЩЕЙ
В ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФЕРРОМАГНИТНЫХ СТРУКТУРАХ
НА ОСНОВЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ШРЕДИНГЕРА**

Шеиукова С.Е., аспирант ФНП СГУ

Исследования, направленные на изучение наблюдаемых в различных средах локализованных волновых пакетов, представляют большой интерес [1]. Новый тип солитонов, получивших название щелевых или брэгговских солитонов (БС), может формироваться в нелинейных средах, свойства которых периодически изменяются в зависимости от длины [2]. Примером такой среды в оптике являются фотонные кристаллы, в которых показатель преломления является периодической функцией пространственных координат [3]. В последнее годы большой интерес вызывает получение кристаллов, подобных фотонным, на основе магнитных материалов – магнетонных кристаллов (МК) [4, 5], в которых распространяющимися волнами являются спиновые волны (магноны). Магнетонные кристаллы имеют ряд существенных преимуществ по сравнению с фотонными кристаллами: возможно управление их свойствами внешним магнитным полем; можно создавать кристаллы с магнетонной запрещенной зоной в диапазоне сверхвысоких частот (СВЧ) порядка нескольких миллиметров; нелинейные эффекты в ферромагнитных пленках проявляются при сравнительно небольших уровнях мощности.

Целью настоящей работы являлось исследование особенностей формирования солитонов огибающей в одномерной периодической ферромагнитной структуре при возбуждении магнитостатических волн на основе численного моделирования с использованием системы связанных нелинейных уравнений Шредингера для амплитуд огибающей прямой и встречной волн.

Рассматриваемая структура представляет собой ферромагнитную пленку, на верхней поверхности которой вдоль оси y создана периодическая неоднородность в виде канавок. Структура бесконечна в направлении осей x и y . Постоянное магнитное поле \vec{H}_0 приложено перпендикулярно к поверхности пленки и значение \vec{H}_0 выбиралось таким образом, чтобы в пленке в направлении оси y распространялась прямая объемная МСВ (ПОМСВ).

Для построения нелинейной модели рассматриваемой периодической ферромагнитной структуры используем, аналогично оптическим системам [3], приближение связанных волн и представим распределение магнито-

изменения индексов в выражении (2) могут быть представлены, как $1 \leq i \leq M_k$, $1 \leq j \leq N_k$, $k = 1, 2, 3$, где M_k - количество синапсов у нейрона k -го слоя, N_k - количество нейронов в k -ом нейронном слое. В качестве функции активации $F(x)$ мы использовали линейную функцию и функцию гиперболического тангенса. В качестве правил обучения мы использовали метод обратного распространения ошибки (МОРО) [6,7]. В основе данного метода лежит процедура минимизации функционала ошибки (3). Параметры минимизации - это синаптические коэффициенты и пороги.

$$E = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{j=N_{out}} (y_j - y_j^s)^2 \quad (3)$$

В выражении (3) вектор \vec{y} это набор выходных значений, которые получены при распознавании входного вектора \vec{x}^s . Вектор \vec{y}^s - это известный «библиотечный» вектор. Алгоритм минимизации функционала (3) основан на свойстве градиента функции. Математически минимизация функции означает решение системы нелинейных уравнений (4).

$$\begin{cases} \frac{\partial E}{\partial \omega_{ijk}} = \frac{\partial E}{\partial y_{jk}} \frac{\partial y_{jk}}{\partial \eta_{jk}} \frac{\partial \eta_{jk}}{\partial \omega_{ijk}} = 0, & 1 \leq i \leq M_k, \quad 1 \leq j \leq N_k, \quad k = 1, 2, 3 \\ \frac{\partial E}{\partial \theta_{jk}} = \frac{\partial E}{\partial y_{jk}} \frac{\partial y_{jk}}{\partial \eta_{jk}} \frac{\partial \eta_{jk}}{\partial \theta_{jk}} = 0, & \eta_{jk} = \sum_{i=1}^{M_k} y_{i,k-1} \omega_{ijk} - \theta_{jk} \\ & y_{jk} = F(\eta_{jk}) = \alpha th(\beta \eta_{jk}) \end{cases} \quad (4)$$

Идеология алгоритма МОРО построена на основе последовательного дифференцирования синаптических связей и порогов. Подобное дифференцирование позволяет определять минимум ошибки распознавания множества векторов [2,6,7]. Общность этого алгоритма позволяет исследователям успешно применять его для обучения различных нестандартных схем включения и организации НС. Примером тому является слияние теории искусственных НС с вейвлет функциями [2]. Продемонстрируем один из простых примеров подобных схем ВНС. Для этого запишем вейвлет преобразование функции $f(t)$ в интегральном виде (5) [3,4,5,8]. Интегральное вейвлет преобразование позволяет записать разложение любой интегрируемой функции $f(t)$ в виде ряда [8] с вейвлет коэффициентами C_{jk} (6).

$$[W_{\psi} f](a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \psi^* \left(\frac{t-b}{a} \right) dt \quad (5)$$

$$C_{jk} = [W_{\psi} f] \left(\frac{1}{2^j}; \frac{k}{2^j} \right) = \frac{1}{2^{-j/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \psi^* (2^j t - k) dt \quad (6)$$

го возбуждения двух нейронов (ПО). Форма ПД таких нейронов хорошо согласуется с экспериментальными данными. ПД нейронов в силу разных параметров математических моделей имеют характерные отличия. Сигнал, снимаемый с двух нейронных клеток, поступает в усилительный каскад. Используя процедуру усиления сигнала и фонового шума, мы учитываем энергетические характеристики компонент тестового сигнала и можем рассчитать величину отношения энергии шума к энергии сигнала. После зашумления информационного сигнала производится идентификация ПД. Идентифицированные ПД подвергаются классификации при помощи следующих методов: анализ главных компонент (АГК), вейвлетные нейронные сети (ВНС). Блок расчета ошибки метода классификации ПД работает по модифицированному алгоритму, предложенному в работе [1]. Таким образом, результатом работы предложенной схемы для оценки ошибки метода является функциональная зависимость (1).

$$\varepsilon = \varepsilon(f_c, \eta) \quad (1)$$

В (1) f_c - центральная частота фоновых флуктуаций, а $\eta = E_{шум}/E_{сигнал}$ - соотношение шум сигнал. Величина ε в нашей работе имеет размерность в виде процентного соотношения, показывающего суммарное количество нераспознанных и неправильно классифицированных ПД.

В качестве общепринятого классического алгоритма распознавания [1] мы использовали АГК. Данный метод классификации основан на свойствах ковариационной (корреляционной) матрицы. Собственные вектора ковариационной матрицы, составленной из классифицируемых объектов, образуют ортогональную систему векторов, причем направление вдоль каждого вектора соответствует максимуму дисперсии [6]. В качестве альтернативы для АГК мы предлагаем методы, основанные на использовании теории искусственных нейронных сетей в сочетании с вейвлет функциями [2]. В теории нейронных сетей принято модель нейрона записывать в виде модели формального нейрона (2) Маккалока-Питса [6,7].

$$y_{jk} = F\left(\sum_{i=1}^{M_k} y_{ik-1} \omega_{ijk} - \theta_{jk}\right), \quad \eta_{jk} = \sum_{i=1}^{M_k} y_{ik-1} \omega_{ijk} - \theta_{jk} \quad (2)$$

В этой модели ω_{ijk} - это синаптический коэффициент i - ой связи j - го нейрона k - го нейронного слоя. В качестве порога генерации j - го нейрона из k - го нейронного слоя выступает величина θ_{jk} . Синаптический блок каждого нейрона - это результат разложения входного вектора по синаптическим коэффициентам. Пороговая активация каждого нейрона соответствует нахождению разности η_{jk} соответствующего порогового коэффициента и результата работы синаптического блока. Блок активации это дифференцируемая функция, которая закладывается при определении НС. Диапазоны

статического потенциала вблизи запрещенной зоны в виде суммы прямой и встречной волн:

$$\psi(y, t) = \varphi_f(y, t) \exp(i(\omega t - K_B y)) + \varphi_b(y, t) \exp(i(\omega t + K_B y)), \quad (1)$$

где $\varphi_f(y, t)$, $\varphi_b(y, t)$ - медленно меняющиеся комплексные амплитуды огибающих прямой (падающей) и встречной (отраженной) волн, соответственно.

С учетом (1) в приближении слабой нелинейности и без учета потерь в структуре нелинейные уравнения для огибающих прямой и встречной волн можно представить в виде:

$$\begin{cases} i\left(\frac{\partial \varphi_f}{\partial t} + V_g \frac{\partial \varphi_f}{\partial y}\right) - \beta \frac{\partial^2 \varphi_f}{\partial y^2} + \eta \varphi_f + \chi \varphi_b + \gamma(|\varphi_f|^2 + \sigma |\varphi_b|^2) \varphi_f = 0 \\ i\left(\frac{\partial \varphi_b}{\partial t} - V_g \frac{\partial \varphi_b}{\partial y}\right) - \beta \frac{\partial^2 \varphi_b}{\partial y^2} + \eta \varphi_b + \chi \varphi_f + \gamma(|\varphi_b|^2 + \sigma |\varphi_f|^2) \varphi_b = 0 \end{cases}, \quad (2)$$

где V_g - групповая скорость, β - коэффициент дисперсии; χ - коэффициент связи; γ - коэффициент нелинейности (характеризует фазовую автомодуляцию), σ - коэффициент кросс-фазовой модуляции, $\eta = \omega_0 - \omega_B$ - отстройка ($\omega_B = V_{ph} K_B$, ω_0 - центральная частота импульса, V_{ph} - фазовая скорость МСВ в однородной структуре).

Решение уравнений (2) может представлять собой семейство БС (определенные комбинации двух волн, движущихся вместе как вперед, так и назад) лишь при выполнении определенных условий ($\beta = 0$, $\sigma = 0$). В случае $\varphi_f(y, t) = \varphi_b(y, t)$ солитон не движется - стационарный щелевой солитон [3]. В отсутствии связи между волнами (при $\chi = 0$) солитоны в такой модели существовать не могут.

Численное решение системы связанных НУШ (2) проводилось SSFM методом при импульсном возбуждении ПОМСВ. Результаты расчетов приведены при изменении коэффициентов связи χ и групповой скорости V_g . Остальные коэффициенты в (2) рассчитывались и принимались равными $\beta = -2 \cdot 10^4 \text{ см}^2 \text{ с}^{-1}$, $\gamma = 3 \cdot 10^{10} \text{ с}^{-1}$, $\delta = 1 \cdot 10^6 \text{ с}^{-1}$, $\sigma = 2$.

Рассмотрим случай, когда в качестве начальных условий задавался импульс как на прямой волне, так и на встречной волне, т.е. $\varphi_f(0, y) = \varphi_b(0, y) = \varphi_0 \exp(-y^2/y_{имп}^2)$. При таком способе возбуждения существует область параметров (χ, V_g), при которых имеет место формирование импульсов, локализованных в пространстве (см. область серого

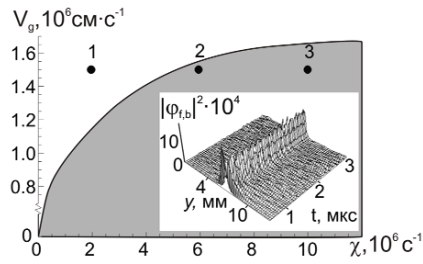


Рис. 1. Область параметров (χ, V_g) , соответствующая образованию солитонов ($\varphi_{0f} = \varphi_{0b} = 0.04$). На вставке показана пространственно – временная эволюция огибающих φ_f и φ_b при $\chi = 10 \cdot 10^6 \text{ c}^{-1}$, $V_g = 1.5 \cdot 10^6 \text{ cm} \cdot \text{c}^{-1}$ (точка 3)

цвета на рис. 1). Рассмотрим механизм формирования солитонов, подобных брэгговским, а именно особенности волновой эволюции при фиксированном значении V_g в зависимости от параметра χ . На рис. 2, а, б показана волновая динамика для параметров, соответствующих точке 1, расположенной в белой области рисунка 1. В этом случае при малых значениях χ энергообмен между волнами незначителен и импульсы на прямой и встречной волне движутся в разные стороны. С увеличением значения χ (точка 2 на рис. 1) импульс, возбужденный на прямой волне, сначала движется в положительном направлении оси y (рис. 2, с – правая полуплоскость) и с течением времени перекачивается в импульс на встречной волне, движущейся в ту же сторону (см. рис. 2, d – правая полуплоскость). Через промежуток времени $T/2$ (как только мощности импульсов на прямой и встречной волнах сравниваются), импульсы останавливаются, после чего продолжают движение в отрицательном направлении оси y , т.к. мощность в импульсе на обратной волне становится больше. В свою очередь, импульс, в начальный момент времени возбужденный на встречной волне, начинает движение в отрицательном направлении оси y и с течением времени перекачивается в импульс на прямой волне, после чего оба импульса останавливаются и продолжают движение в положительном направлении оси y (см. результаты на рис. 2 с, d – левая полуплоскость). Наблюдается симметричная динамика поведения импульсов на прямой и встречной волнах, при этом импульсы остаются локализованными в пространстве, и их комбинация ведет себя подобно брэгговскому солитону.

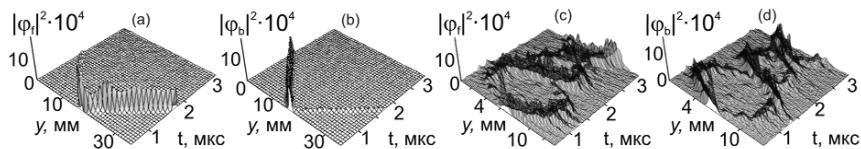


Рис. 2. Пространственно – временные эволюции огибающих φ_f (а), φ_b (б) при $\chi = 2 \cdot 10^6 \text{ c}^{-1}$ (точка 1 на рис. 1) и φ_f (с), φ_b (d) при $\chi = 6 \cdot 10^6 \text{ c}^{-1}$ (точка 2 на рис. 1), $\varphi_{0f} = \varphi_{0b} = 0.04$, $V_g = 1.5 \cdot 10^6 \text{ cm} \cdot \text{c}^{-1}$

ПРИМЕНЕНИЕ ИСКУССТВЕННЫХ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КЛАССИФИКАЦИИ ПОТЕНЦИАЛОВ ДЕЙСТВИЯ

Назимов А.И., студент 5 курса физического факультета СГУ

Любой алгоритм, построенный для решения задачи классификации образов, в процессе обработки входных данных дает определенную величину ошибки. При этом к методам автоматического распознавания относят методы, не требующие дополнительной процедуры адаптации (обучения) в процессе анализа входной информации. Соответственно методы полуавтоматического распознавания – это методы, процедура обучения для которых является первой стадией в процессе анализа входных данных. Процедура обучения основана на использовании априорной информации об исследуемом процессе или на корректировке совокупности параметров, отражающих общее решение задачи классификации. Поэтому настройка параметров метода классификации снижает ошибку распознавания входных образов [2,3,4]. Перед использованием любого алгоритма сортировки нейронных потенциалов действия (ПД) для анализа экспериментальных данных необходимо исследовать зависимость ошибки данного алгоритма от различных параметров. Из опытных результатов известно, что ошибка любого метода сортировки ПД имеет зависимость от спектрального состава и энергетических характеристик фоновых флуктуаций. Таким образом, для регистрации ошибки классификации нам необходимо контролировать спектральные и энергетические характеристики искажающих шумов. Для определения функциональной зависимости ошибки метода от центральной частоты фоновых флуктуаций мы произвели численные эксперименты на основе искусственно сгенерированного сигнала активности нейронных клеток. Рассмотрим функциональные блоки опытной схемы, изображенные на рис. 1. Для генерации цветного шума с определенной центральной частотой применены процедуры фильтрации выходного сигнала генератора белого шума (БШ). Фильтрация производится на основе дискретного преобразования Фурье (ДПФ). Центральная частота определяется, как среднее значение относительно частот среза полосового фильтра. Информационный сигнал в данной схеме генерируется при помощи схемы последовательно-

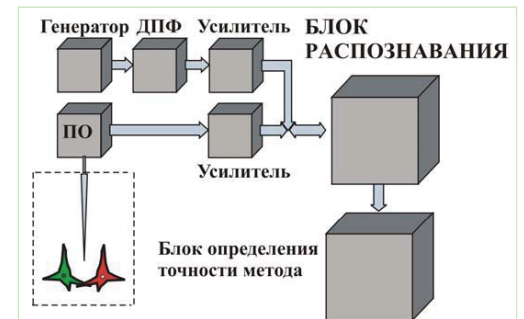


Рис.1. Схема эксперимента по определению функциональной зависимости ошибки метода от центральной частоты и интенсивности фоновых шумов

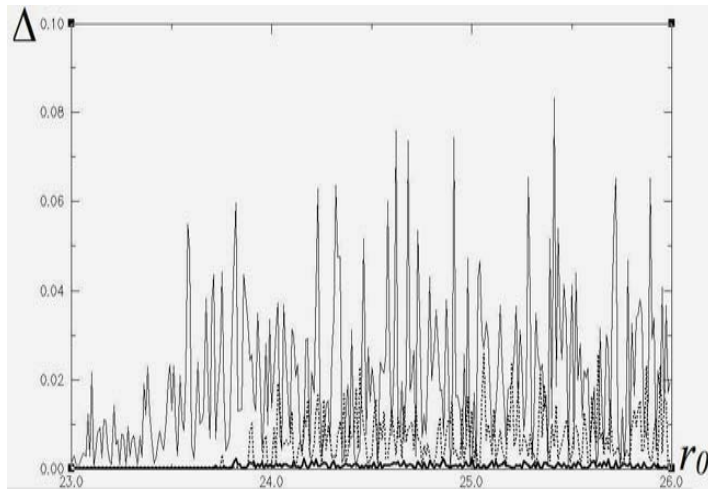


Рис. 3. Зависимость $\Delta(r_0)$ при $D=0.0001$ (сплошная жирная линия), $D=0.01$ (пунктирная линия), $D=0.1$ (сплошная линия)

Хопфа и суперкритическая бифуркация удвоения периода, практически не влияют на точность оценки.

В итоге проделанной работы выявлено, что жесткие бифуркации влияют на точность оценки сильнее, чем мягкие; оценка ухудшается в случае жестких бифуркаций, но отклонения имеют малые значения; с увеличением интенсивности шума ошибка оценки параметра становится больше, но остается приемлемой.

Библиографический список:

1. *В.С. Маляев, Т.Е. Вадивасова.* Оценка параметров зашумленных динамических систем. *Нелинейная динамика*, 2010, т.6, №2, с. 267-276.
2. *Павлов А.Н., Янсон Н.Б., Анищенко В.С.* Реконструкция динамических систем // *Радиотехника и электроника*. 1999. Т. 44, №9, С. 1075-1092.
3. *Anishchenko V.S., Pavlov A.N., Janson N.B.* Global reconstruction in the presence of a priori information // *Chaos, Solitons and Fractals*, vol.9, №8 pp. 1267. (1998).
4. *Timmer J.* Parameter estimation in nonlinear stochastic differential equations // *Chaos, Solitons & Fractals*. 2000. V.11. P.2571-2578.
5. *Маляев В.С., Вадивасова Т.Е.* Возможность оценки параметров зашумленной динамической системы по реализации колебаний // *Статистическая физика и информационные технологии. Материалы Международной школы – семинара «Statinfo-2009»*. Саратов. ООО ИЦ «Наука», ISBN 978-5-91272-957-7, 2009. С.95-98.

Научный руководитель: *Вадивасова Т.Е., д.ф.-м. н., проф.*

На вставке рисунка 1 показана динамика формирования импульсов для параметров, соответствующих точке 3 на рис. 1. С увеличением значения χ период T уменьшается, импульсы чаще меняют направление движения и область по y , в которой локализованы импульсы, сжимается. В результате формируется один солитон на прямой волне и один солитон на встречной волне, которые «стоят» на месте ($V_c = 0$).

Таким образом, в работе с использованием модели в виде связанных нелинейных уравнений Шредингера для амплитуд огибающей прямой и встречной волн рассчитаны области параметров периодической ферромагнитной структуры, при которых возможно формирование солитонов, подобных брэгговским, с различными свойствами. В частности, основным механизмом формирования солитонов, подобных брэгговским, и локализованных на ограниченной длине структуры, является взаимный захват импульсов на прямой и встречной волнах, которые движутся с общей скоростью, и наличие перекачки мощности между прямой и встречной волнами, которая определяется величиной коэффициента связи между волнами. Выявлены особенности волновой эволюции в зависимости от параметра связи и от величины групповой скорости и рассчитаны области параметров, соответствующие формированию импульсов, подобных БС, и солитонов, локализованных на ограниченной длине структуры.

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013годы (проект № 2010-1.2.2-123-019-002) и АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы» (проект РНП № 2.1.1/2695).

Библиографический список

1. *Ахмедиев Н.Н., Анкевич А.* Солитоны. Нелинейные импульсы и пучки. Пер. с англ. под ред. Островского Н.В. М.: Физматлит. 2003.
2. *Маломед Б.А.* Контроль солитонов в периодических средах. Пер. с англ. под ред. Маймистова А.И. М.: Физматлит. 2009.
3. *Кившарь Ю.С., Агравал Г.П.* Оптические солитоны. От волоконных световодов до фотонных кристаллов. Пер. с англ. под ред. Розанова Н.Н. М.: Физматлит. 2005.
4. *Гуляев Ю.В., Никитов С.А.* Магнотонные кристаллы и спиновые волны в периодических структурах// *ДАН*. 2001. Т. 380. С. 469.
5. *Григорьева Н.Ю., Устинов А.Б., Калиникоз Б.А.* Наблюдение солитонов огибающей спиновых волн в периодических магнитных пленочных структурах// *Письма в ЖЭТФ*. 2008. Т. 88, № 1. С. 34.

Научные руководители: *Шараевский Ю.П., профессор, д.ф.-м. н.; Морозова М.А., доцент, к.ф.-м.н.*



Нелинейная динамика, бифуркации и хаос

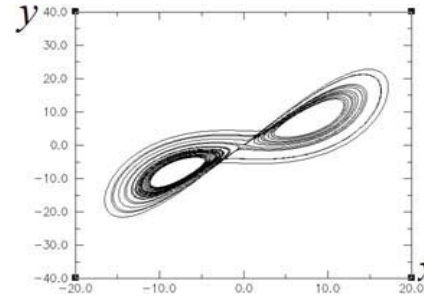


Рис.1. Фазовые портреты системы при $r=25, D=0$

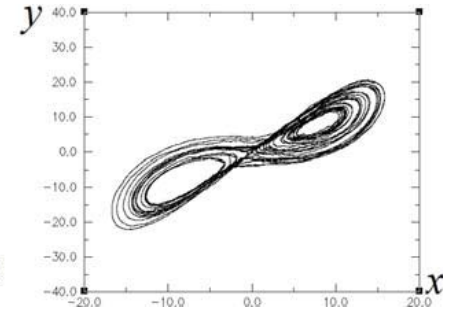


Рис. 2. Фазовые портреты системы при $r=25, D=0.002$

Параметры σ, b принимаются постоянными ($\sigma=10, b=8/3$), а параметр r принимает различные значения. В отсутствие шума ($D=0$) в зависимости от значений r в системе могут наблюдаться различные режимы колебаний, реализуется жесткий переход к хаотическим колебаниям: когда r становится больше 24.74, происходит субкритическая бифуркация Пуанкаре – Андронова – Хопфа, после чего наблюдаются хаотические колебания.

Система (1) интегрировалась методом Гюна с шагом $h=0.001$. Для оценки значения параметра r проводилась выборка полученных в результате интегрирования значений $x(t), y(t), z(t)$. Шаг выборки $\Delta t = 1500$ (т.е. 1500 шагов интегрирования). Параметр r оценивался по формуле:

$$r = \frac{\dot{y} + xz + y - \sqrt{2D}\xi(t)}{x}, \quad (2)$$

где

$$\dot{y} = \frac{1}{12h} (y_{i-2} - 8y_{i-1} + 8y_{i+1} - y_{i+2}).$$

Далее проводилась фильтрация полученных значений параметра r : выбрасывались значения, существенно отклоняющиеся от среднего. После такой фильтрации применялась оценка r методом наименьших квадратов. Однако итоговая оценка может давать очень большую (аномальную) ошибку. Это может быть связано с делением на величину x в (2) когда x принимает очень малое значение. Чтобы уменьшить ошибку, из рассмотрения исключались точки, у которых значения x попадают в диапазон $[-0.001; 0.001]$.

Ошибка оценки рассчитывается по формуле $\Delta = |r - r_0|/r_0$, где r_0 - истинное значение, а r - значение, полученное в результате оценки.

На рис. 3 показана зависимость ошибки оценки параметра от значения r . Как видно из графиков на рис. 3, оценка параметра заметно ухудшается после бифуркации и зависит от интенсивности шума.

Результаты, полученные в публикации [1], свидетельствуют о том, что мягкие бифуркации, такие как суперкритическая бифуркация Андронова–

ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ ЗАШУМЛЕННЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ В СЛУЧАЕ ЖЕСТКОЙ БИФУРКАЦИИ

*Маляев В.С., аспирант физического факультета СГУ
Семенов В.В., студент 4 курса физического факультета СГУ*

В работе рассматривается возможность корректной оценки параметров динамических систем с источником шума при использовании численного моделирования исследуемых сигналов и их последующей обработки. Рассматривается следующая задача. Пусть модель динамической системы задана, то есть известны уравнения, определяющие в каждый момент времени состояние системы. Требуется определить значение управляющих параметров. Если система является детерминированной, то данная задача легко решается, так как значения параметров можно выразить через значения динамических переменных и их производных. Это можно сделать с высокой точностью, ограниченной только точностью алгоритма численного интегрирования и ошибками округления. Однако, если система подвергается воздействию случайной силы, которое невозможно учесть, то оценки параметров в разные моменты времени оказываются случайными и могут сильно отличаться от истинного значения, и задача о корректной оценке в таком случае оказывается не такой уж простой. Известно, что даже слабый шум может приводить к существенным изменениям в поведении динамической системы. Система особенно чувствительна к случайным воздействиям, если она находится вблизи бифуркационных состояний. В работе [1] проводилась оценка параметров ряда динамических систем, среди которых системы, в которых наблюдается переход в режим хаотических колебаний через каскад бифуркаций удвоения периода. Одним из результатов, полученных в [1], является установленный факт, что бифуркации удвоения периода (являющиеся мягкими бифуркациями) существенно не влияют на точность оценки. В нашей же работе исследуется влияние жестких бифуркаций на точность оценки.

В качестве исследуемой системы выбрана система Лоренца, содержащая аддитивный источник гауссова шума. Исследуется влияние интенсивности шума на точность оценки параметров, а также чувствительность оценки к бифуркациям, происходящим в системе и при переходе в режим хаоса. Система Лоренца имеет вид:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\sigma x + \sigma y, \\ \dot{y} &= -xz + rx - y + \sqrt{2D}\xi(t), \\ \dot{z} &= xy - bz, \end{aligned} \quad (1)$$

где x, y, z – динамические переменные; σ, r, b – параметры системы; $\xi(t)$ – нормированный источник белого Гауссова шума; D – интенсивность шума.

ИСКУССТВЕННАЯ ДИСКРЕТИЗАЦИЯ ПРОСТЕЙШИХ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ С МЯГКИМ И ЖЕСТКИМ ВОЗБУЖДЕНИЕМ

Адилова А.Б., студентка 2 курса ФНП СГУ

Метод искусственной дискретизации, предложенный в работах Г.М. Заславского и Б.В. Чирикова (см., например, [1,2]), позволяет на основе системы с непрерывным временем получить соответствующую ей модель с дискретным временем. В отличие от метода сечения Пуанкаре, при котором динамика дискретной модели и исходной потоковой системы совпадает, при использовании метода искусственной дискретизации связь дискретной и потоковой систем более сложная. Хотя существуют некоторые общие закономерности (так, предельному циклу в потоковой системе отвечает инвариантная кривая в дискретной модели и т.п.), довольно часто оказывается, что динамика полученной модели существенно богаче и интереснее, чем динамика потока-«прототипа». Это позволяет рассматривать метод искусственной дискретизации как один из методов построения сравнительно простых моделей с нетривиальной динамикой. В настоящей работе будет рассмотрена динамика моделей, полученных путем искусственной дискретизации осцилляторов ван дер Поля с мягким и жестким возбуждением.

Будем использовать полуявный вариант схемы, при котором осциллятору вида

$$\ddot{x} + g(\dot{x}, x) + f(x) = 0 \quad (1)$$

соответствует отображение

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + \varepsilon y_{n+1}, \\ y_{n+1} &= y_n - \varepsilon g(y_n, x_n) - \varepsilon f(x_n). \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь ε – параметр дискретизации.

Преимущество такой схемы по сравнению с явным вариантом состоит в том, что консервативному осциллятору соответствует консервативное отображение. Применяя этот метод к осциллятору ван дер Поля

$$\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x = 0, \quad (3)$$

можно получить отображение

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + \varepsilon_{n+1}, \\ y_{n+1} &= y_n + \varepsilon(\lambda y_n - x_n^2 y_n - x_n). \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь ε – параметр дискретизации, λ – параметр линейной диссипации.

На рис. 1, а представлены карта динамических режимов отображения (4) и ее увеличенный фрагмент на рис. 1, б, соответствующий области квазипериодической динамики. На увеличенном фрагменте карты отмечены точки, соответствующие аттракторам, изображенным на рис. 2. Видно, что

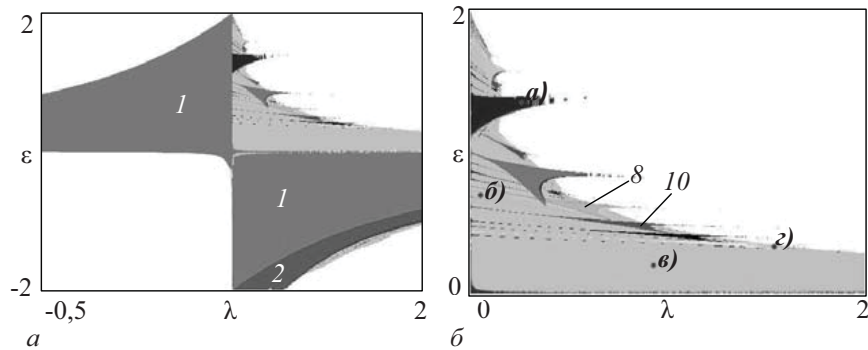


Рис. 1. *a* - карта динамических режимов отображения (4); *б* - увеличенный фрагмент этой карты. Разными оттенками серого отмечены области существования устойчивых циклов различных периодов, основные периоды подписаны. Серым цветом отмечена область неперiodической динамики, белым - отсутствия аттрактора

наблюдается соответствие динамики отображения (4) и исходной системы (3). Так, при $\varepsilon > 0$ и $\lambda < 0$ в отображении наблюдается устойчивая неподвижная точка; такой же режим реализуется и в осцилляторе (3). При $\lambda > 0$, соответствующих автоколебаниям в исходной системе, в отображении наблюдается область квазипериодической динамики, которой соответствует аттрактор в виде инвариантной кривой, причем при малых значениях параметра дискретизации ε форма этой кривой совпадает с формой предельного цикла осциллятора (3) (рис. 2, *в*). В область существования инвариантной кривой «встроены» области циклов различного периода – резонансных циклов. Они возникают в окрестности инвариантной кривой, при этом двигаясь по плоскости параметров параллельно границе области квазипериодических режимов, можно наблюдать чередование инвариантной кривой и циклов различных периодов. С увеличением λ размеры инвариантной кривой увеличиваются, а ее форма усложняется, что приводит к образованию хаотического аттрактора (рис. 2, *г*). Таким образом, дискретная модель демонстрирует, в отличие от своего «прототипа», переход к хаосу через разрушение квазипериодических движений.

Случай отрицательных значений параметра ε можно интерпретиро-

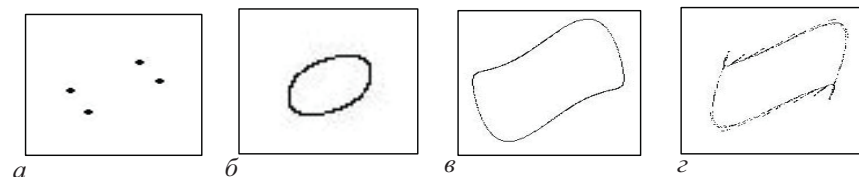


Рис. 2. Аттракторы отображения (4) при различных значениях параметров: *a* - $\lambda=0.27$; $\varepsilon=1.35$ (цикл периода 4); *б* - $\lambda=0.03$; $\varepsilon=0.65$ (инвариантная кривая); *в* - $\lambda=0.92$; $\varepsilon=0.17$ (инвариантная кривая); *г* - $\lambda=1.5$; $\varepsilon=0.34$ (хаотический аттрактор)

туды аттрактор демонстрирует бифуркацию удвоения периода, после чего исчезает в результате кризиса, при этом может произойти переход как на другой периодический, так и на хаотический аттрактор. При увеличении диссипации происходит бифуркация седло-узел и затем остается только центральный аттрактор. При уменьшении диссипации может произойти кризис, в результате которого наблюдается «перескок» точек на новый аттрактор. Отметим также, что в численных экспериментах не было обнаружено аттракторов, претерпевающих две и более последовательных бифуркации удвоения периода. В связи с этим представляет интерес вопрос о сценарии перехода к хаосу в исследуемой системе.

Работа поддержана АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы» (проект № 2.1.1./1738) Минобрнауки РФ.

Библиографический список

1. Г.М. Заславский, Р.З. Сагдеев, Д.А. Усиков, А.А. Черников. Слабый хаос и квазирегулярные структуры. М.: Наука, 1991, 235с.
2. А.В. Савин, Д.В. Савин //Нелинейный мир, 2010, т.8, № 2, сс.70-71.

Научный руководитель: Савин А.В., доцент, к.ф.-м.н.

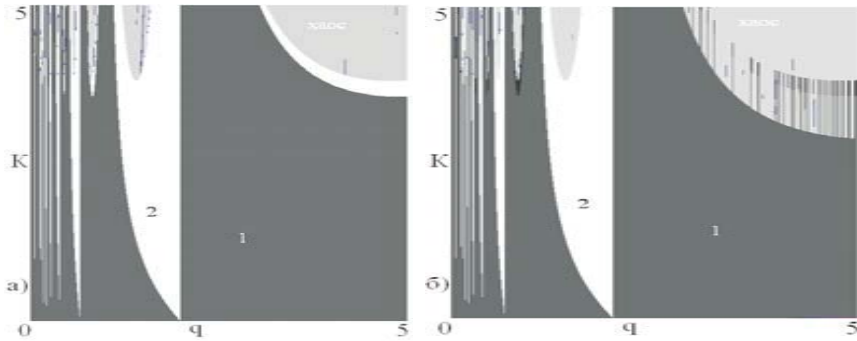


Рис. 6. Карты динамических режимов для центрального аттрактора для различных значений коэффициента диссипации γ : $\gamma=0.002$ (а); $\gamma=0.001$ (б)

на область существования «центрального» аттрактора вблизи соответствующих значений частоты воздействия и имеют форму, типичную для языков синхронизации.

При выборе начальных условия вблизи начала координат реализуется, как правило, центральный аттрактор, и вид карт существенно отличается (рис. 6). На этих картах также присутствует область хаотической динамики, которая при уменьшении коэффициента диссипации возникает при меньших значениях амплитуды внешнего воздействия, однако режимов с периодом выше 2 не наблюдается.

Эволюцию структуры аттрактора при изменении какого-либо из управляющих параметров можно визуализировать при помощи бифуркационного дерева. На рис. 7 приведено такое дерево для одного из «побочных» аттракторов, существующих при $q=5$, при изменении как амплитуды воздействия, так и уровня диссипации.

Видно, что при уменьшении амплитуды воздействия аттрактор исчезает в результате седло-узловой бифуркации, и при малой амплитуде воздействия остается только центральный аттрактор. При увеличении ампли-

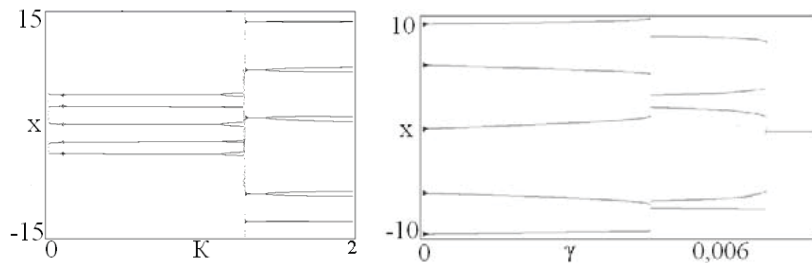


Рис. 7. Эволюция аттрактора при изменении параметров: K при $\gamma=0.003$ (слева); γ при $K=0.1$ (справа)

вать как обращение времени в потоковой системе. В этом случае при $\lambda < 0$ наблюдается неустойчивая точка, а при $\lambda > 0$ – устойчивая точка, и неустойчивый цикл. Видно, что в дискретной системе первому случаю отвечает отсутствие аттрактора, а второму – наличие аттрактора в виде неподвижной точки, которая, однако, демонстрирует удвоение периода при увеличении параметра дискретизации ε . Отметим, что это принципиально новый по сравнению с исходной потоковой системой эффект.

Можно отметить еще одну особенность фазового пространства – область квазипериодических движений на базе цикла периода два (рис. 3). Эта область представляет собой довольно узкую полосу на границе области устойчивого 2-цикла и области отсутствия аттрактора, в которую встроены языки синхронизации. Поскольку в системе-прототипе в этом случае наблюдается (с учетом обращения времени) устойчивая точка и неустойчивый предельный цикл, то наблюдаемый режим можно интерпретировать как синхронизацию на неустойчивом цикле. Такого рода эффекты могут наблюдаться при наличии импульсного воздействия [3], с которым в определенном смысле схоже применение искусственной дискретизации.

В настоящей работе также рассматривалась автоколебательная система с жестким возбуждением

$$\ddot{x} - (\lambda + \mu x^2 - x^4)\dot{x} + x = 0 \quad (5)$$

Применяя метод искусственной дискретизации к этой системе, получим отображение

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + \varepsilon y_{n+1}, \\ y_{n+1} &= y_n + \varepsilon y_n (\lambda + \mu x_n^2 - x_n^4). \end{aligned} \quad (6)$$

Карта динамических режимов отображения (6) представлена на рис. 4.

Видно, что при $\mu < 0$ устройство пространства параметров качественно схоже с устройством пространства параметров системы (4), только вследствие нелинейности более высокого порядка область отсутствия аттрактора занимает большую площадь. В то же время при $\mu > 0$ отсутствует область квазипериодической динамики, а удвоения периода наблюдаются

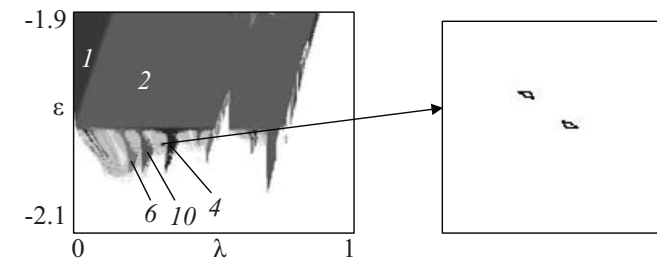


Рис. 3. Увеличенный фрагмент карты режимов отображения (4) и фазовый портрет в отмеченной на карте точке

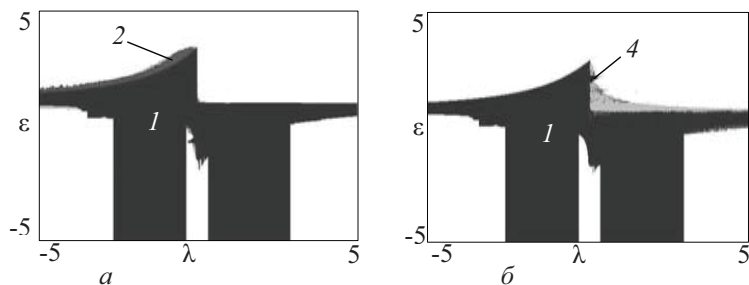


Рис.4. Карта динамических режимов отображения (5) при $a = \mu=10$; б - $\mu=-5$

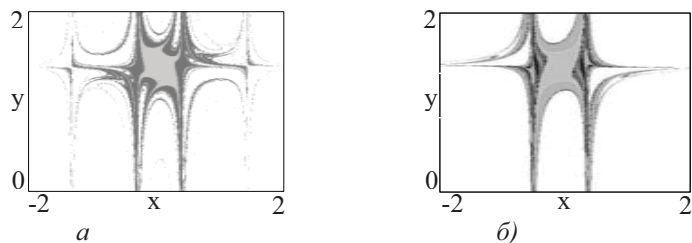


Рис. 5. Бассейны притяжения отображения (6) при различных значениях параметра, отвечающих сосуществованию a - инвариантной кривой (св. серый) и 2-цикла (темно-серый) $\lambda = -0.25$; $\epsilon = -0.87$; $\mu = 8$; б - инвариантной кривой (св. серый), 4-цикла (серый) и 8-цикла (темно-серый) $\lambda = 0.057$; $\epsilon = 1.19$; $\mu = -5$

при значениях параметра дискретизации $\epsilon > 0$ и $\lambda < 0$. Именно в этом случае, напомним, в системе-прототипе и наблюдается режим, соответствующий жесткому возбуждению.

В данной системе возможна также мультистабильность, бассейны притяжения сосуществующих аттракторов при некоторых значениях параметров приведены на рис. 5.

Таким образом, полученные в результате искусственной дискретизации простейших автоколебательных систем отображения демонстрируют многие феномены нелинейной динамики, в том числе переход к хаосу через каскад бифуркаций удвоения периода и через разрушение квазипериодических движений, а также явление мультистабильности.

Библиографический список

1. Г.М. Заславский. Физика хаоса в гамильтоновых системах. М.;Ижевск: ИКИ, 2004.
2. А.Д. Морозов. Резонансы, циклы и хаос в квазиконсервативных системах. М.: Ижевск, ИКИ, 2005.
3. А.П. Кузнецов, Л.В. Тюрюкина. //Изв. вузов. ПНД, 2006, т.14, №2, с.35.

Научный руководитель: к.ф.-м.н., доцент Савин А.В.

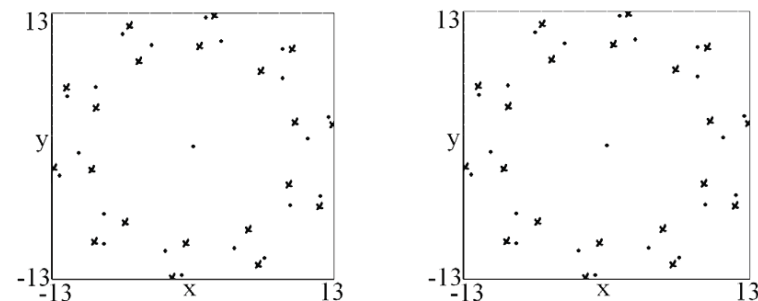


Рис. 4. Устойчивые и неустойчивые точки для диссипативного аналога отображения при значении нормированной частоты $q=5$ при соотношении $\gamma/K=0.02$: $K=0.1$ и $\gamma=0.002$ (слева); $K=0.2$ и $\gamma=0.004$ (справа). Видно, что расположение точек совпадает

Интересно, что положение неподвижных точек определяются не параметрами γ и K «по отдельности», а только их отношением γ/K (рис. 4)

Устройство пространства управляющих параметров отображения (2) иллюстрируют карты динамических режимов (рис. 5). Заметим, что в силу сосуществования аттракторов вид карт существенно зависит от выбора начальных условий. Приведенные карты соответствуют выбору начальных условий достаточно далеко от начала координат, так что реализуется, как правило, один из «побочных» аттракторов.

Основную часть пространства параметров занимает область периода 1, соответствующая неподвижной точке в начале координат – центральному аттрактору. С увеличением амплитуды воздействия происходит бифуркация удвоения периода, а затем возникает хаотическое поведение. Отметим, что при уменьшении диссипации оно возникает при меньших значениях амплитуды внешнего воздействия. «Побочным» аттракторам отвечают достаточно узкие области других периодов, которые «наложены»

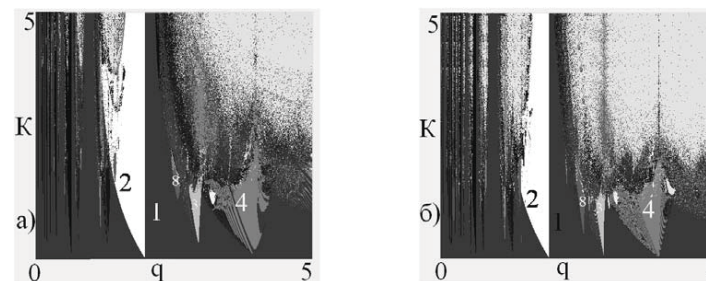


Рис. 5. Карты динамических режимов при различных значениях коэффициента диссипации $\gamma=0,003$ (а); $\gamma=0,0005$ (б). Различными оттенками серого отмечены области существования циклов различных периодов. Периоды основных циклов подписаны

**РАЗРУШЕНИЕ ГРУБОГО ХАОСА
В МОДЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ, ПОСТРОЕННЫХ
НА ОСНОВЕ ОТОБРАЖЕНИЯ «КОТ АРНОЛЬДА»**

*Д.С. Аржанухина, СГУ, ФНП, 5-й курс
М.В. Поздняков, СГУ, ФНП, аспирант*

Классическим примером [1] системы с хаотической динамикой служит отображение «кот Арнольда»:

$$x_{n+1} = x_n + y_n \pmod{1} \quad (1)$$

$$y_{n+1} = x_n + 2y_n \pmod{1}$$

В [2] было предложено несколько способов введения малых диссипативных возмущений в (1), приводящих к появлению в нем гиперболического хаотического аттрактора. В [3] было показано, что при увеличении амплитуды возмущения системы проходят довольно сложную и нетривиальную последовательность бифуркаций. Более подробное исследование динамики полученных систем и являлось целью настоящей работы.

С целью снятия возможного вырождения полученное отображение было модифицировано путем введения еще одного аддитивного параметра μ :

$$x_{n+1} = x_n + y_n + \mu + \frac{\varepsilon}{2\pi} \left(\sin 2\pi x_n + \frac{1}{2} \sin 4\pi x_n \right) \pmod{1} \quad (2)$$

$$y_{n+1} = x_n + 2y_n + \frac{\varepsilon}{2\pi} \left(\sin 2\pi x_n + \frac{1}{2} \sin 4\pi x_n + \sin 2\pi y_n + \frac{1}{2} \sin 4\pi y_n \right) \pmod{1}$$

На рис. 1 приведены карта динамических режимов отображения (2) на плоскости параметров (ε, μ) и ее увеличенный фрагмент, а на рис. 2 – карты показателей Ляпунова тех же областей плоскости параметров. Видно, что при малых амплитудах возмущения реализуется хаотический аттрактор. При увеличении амплитуды хаотический аттрактор разрушается и возникает устойчивая неподвижная точка, которая с ростом амплитуды возмущения превращается в 3-цикл. Дальнейшая эволюция происходит порозному в зависимости от значения параметра μ .

Вблизи линии $\mu = 0$ переход от 3-цикла к хаотической динамике происходит через область «crossroad area» с образованием на базе 3-цикла хаотического аттрактора типа Эно, который существует в довольно узком интервале по параметру ε , впоследствии уступая место аттрактору, соответствующему развитому хаосу. Так же следует отметить, что в этой области наблюдается довольно сильная мультистабильность. В частности, происходит наложение двух структур «crossroad area» (см. рис. 2, а), что приводит к сосуществованию четырех аттракторов. Устройство бассейнов притяжения аттракторов в этом случае иллюстрирует рис. 3.

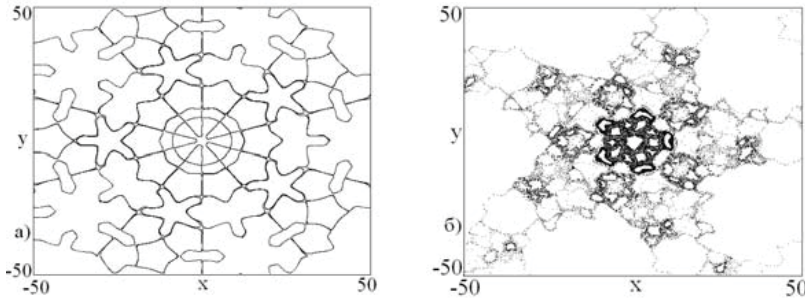


Рис. 2. Каркас паутины при нормированной частоте $q=5$ для разных значений амплитуды внешнего воздействия K : $K=0.1$ (а); $K=1$ (б)

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= e^{-\gamma \frac{2\pi}{q}} \left(x_n \cos \frac{2\pi}{q} + (y_n + K \sin x_n + \gamma x_n) \sin \frac{2\pi}{q} \right) \\ y_{n+1} &= e^{-\gamma \frac{2\pi}{q}} \left((y_n + K \sin x_n) \cos \frac{2\pi}{q} - (x_n(1 + \gamma^2) + \gamma(y_n + K \sin x_n)) \sin \frac{2\pi}{q} \right) \end{aligned} \quad (2)$$

где параметр γ имеет смысл коэффициента затухания.

Как было показано [2], при небольших значениях амплитуды сигнала и малой диссипации система (1) характеризуется высокой степенью мультистабильности. На фазовой плоскости всегда присутствует «центральный» аттрактор, расположенный в начале координат. Вокруг него – «побочные аттракторы», представляющие собой циклы периода кратности нормированной частоты внешнего воздействия q . Они бывают устойчивые (точки типа «центр» (точка)) и неустойчивые (точки типа «седло» (крестик)). При уменьшении коэффициента затухания γ количество циклов увеличивается (рис. 3).

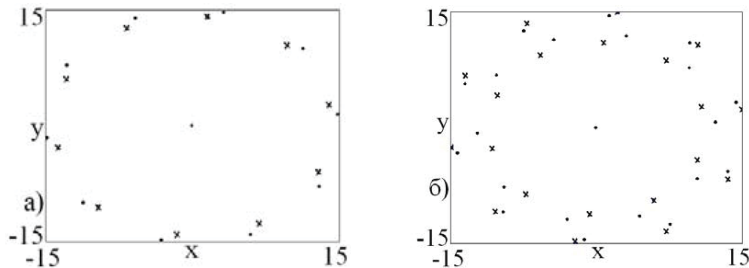


Рис. 3. Устойчивые и неустойчивые точки для диссипативного аналога отображения при значении нормированной частоты $q=5$, амплитуды $K=0.1$ для различных значений коэффициента диссипации: $\gamma=0.003$ (слева); $\gamma=0.002$ (справа)

ДИНАМИКА ДИССИПАТИВНОГО АНАЛОГА ОТОБРАЖЕНИЯ-ПАУТИНЫ

Латухина Е.Ю., студентка 4 курса ФНП СГУ

Как известно [1], в фазовом пространстве вырожденных гамильтоновых систем, не удовлетворяющих условиям КАМ-теоремы, возникает особый тип структур, называемый стохастической паутиной. Простейшей системой, демонстрирующей такое поведение, является, линейный осциллятор под внешним воздействием, нелинейным образом зависящим от его координаты. Динамика такой системы может быть описана [1] дискретным отображением, которое получило название «отображение-паутина»:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n \cos \frac{2\pi}{q} + (y_n + K \sin x_n) \sin \frac{2\pi}{q} \\ y_{n+1} &= (y_n + K \sin x_n) \cos \frac{2\pi}{q} - x_n \sin \frac{2\pi}{q} \end{aligned} \quad (1)$$

где x_n, y_n – координата и скорость осциллятора перед импульсом, K – амплитуда внешнего воздействия, $q = 2\pi/\omega_0 T$ – нормированная частота воздействия.

Вид траекторий в фазовом пространстве отображения (1) иллюстрирует рис. 1. В фазовом пространстве образуется сеть из сепаратрис, причем вследствие их разрушения возникает стохастический слой, называемый также каркас паутины (рис. 2).

Целью настоящей работы было исследование динамики этой системы при введении в нее слабой постоянной диссипации. В этом случае можно прийти к модели вида [2]:

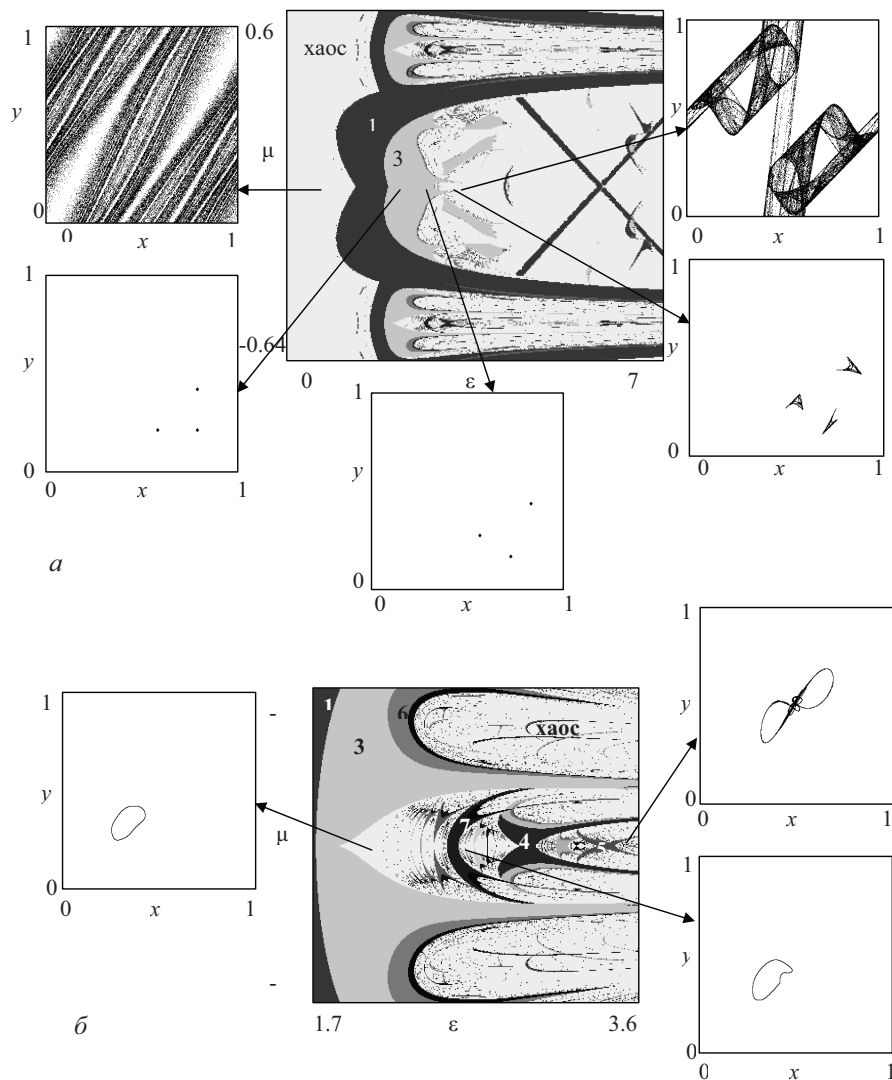


Рис. 1. Карта динамических режимов и аттракторы отображения (4) (а) и увеличенный фрагмент карты динамических режимов (б)

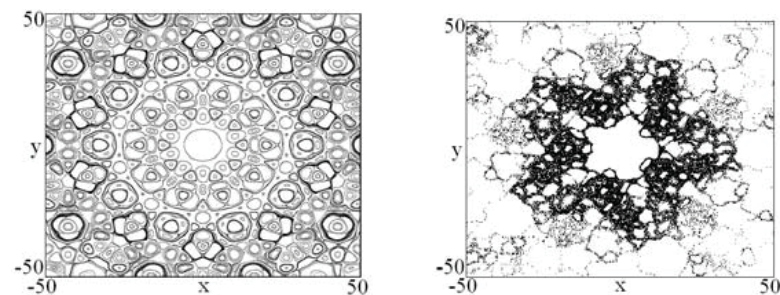


Рис. 1. Фазовые портреты отображения (1) при нормированной частоте воздействия $q=5$ и различных значениях амплитуды внешнего воздействия: $K=0.1$ (слева); $K=1$ (справа)

Бернулли, в фазовом пространстве отображения Пуанкаре это отвечает, как можно предположить, присутствию хаотического гиперболического аттрактора типа Смейла–Вильямса, что обуславливает грубость (структурную устойчивость) генерируемого хаоса. Это предположение обосновано на уровне компьютерной проверки известного из математической литературы критерия для первой из рассмотренных схем [5]. Для остальных систем оно остается гипотетическим, однако согласуется с результатами проведенного численного моделирования.

Работа выполнена при поддержке Программы развития научного потенциала высшей школы № 2.1.1/1738 и гранта Президента РФ МК-905.2010.2

Библиографический список

1. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. М., 1984.
2. Люиселл У. Связанные и параметрические колебания в электронике М., 1963.
3. Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Рыскин Н.М. Нелинейные колебания, М., 2005.
4. Ахманов С.А., Хохлов Р.В. Параметрические усилители и генераторы света // УФН. 1966. Т.88. С.439.
5. А.С. Кузнецов, С.П. Кузнецов, И.Р. Сатаев. Параметрический генератор гиперболического хаоса на основе двух связанных осцилляторов с нелинейной диссипацией // ЖТФ. 2010. Т.80. Вып.12. С. 1.
6. Кузнецов С.П. О возможности реализации параметрического генератора гиперболического хаоса // ЖЭТФ. 2008. Т.133. С.438.

Научный руководитель: Кузнецов С.П., д.ф.-м.н., зав. лабораторией СФИРЭ им. В.А.Котельникова РАН

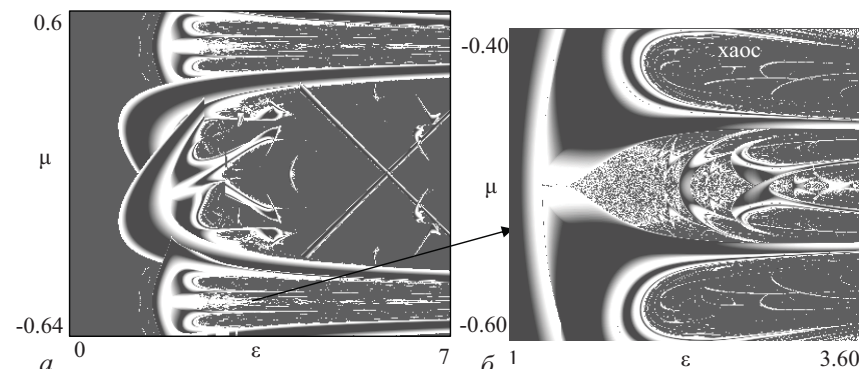


Рис. 2. Карта старшего ляпуновского показателя отображения (4) (а) и ее увеличенный фрагмент (б). Темным цветом обозначена область хаоса, которой соответствует положительный ляпуновский показатель, оттенками серого - области с регулярным режимом и отрицательным ляпуновским показателем, белый цвет отвечает нулевому ляпуновскому показателю

Вблизи же линии $\mu = -0.5$ наблюдаются квазипериодические режимы и классическая система языков синхронизации, опирающихся на линию $\mu = -0.5$, среди которых некоторые (например, периодов 4, 5 и 7) имеют форму, несколько отличающуюся от классической, в частности, опираются на основание конечной ширины. При этом переход к хаосу происходит через разрушение квазипериодической динамики и инвариантной кривой. Вместе с тем в окрестности этой структуры возможен и фейгенбаумовский переход к хаосу на базе 3-цикла (например, при $\mu = -0.45$).

Таким образом, плоскость параметров отображения (2) разбивается на две части с принципиально различным устройством. В окрестности

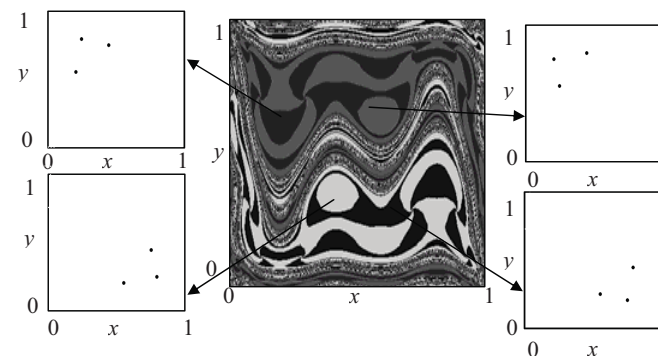


Рис. 3. Бассейны притяжения аттракторов и аттракторы отображения (2) параметров $\varepsilon = 2.5$, $\varepsilon = 0$

линии $\mu = -0.5$ ее устройство довольно типично для систем с квазипериодической динамикой, а область устойчивого 3-цикла в этом случае может быть интерпретирована как язык синхронизации с числом вращения 1:3. В то же время в окрестности линии $\mu = 0$ устройство представляется нетривиальным.

Работа поддержана АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы» (проект № 2.1.1./1738) Минобрнауки РФ.

Библиографический список

1. Кузнецов С.П. Динамический хаос (курс лекций): Учеб. Пособие для вузов. 2-е изд. перераб. и доп. М.: Физматлит, 2006. 356 с.
2. Кузнецов С.П. Изв. вузов «ПНД», т. 17, № 4, 2009, С. 5–34.
3. Аржанухина Д.С., Поздняков М.В. Динамика диссипативных модификаций отображения «кот Арнольда»: Нелинейные дни в Саратове для молодых – 2009: Сборник материалов научной школы-конференции. Саратов: ООО ИЦ «Наука», 2010.

Научный руководитель: к.ф.-м.н., доцент А.В. Савин.

4. Система на основе шести осцилляторов.

На рис. 4 показана схема, составленная из двух подсистем А и В – параметрических генераторов, каждый из которых содержит три параметрически связанных осцилляторов с частотами ω_1 , $\omega_2 = 2\omega_1$ и $\omega_3 = 3\omega_1$ (рис. 4). Осциллятор ω_1 в каждой подсистеме связан через квадратичный нелинейный элемент с осциллятором ω_2 , относящимся к подсистеме-партнеру. Воздействие на второй гармонике одного осциллятора на другой резонансное.

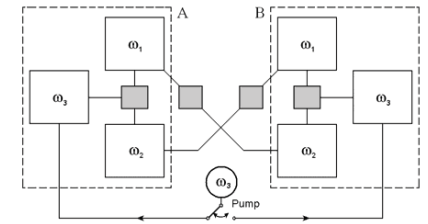


Рис. 4

В отличие от рассмотренной выше второй системы, накачка здесь происходит за счет третьего осциллятора, возбуждение которого обеспечивается периодически подаваемой последовательностью импульсов с частотой заполнения ω_3 от внешнего источника. Накачка включается по очереди в одной и другой подсистеме, так что происходит попеременное параметрическое возбуждение подсистем и затухание колебаний в промежутках времени между активными стадиями. За полный период модуляции накачки фаза колебаний претерпевает умножение на фактор 4, что обеспечивает хаос в поведении последовательности значений фазы. Таким образом, система выдает сигнал в виде импульсов, следующих друг за другом с периодом модуляции накачки, но фаза высокочастотного заполнения хаотически меняется от импульса к импульсу. Генератор описывается системой уравнений

$$\begin{aligned}
 \ddot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 &= -\alpha_1 \dot{x}_1 + \beta x_2 x_3 + 2\epsilon x_1 y_2, \\
 \ddot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 &= -\alpha_2 \dot{x}_2 + \beta x_1 x_3 + \epsilon y_1^2, \\
 \ddot{x}_3 + \omega_3^2 x_3 &= -\alpha_3 \dot{x}_3 + \beta x_1 x_2 + \kappa f(t) \sin \omega_3 t \\
 \ddot{y}_1 + \omega_1^2 y_1 &= -\alpha_1 \dot{y}_1 + \beta y_2 y_3 + 2\epsilon y_1 x_2, \\
 \ddot{y}_2 + \omega_2^2 y_2 &= -\alpha_2 \dot{y}_2 + \beta y_1 y_3 + \epsilon x_1^2, \\
 \ddot{y}_3 + \omega_3^2 y_3 &= -\alpha_3 \dot{y}_3 + \beta y_1 y_2 + \kappa g(t) \sin \omega_3 t,
 \end{aligned} \tag{4}$$

где $f(t) = \sin^2(\pi t / T)$, $g(t) = \cos^2(\pi t / T)$.

Таким образом, показана возможность реализовать на основе параметрического принципа возбуждения колебаний множество схем, функционирование которых заключается в генерации последовательных импульсов с высокочастотным заполнением, фаза которых изменяется хаотически. В силу того, что изменение фазы определяется отображением типа

тотой заполнения ω_3 от внешнего источника. Амплитуда колебаний стабилизируется, т.к. осуществляется за счет отбора энергии от осциллятора z . Изменение фазы колебаний за полный цикл смены стадий, также как и в первой системе, будет описываться отображением $\varphi_{n+1} = -2\varphi_n + \text{const}$.

Было проведено численное решение системы уравнений (3) при задании параметров: $\omega_1 = 2\pi$, $\omega_2 = 4\pi$, $\omega_3 = 6\pi$, $T = 16$, $\alpha_{1,2,3} = 1.5$, $\beta = 1$, $\varepsilon = 3$, $\kappa = 90$. На рис. 3 показана итерационная диаграмма для фаз (б), портрет аттрактора в сечении Пуанкаре (в) и портрет аттрактора в проекции на фазовую плоскость одного из осцилляторов (г). Были рассчитаны показатели Ляпунова при разных значениях параметра κ . Согласно полученным результатам, величина положительного показателя Ляпунова остается близкой к $\ln 2$ в широком диапазоне параметров, что согласуется с приближенным описанием посредством отображения Бернулли.

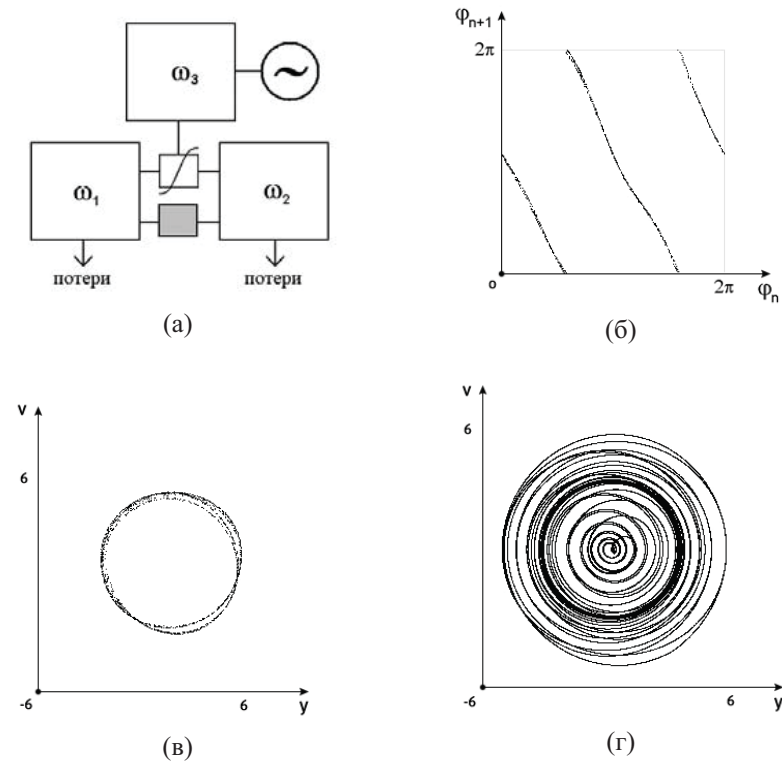


Рис. 3

МОДЕЛИ УЛАМА И ЗАСЛАВСКОГО ПРИ РАЗЛИЧНЫХ УРОВНЯХ ДИССИПАЦИИ

Дубинин А. С., студент 3 курса ФНП СГУ

Введение. В работе рассматривается динамика двух двумерных отображений систем Улама и Заславского. Первая модель (рис. 1, а) была предложена Уламом для иллюстрации идеи Ферми, объясняющей возникновение в космосе частиц высокой энергии [1]. В этой модели частица свободно движется влево - вправо вдоль оси x , испытывая упругие соударения с двумя вертикальными стенками бесконечно большой массы, расположенными на расстоянии L друг от друга. Сила тяжести отсутствует.

Заславский предложил другую модель, показанную на (рис. 1, б) [1]. Здесь упругая частица подпрыгивает в поле тяжести на массивной горизонтальной плите, которая совершает колебания вверх-вниз.

В модели Улама чем больше параметр скорости, тем меньше время соударения между стенками. В модели Заславского наблюдается противоположная ситуация.

Для моделей получены следующие отображения: «прыгающего шарика» и «машина Улама». Вывод отображений производится при предположении, что смещение стола в момент удара пренебрежимо мало (если скорость шарика достаточно велика по сравнению со скоростью плиты). В результате можно получить системы следующего вида:

- отображение «прыгающего шарика»

$$\begin{aligned} V_{n+1} &= (1-\varepsilon)V_n + k \sin X_n, & k &= \frac{2V_0}{2\omega L}, \\ X_{n+1} &= X_n + V_{n+1}, \end{aligned} \quad (1)$$

- отображение «машина Улама»

$$\begin{aligned} V_{n+1} &= (1-\varepsilon)V_n + k \sin X_n, & k &= \frac{2(2-\varepsilon)\omega V_0}{g}, \\ X_{n+1} &= X_n + \frac{1}{V_{n+1}}, \end{aligned} \quad (2)$$

где k - безразмерная амплитуда колебаний, а ε - параметр диссипации.

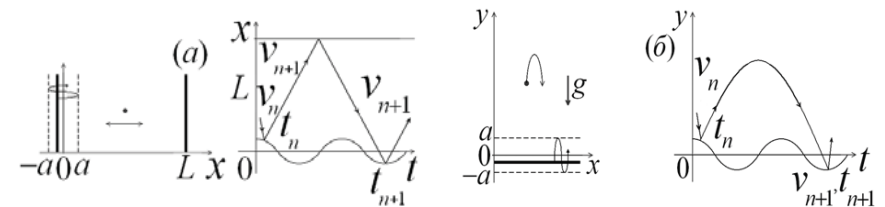


Рис. 1. Пространственно-временные диаграммы, иллюстрирующие динамику моделей Улама (а) и Заславского (б), и схематические изображения самих моделей. Рисунки взяты из книги [1]

В отображениях V и X - безразмерные переменные, имеющие смысл скорости и времени. Представленные модели способны демонстрировать достаточно нетривиальное, в том числе хаотическое поведение. В начальном виде описанные модели являются консервативными. Однако они допускают введение диссипации, если предположить, что в момент соударения шарика с движущейся поверхностью теряется некоторая доля энергии. Таким образом, мы имеем простые механические системы, имеющих ясный консервативный предел - удобный объект для исследования влияния уровня диссипации в системе на её динамику.

1. Динамика отображений Улама и Заславского при различных уровнях диссипации. Исследование динамики начнём с построения бифуркационных деревьев. На приведённых рисунках можно видеть деревья, построенные при малых значениях параметра диссипации.

Хорошо видно, что в этих системах имеют место бифуркации удвоения периода и также наблюдается переход к хаосу. В системах Улама и Заславского присутствует мультистабильность.

При построении было произведено некоторое количество итераций отображения, чтобы исключить переходные процессы и реализовать установившийся режим. Величина переходного процесса для систем Улама и Заславского, при котором система приходит к установившемуся режиму, составляет около 400000. Существует зависимость времени переходного процесса от параметра диссипации: т.е. чем меньше диссипация, тем больше переходной процесс.

Анализ бифуркационных деревьев показал, что в системе при малых значениях диссипации, т.е. когда система близка к консервативному случаю, существуют ветви бифуркационного дерева, не относящиеся к основному аттрактору. Им соответствуют точки, которые не принадлежат «основному» бифуркационному дереву, это говорит о наличии мультистабильности. При увеличении параметра диссипации мультистабильность исчезает. Также при приближении системы к слабодиссипативному состоянию происходит увеличение длительности переходного процесса.

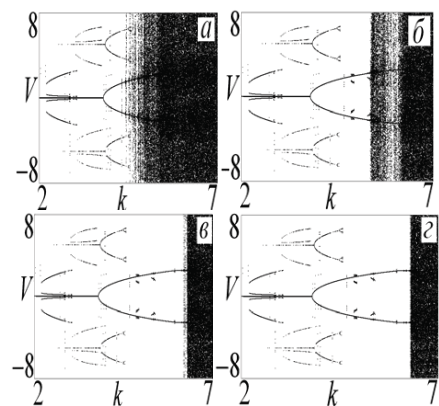


Рис. 2. Бифуркационные деревья отображения Заславского при $\varepsilon=0.1$. Количество пропущенных итераций: а - 5000; б - 5000; в - 200000; з - 400000

При построении бифуркационных деревьев для отображения Улама по оси ординат была задана 2π периодическая переменная.

При построении бифуркационных деревьев для отображения Улама по оси ординат была задана 2π периодическая переменная.

попеременное параметрическое возбуждение подсистем, и затухание колебаний в промежутках времени между активными стадиями.

За полный период модуляции накачки фаза колебаний претерпевает умножение на фактор 4, что обеспечивает хаос в поведении последовательности значений фазы. При функционировании система выдает сигнал в виде импульсов, следующих друг за другом с периодом модуляции накачки, но при этом фаза высокочастотного заполнения хаотически меняется от импульса к импульсу.

Динамика описывается четырьмя дифференциальными уравнениями второго порядка

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 &= \kappa x_2 f(t) \sin \omega_3 t + 2\varepsilon x_1 y_2 - \alpha_1 \dot{x}_1 - \beta_1 \dot{x}_1^3, \\ \ddot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 &= \kappa x_1 f(t) \sin \omega_3 t + \varepsilon y_1^2 - \alpha_2 \dot{x}_2 - \beta_2 \dot{x}_2^3, \\ \dot{y}_1 + \omega_1^2 y_1 &= \kappa y_2 g(t) \sin \omega_3 t + 2\varepsilon y_1 x_2 - \alpha_1 \dot{y}_1 - \beta_1 \dot{y}_1^3, \\ \dot{y}_2 + \omega_2^2 y_2 &= \kappa y_1 g(t) \sin \omega_3 t + \varepsilon x_1^2 - \alpha_2 \dot{y}_2 - \beta_2 \dot{y}_2^3, \end{aligned} \quad (2)$$

где $f(t) = \sin^2 \pi t / T$, $g(t) = \cos^2 \pi t / T$.

Генераторы с насыщением за счет истощения накачки

3. Система на основе трех осцилляторов. Генератор представляет собой систему из трех осцилляторов, частоты которых ω_1 , $\omega_2 = 2\omega_1$, $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2 = 3\omega_1$ (рис. 3, а), и описывается неавтономной системой трех дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \omega_1^2 x &= \beta yz - \alpha_1 f_4(t) \dot{x} + 2\varepsilon f_3(t) xy, \\ \dot{y} + \omega_2^2 y &= \beta xz - \alpha_2 f_2(t) \dot{y} + \varepsilon f_3(t) x^2, \\ \ddot{z} + \omega_3^2 z &= \beta xy + f_1(t) \kappa \sin \omega_3 t - \alpha_3 \dot{z}, \end{aligned} \quad (3)$$

где определение функций $f_k(t)$ аналогично использованному при записи уравнений (1).

Эволюция за период времени T происходит в виде последовательности четырех периодически повторяющихся стадий равной продолжительности $T/4$. Интервал времени, задающий продолжительность каждой из четырех стадий, содержит целое число высокочастотных периодов сигнала накачки, т.е. $T/4 = 2\pi N / \omega_3$. В отличие от первого генератора, роль накачки играет третий осциллятор z . За счет него происходит изменение величины реактивной связи между x и y . Возбуждение осциллятора z обеспечивается периодически подаваемой последовательностью импульсов с час-

и β_2 . На стадии 2 имеет место *затухание осциллятора у*; при этом осцилляторы не связаны. Осциллятор x совершает незатухающие колебания, а в осцилляторе u происходит затухание колебаний до малого уровня, ими можно пренебречь. На стадии 3 осуществляется *взаимодействие осцилляторов x и u через квадратичную нелинейность*; осциллятор u раскачивается воздействием второй гармоники осциллятора x ($\omega_2 = 2\omega_1$). Если колебания осциллятора x представить в виде $x \sim \cos(\omega_1 t + \varphi)$, то преобразование на квадратичной нелинейности дает $\cos^2(\omega_1 t + \varphi) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2\omega_1 t + 2\varphi)$, так что фаза колебаний осциллятора u определяется величиной 2φ . На стадии 4 происходит *затухание первого осциллятора x* до пренебрежимо малого уровня, тогда как амплитуда осциллятора u остается практически постоянной.

Изменение фазы колебаний в системе за полный цикл смены стадий приближенно будет описываться растягивающим отображением окружности (отображением Бернулли) $\varphi_{n+1} = -2\varphi_n + \text{const}$. Описываемая таким отображением динамика хаотическая.

Было проведено численное решение системы уравнений (1) при следующих значениях параметров:

$$\omega_1 = 2\pi, \omega_2 = 4\pi, \omega_3 = 6\pi, T = 16, \alpha_1 = \alpha_2 = 1.6, \beta_1 = \beta_2 = 0.02, \varepsilon = 2.2, \kappa = 25$$

На рис. 1 показана итерационная диаграмма для фаз (б) и портрет аттрактора в сечении Пуанкаре (в). Были рассчитаны показатели Ляпунова при разных значениях параметра κ . Следует отметить их близость к величине $\ln 2$, что соответствует приближению отображения окружности.

2. Система на основе четырех осцилляторов. Вторая схема была предложена ранее в работе [6]. Она составлена из двух подсистем А и В – параметрических генераторов, каждый из которых представляет собой пару параметрически связанных осцилляторов с частотами $\omega_2 = 2\omega_1$ и $\omega_3 = 3\omega_1$ (рис. 2).

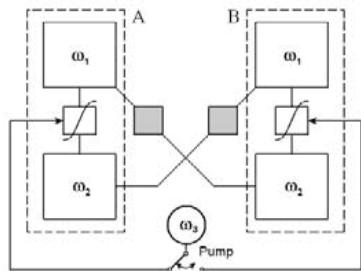


Рис. 2

Осциллятор частоты ω_1 в каждой подсистеме связан через квадратичный нелинейный элемент с осциллятором частоты ω_2 , относящимся к подсистеме-партнеру, причем воздействие на второй гармоники резонансное. Накачка включается по очереди в одной и другой подсистеме, так что происходит

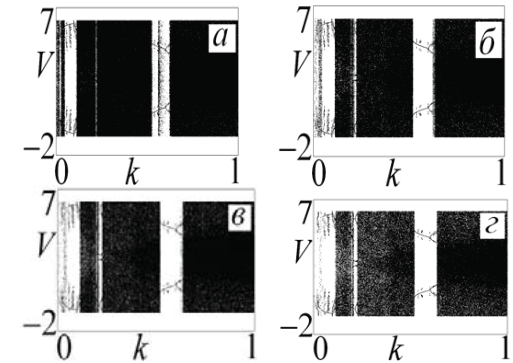


Рис. 3. Бифуркационные деревья отображения Улама при $\varepsilon = 0.1$. Количество пропущенных итераций: а - 10000; б - 50000; в - 100000; г - 400000

2. Карты динамических режимов. Еще одним методом исследования является построение карт динамических режимов. Карты позволяют выявлять основные динамические режимы, наблюдаемые в системе, а также значения параметров, соответствующие смене динамического режима. Карты для отображений Улама и Заславского демонстрируют сложную динамику, наблюдаются удвоения периода и характерные области хаоса, при приближении к консервативной области структура аттрактора усложняется, наблюдается так же переход к хаосу. На представленных картах находится область существования неподвижной точки, обозначенная цифрой 1. Ее верхняя граница представляет собой линию бифуркации удвоения периода. Выше нее наблюдается устойчивый 2-цикл. Далее наблюдается хаотическая область и другие области, соответствующие режимам периодов 3, 4 и т.д. В хаотической области наблюдается существование окон

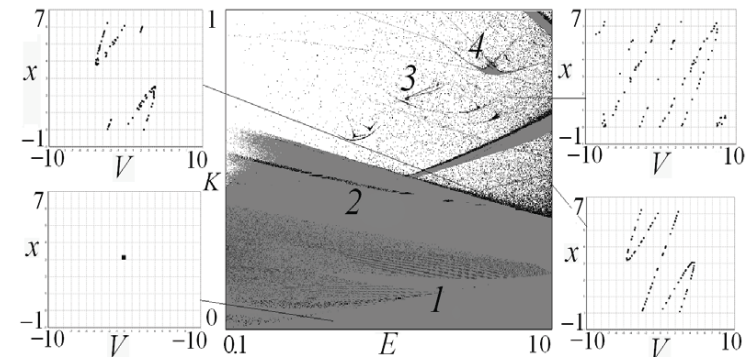


Рис. 4. Карта динамических режимов отображения Заславского и его характерные аттракторы.

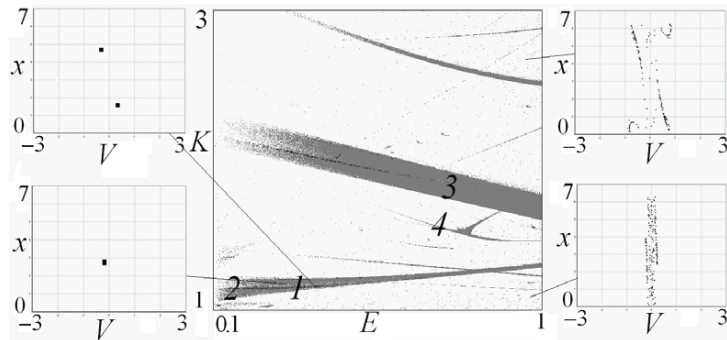


Рис. 5. Карта динамических режимов отображения Улама и его характерные аттракторы

периодических режимов. В них можно наблюдать линии касательных бифуркации или (в терминах теории катастроф) линии складки (они имеют коразмерность один). Эти линии собираются в точку сборки.

В отличие от карты для отображения Заславского в карте для Улама в нижней части находится хаотическая область, т.е. непериодическая динамика даже при малых значениях амплитуды колебаний стола.

Заключение. Была проведена работа по исследованию динамики двух мерных моделей Улама и Заславского, в изначальном виде модели являлись консервативными. Однако они допускают введение диссипации, если предположить, что в момент соударения шарика с движущейся поверхностью теряется некоторая доля энергии. Таким образом, мы имеем простые механические системы, имеющих ясный консервативный предел - удобный объект для исследования влияния уровня диссипации в системе на её динамику. В ходе исследования было установлено, что при приближении системы к слабо диссипативному состоянию происходит увеличение длительности переходного процесса. При изучении бифуркационных деревьев было установлено, что в системе присутствует мультистабильность. В системе Улама периодическое поведение наблюдается при малых значениях амплитуды колебаний стола.

Библиографический список

1. Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Рыскин Н.М. Нелинейные колебания. М.: Физматлит, 2002. 292 с.
2. Кузнецов А.П., Савин А.В., Тюрюкина Л.В. Введение в физику нелинейных отображений. Саратов: Научная книга, 2010. 134 с.
3. Кузнецов А.П. Программа-минимум по теоретической нелинейной динамике. <http://sgtnd.narod.ru/wts/rus/kruzhoz>

Научный руководитель: ассистент Савин Д.В.

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ГЕНЕРАТОРЫ ХАОСА С ГИПЕРБОЛИЧЕСКИМИ АТТРАКТОРАМИ

Кузнецов А.С., аспирант ФНП СГУ

Принцип параметрической генерации и усиления колебаний широко известен в электронике и нелинейной оптике [1-4]. В настоящей работе представлено несколько моделей параметрических систем – генераторов хаоса, функционирование которых определяется присутствием гиперболического аттрактора типа Смейла-Вильямса.

Генераторы с насыщением за счет нелинейной диссипации

1. Система на основе двух осцилляторов. Схема содержит два связанных осцилляторов, частоты которых ω_1 и $\omega_2 = 2\omega_1$ (рис.1). Динамика описывается системой двух дифференциальных уравнений второго порядка [5]:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \omega_1^2 x &= f_1(t)(\kappa y \sin \omega_3 t - \beta_1 \dot{x}^3) - \alpha_1 f_4(t) \dot{x} + 2\epsilon f_3(t) xy, \\ \ddot{y} + \omega_2^2 y &= f_1(t)(\kappa x \sin \omega_3 t - \beta_2 \dot{y}^3) - \alpha_2 f_2(t) \dot{y} + \epsilon f_3(t) x^2, \end{aligned} \quad (1)$$

где $f_k(t) = 1$, если при некотором целом n выполнено неравенство $kT \leq t < 4nT < (k+1)T$, и 0 в противном случае. Параметры: κ – интенсивность накачки, $\alpha_{1,2}$ – линейная диссипация осцилляторов на стадиях затухания, ϵ – величина связи через квадратичный нелинейный элемент. Эволюция за период времени T происходит в виде последовательности четырех периодически повторяющихся стадий равной продолжительности $T/4$, составляющей содержащий целое число высокочастотных периодов сигнала накачки ($T/4 = 2\pi N / \omega_3$).

На стадии 1 происходит *параметрическая раскачка* двух осцилляторов x и y в силу присутствия накачки на частоте ω_3 , и стабилизация амплитуды благодаря нелинейной диссипации, характеризуемой параметрами β_1

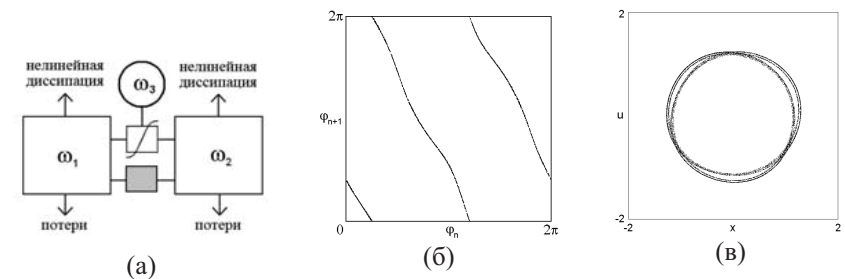


Рис. 1

дения по кольцу $T_{av} = 227.85$ можно получить старший показатель для отображения Пуанкаре:

$$\Lambda_1 = \lambda_1 T_{av} = 0.6945.$$

Можно видеть хорошее соответствие между полученной оценкой и показателем Ляпунова для отображения Бернулли: $\ln 2 = 0.6931$. Это позволяет связать старший показатель с циклической координатой в многомерном фазовом пространстве, вдоль которой происходит растяжение. Второй показатель равен нулю с точностью до численной ошибки, он связан с возмущением вдоль фазовой траектории. Третий показатель отрицательный, причем его абсолютная величина говорит о сильном сжатии фазового объема; это позволяет оценить размерность аттрактора потоковой системы по формуле Каплана-Йорке:

$$D_{KY} \approx 2.009.$$

Фрактальная размерность близка к целому числу, что объясняет невозможность увидеть тонкую структуру аттрактора на рис. 3. Также следует заметить, что хотя всего показателей Ляпунова у этой системы $2(N+1)$ штук, вычислять их все не обязательно, поскольку младшие соответствуют сильному сжатию фазового объема и не влияют на оценку размерности.

Данная система может быть реализована на базе электроники или нелинейной оптики; при этом она не обладает недостатками, присущими аналогичным моделям, предложенным ранее. Преимущество системы состоит в резонансной передаче возбуждения между звеньями цепи. Можно отметить, что на основе подобных цепочек, используя другие способы введения связи, можно получить динамику, связанную с отображением кота Арнольда или с гиперхаотическими аттракторами.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ (МК-905.2010.2).

Библиографический список

1. *Kuznetsov S.P. and Pikovsky A. Autonomous coupled oscillators with hyperbolic strange attractors // Physica D. 2007, vol. 232, pp. 87–102.*
2. *Кузнецов С.П. Гиперболические странные аттракторы систем, допускающих физическую реализацию // Известия вузов – Прикладная нелинейная динамика. 2009. т.17, №4. С. 5-34.*

Научный руководитель: Кузнецов С.П., д.ф.-м. н., заведующий лабораторией теоретической нелинейной динамики СФ ИРЭ РАН, профессор кафедры динамических систем ФНП СГУ.

АВТОНОМНАЯ СИСТЕМА С АТТРАКТОРОМ СМЕЙЛА-ВИЛЬЯМСА НА ОСНОВЕ КОЛЬЦЕВОЙ СТРУКТУРЫ ИЗ ОСЦИЛЛЯТОРОВ ВАН ДЕР ПОЛЯ С РЕЗОНАНСНЫМ МЕХАНИЗМОМ ПЕРЕДАЧИ ВОЗБУЖДЕНИЯ

Круглов В.П., студент 4 курса ФНП СГУ

В докладе предложена модель автономной системы с аттрактором Смейла-Вильямса, представляющая собой кольцевую цепочку из $N+1$ несимметрично связанных осцилляторов ван дер Поля. Каждому из них поставлен в соответствие номер от 0 до N . Частоты осцилляторов постепенно уменьшаются с увеличением их номера так, что частота осциллятора N вдвое меньше частоты нулевого, но частоты двух соседних осцилляторов остаются близки. Звено цепи N связано со звеном 0 обратной связью, содержащей элемент с квадратичной нелинейностью. Причиной возникновения аттрактора Смейла-Вильямса является удвоение фазы возбуждения за один проход возбуждения по кольцу [1,2]. Цепочка описывается системой уравнений:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_0 - \left(A + \frac{3}{2} x_N^2 + x_0^2 - 2S \right) \dot{x}_0 + \omega_0^2 x_0 &= \epsilon x_N^2, \\ \ddot{x}_1 - \left(A + \frac{3}{2} x_0^2 + x_1^2 - 2S \right) \dot{x}_1 + 2 \frac{2}{N} \omega_0^2 x_1 &= \epsilon x_0, \\ \ddot{x}_2 - \left(A + \frac{3}{2} x_1^2 + x_2^2 - 2S \right) \dot{x}_2 + 2 \frac{4}{N} \omega_0^2 x_2 &= \epsilon x_1, \\ \dots & \\ \ddot{x}_N - \left(A + \frac{3}{2} x_{N-1}^2 + x_N^2 - 2S \right) \dot{x}_N + 2^{-2} \omega_0^2 x_N &= \epsilon x_{N-1}, \\ S &= \sum_{k=0}^N x_k^2, \end{aligned} \quad (1)$$

где ϵ – коэффициент связи, ω_0 – частота осциллятора 0. Коэффициенты перед первыми производными можно переписать в виде $A - x_{j-1}^2/2 - x_j^2 - 2 \sum_{k \neq j-1, j}^N x_k^2$. Они подобраны таким образом, чтобы каждый осциллятор в цепочке подавлял колебания всех остальных, кроме следующего. Связь, осуществляющая передачу сигнала от одного осциллятора другому, обеспечивается дополнительными слагаемыми. В уравнениях 1, ..., N в это слагаемое входит линейно сигнал от предыдущего осциллятора, в уравнении с нулевым индексом это слагаемое пропорционально квадрату сигнала ос-

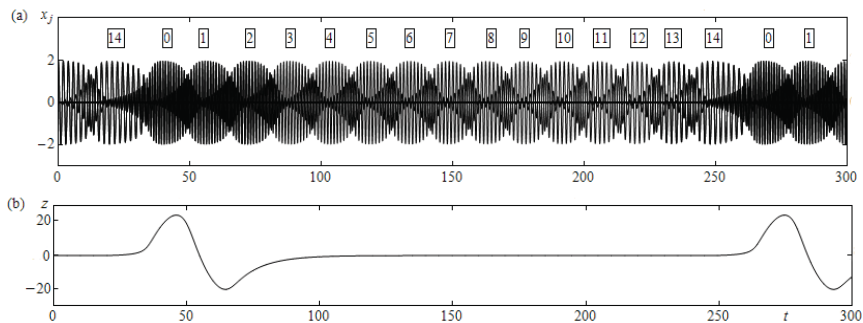


Рис. 1. а) Временные зависимости динамических переменных x_j ($j=0,1,2,\dots,N$) и б) зависимость вспомогательной переменной z при значениях параметров $N=14$, $A=1$, $\omega_0=2\pi$, $\varepsilon=0.2$, полученные при численном решении уравнений (1)

циллатора N . Временные реализации динамических переменных x_j ($j=0,1,2,\dots,N$) на рис. 1, а демонстрируют последовательную передачу возбуждения по цепочке.

Чтобы продемонстрировать удвоение фазы, был осуществлен переход от системы дифференциальных уравнений к отображению Пуанкаре за полный проход сигнала по цепочке. Для этого фиксировались моменты времени, в которые амплитуды колебаний нулевого и первого осцилляторов равны. Введем дополнительную переменную z , удовлетворяющую уравнению

$$\dot{z} + \gamma z = +x_0^2 + \omega_0^2 x_0^2 - x_1^2 - 2^{2/N} \omega_0^2 x_1^2$$

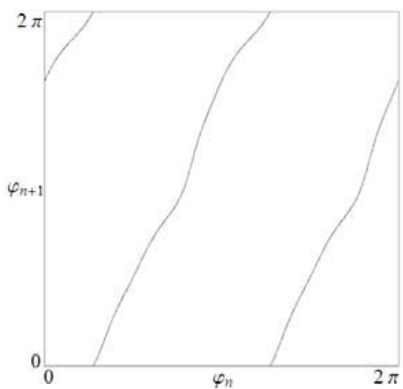


Рис. 2. Итерационная диаграмма для фазы осциллятора 0, полученная при численном решении уравнений (1) и (2)

где правой части стоит разность квадратов амплитуд колебаний звеньев 0 и 1, а γ – положительная константа. Поведение переменной z при $\gamma=0.1$ показано на рис. 1, б. Для построения отображения Пуанкаре записывались состояния системы в моменты смены знака z с положительного на отрицательный. На рис. 2 представлена итерационная диаграмма для фазы осциллятора 0, по осям отложены последовательные значения фазы φ_n и φ_{n+1} после очередного полного прохождения сигнала по цепочке. Очевидно совпадение полученного изображения с

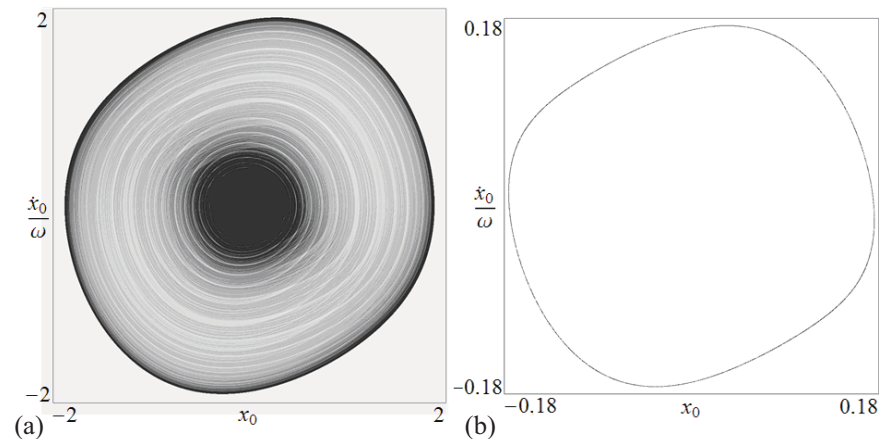


Рис. 3. Аттрактор в проекции на фазовую плоскость осциллятора 0 а) из $2(N+1)$ -мерного фазового пространства потоковой системы (1) при значениях параметров $N=14$, $A=1$, $\omega_0=2\pi$, $\varepsilon=0.2$ и б) в сечении Пуанкаре, полученном с помощью дополнительной переменной z

итерационной диаграммой для отображения Бернулли: за один оборот образа φ_n его образ φ_{n+1} делает два оборота. Так как по остальным направлениям фазовое пространство сильно сжимается (не считая нейтрального направления вдоль траектории), можно предполагать, что в фазовом пространстве системы (1) существует однородно гиперболический аттрактор, являющийся надстройкой над аттрактором типа Смейла-Вильямса.

На рис. 3 представлены портреты аттрактора системы в проекции на фазовую плоскость осциллятора 0. На панели а) изображена проекция аттрактора многомерной потоковой системы (1). На панели б) показана проекция аттрактора отображения Пуанкаре, полученная с помощью дополнительного уравнения (2) описанным выше способом. Изображенный на панели б) объект в действительности является аттрактором типа Смейла-Вильямса, сильное сжатие фазового пространства по всем направлениям, кроме связанного с угловой переменной φ , не позволяет увидеть его поперечную канторову структуру.

К уравнениям (1) и соответствующим уравнениям в вариациях был применен стандартный алгоритм Бенеттина оценки показателей Ляпунова. Четыре старших показателя составили

$$\lambda_1 = 0.0030479, \quad \lambda_2 = -0.0000065, \quad \lambda_3 = -0.3353, \quad \lambda_4 = -0.6318, \dots$$

Старший показатель положительный, что подтверждает хаотическое поведение системы. Перенормировкой на полный период прохода возбуж-